COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A: Mathématiques, Physique et Astronomie

TOME 15 A ANNEE 1966

Über die Eulersch Reihentransformation

von

BERKİ YURTSEVER

1

Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara
Ankara, Turquie

Communications de la Faculté des Sicences
de l'Université d'Ankara

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara" est un organe de publication englobant toutes les disciplines scientifiques représentées à la Faculté: Mathématiques pures et appliquées, Astronomie, Physique et Chimie théoriques, expérimentales et techniques, Géologie, Botanique et Zoologie.

La Revue, à l'exception des tomes I, II, III, comprend trois séries

Série A: Mathématiques, Physique et Astronomie.
Série B: Chimie.
Série C: Sciences naturelles.

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible, les communications des auteurs étrangers. Les langues allemande, anglaise et française sont admises indifféremment. Les articles devront être accompagnés d'un bref sommaire en langue turque.

Adres: Fen Fakültesi Tebliğler Dergisi, Fen Fakültesi, Ankara, Turquie.

Über die Eulersche Reihentransformation

BERKİ YURTSEVER

Mathematisches Institut der Universität Ankara
(Eingegangen am 12. Januar 1966)

Es gilt bekanntlich der Satz : Wenn $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu}$ eine beliebige konvergente Reihe ist, und wenn $\Delta^{n} a_{0}$, die n-te Differenz von $a_{\circ}$ bedeutet, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^{n} a_{\circ}}{2^{n+1}},$$

d. h. auch die zweite Reihe ist konvergent und hat dieselbe Summe wie die erste. In dieser Note wird zunächst gezeigt, dass die Matrix $(c_{n\nu})$, wobei

$$c_{n\nu} = \frac{1}{k^{n}} \binom{n}{\nu} (k-1)^{n-\nu}, \qquad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

ist und $k \geqq 2$ eine ganze Zahl bedeutet, die Regularitätsbedingungen erfüllt. Danach werden für eine Folge (s_{n}) folgende Definitionen gegeben : Es wird gesetzt

$$\Delta_{k-1} s_{\nu} = (k-1)\, s_{\nu} - s_{\nu+1}$$

und allgemein

$$\Delta_{k-1}^{n} s_{\nu} = (k-1)\, \Delta_{k-1}^{n-1} s_{\nu} - \Delta_{k-1}^{n-1} s_{\nu+1}, \qquad \begin{array}{l} \Delta_{1} s_{\nu} = \Delta s_{\nu} \\ \Delta_{k-1}^{\circ} s_{\nu} = s_{\nu}. \end{array}$$

Mit Hilfe dieser Bemerkungen und des Markoffschen Satzes wird endlich der folgende Satz bewiesen :

Es sei

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu}$$

eine beliebige konvergente Reihe. Dann gilt für jede ganze Zahl $k \geqq 2$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_{k-1}^{n} a_{\circ}}{k^{n+1}},$$

d. h. auch die zweite Reihe ist konvergent und hat dieselbe Summe wie die erste. Für $k = 2$ erhält man den Eulerschen Satz.

I. EİNLEİTUNG

Es sei die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - + \ldots$$

konvergent. Dann ist bekanntlich, wenn $\Delta^n a_0$ die n–te Differenz von a_0 beduetet

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} , \tag{1}$$

d. h. auch die zweite Reihe ist konvergent und hat dieselbe Summe.

Wir wollen dieser Eulerschen Reihentransformation (1) eine andere Gestalt geben.

Wir erinnern daran, dass, wenn die Matrix $(c_{n\nu})$ regulär ist, und wenn die Folge der Zahlen $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ gegen s strebt, so konvergiert auch die Folge

$$s'_n = \sum_{n=0}^{n} c_{n\nu} s_{\nu} \to s.$$

Dabei nennen wir eine Matrix $(c_{n\nu})$ regulär,

(i) wenn für jedes feste $p \geqq 0$ und für $n \to \infty$, $c_{np} \to 0$ ist,

(ii) wenn es eine Konstante K gibt, so dass für jedes $n \geqq 0$ und jedes $q \geqq 0$ die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{q} |c_{n\nu}| < \mathrm{K}$$

bleibt, und

(iii) wenn für n $\to \infty$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} = A_n \to 1$ strebt.

II. HILFSBEMERKUNGEN

1. Es sei $k \geqq 2$ eine ganze Zahl. Wir setzen

$$c_{n\nu} = \frac{1}{k^n} \binom{n}{\nu} (k-1)^{n-\nu} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{n} = 0,1,2, \ldots \\ \nu = 0,1,2, \ldots \end{array}$$

und betrachten die unendliche Matrix $(c_{n\nu})$, wobei wir für $\nu > n, c_{n\nu} = 0$ gesetzt denken. Diese Matrix ist regulär. Denn für jedes feste p $\geqq 0$ ist

$$c_{np} = \frac{1}{k^n} \binom{n}{p} (k-1)^{n-p}$$
$$= \left(\frac{k-1}{k}\right)^n \frac{1}{(k-1)^p} \binom{n}{p} < \frac{n^p}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^n} .$$

Nun konvergiert aber die Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^n} ,$$

da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p . \ \frac{k-1}{k} < 1 ,$$

weil p eine feste Zahl ist. Also ist für jedes feste p $\geqq 0$ und für n $\to \infty$,

$$c_{np} = \frac{1}{k^n} \binom{n}{p} (k-1)^{n-p} \to 0,$$

d. h. die Bedingung (i) ist erfüllt.

Die Bedingungen (ii) und (iii) sind auch erfüllt, da

$$\sum_{\nu=0}^{q} |c_{n\nu}| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |c_{n\nu}| = \sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu}$$
$$= \frac{1}{k^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (k-1)^{n-\nu}$$
$$= 1$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu} = 1$$

ist. Daher, wenn $s_n \to s$ ist, so ist auch

$$\frac{\binom{n}{0}(k-1)^n s_0 + \binom{n}{1}(k-1)^{n-1} s_1 + \binom{n}{2}(k-1)^{n-2} s_2 + \ldots + \binom{n}{n} s_n}{k^n} \to s. \quad (2)$$

2. Es sei $s_0, s_1, s_2, \ldots$ irgend eine Zahlenfolge und $k \geqq 2$ eine ganze Zahl. Wir bilden

$$(k-1)s_0-s_1,\ (k-1)s_1-s_2, \ldots,\ (k-1)s_\nu - s_{\nu+1},\ \ldots$$

und bezeichnen sie der Reihe nach mit

$$\Delta_{k-1}s_0, \qquad \Delta_{k-1}\, s_1, \ \ldots, \Delta_{k-1}\, s_\nu\,, \ \ldots$$

und speziell für $k = 2$

$$\Delta_1\, s_\nu = \Delta\, s_\nu\,.$$

Wir bezeichnen weiter für $\nu = 0,1,2, \ldots$

$$\Delta^2_{k-1}\, s_\nu = (k-1)\,\Delta_{k-1}\, s_\nu - \Delta_{k-1}\, s_{\nu+1}\,, \tag{3}$$

allgemein

$$\Delta^n_{k-1}\, s_\nu = (k-1)\,\Delta^{n-1}_{k-1}\, s_\nu - \Delta^{n-1}_{k-1}\, s_{\nu+1}\,,$$

und setzen fest

$$\Delta^0_{k-1}\, s_\nu = s_\nu\,.$$

Dabei ist, wie aus (3) zusehen

$$\Delta^2_{k-1}\, s_\nu = (k-1)\left[(k-1)s_\nu - s_{\nu+1}\right] - (k-1)\, s_{\nu+1} + s_{\nu+2}$$

$$= \binom{2}{0}(k-1)^2 s_\nu - \binom{2}{1}(k-1)s_{\nu+1} + \binom{2}{2} s_{\nu+2}\,.$$

Wie man leicht durch Induktion zeigen kann, es ist für jede natürliche Zahl n und für jedes ganze $k \geqq 2$

$$\Delta^n_{k-1}\, s_\nu = \binom{n}{0}(k-1)^n\, s_\nu - \binom{n}{1}(k-1)^{n-1}\, s_{\nu+1} + - \ldots$$
$$+ (-1)^n \binom{n}{n} s_{\nu+n} \tag{4}$$

Für $k = 2$ setzen wir wieder $\Delta^n_1\, s_\nu = \Delta^n s_\nu$.

III. EİN SATZ

Wir formulieren den folgenden

S a t z . Es sei

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + - \ldots. \tag{5}$$

eine beliebige konvergente Reihe. Dann konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_{k-1}^{n} a_0}{k^{n+1}}$$

für jede natürliche Zahl $k \geqq 2$ und hat dieselbe Summe wie die Reihe (5). D. h. es ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_{k-1}^{n} a_0}{k^{n+1}}, \qquad (k \geqq 2, \text{ ganz}).$$

Ehe wir den Beweis erbringen, erinnern wir an den wohlbekannten Markoffschen Reihentransformationssatz.

Es sei die konvergente Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu}$$

gegeben. Wir nehmen an, dass jedes Glied dieser Reihe seinerseits durch eine konvergente Reihe dargestellt ist:

$$\begin{array}{l} u_0 = a_{00} + a_{01} + a_{02} + \dots + a_{0n} + \dots \\ u_1 = a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{\nu} = a_{\nu 0} + a_{\nu 1} + a_{\nu 2} + \dots + a_{\nu n} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \qquad (6)$$

Weiter nehmen wir an, dass jede Spalte in diesem Schema (6) konvergiert und $= s_n$ ist ($n = 0,1,2,\dots$), so dass auch die Zeilenreste

$$r_{\nu l} = \sum_{n=l}^{\infty} a_{\nu n}$$

für festes l eine konvergente Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu l} = R_l$$

bilden. Wenn nun

$$\lim_{l \to \infty} R_l = 0$$

ist, so ist auch die Reihe der Spaltensummen

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n$$

konvergent und es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \, .$$

Das ist der Inhalt des Markoffschen Satzes.

IV. BEWEİS DES SATZES

Wir geben nun den Beweis des in III formulierten Satzes. Wir setzen in Schema (6)

$$a_{\nu n} = (-1)^\nu \left[\frac{1}{k^n} \Delta_{k-1}^{n} a_\nu - \frac{1}{k^{n+1}} \Delta_{k-1}^{n+1} a_\nu \right] \tag{7}$$

und summieren die ν–te Zeile. Wir erhalten

$$u_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\nu n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[\frac{1}{k^n} \Delta_{k-1}^{n} a_\nu - \frac{1}{k^{n+1}} \Delta_{k-1}^{n+1} a_\nu \right] \tag{7'}$$

$$= (-1)^\nu a_\nu \, ,$$

da wegen der Konvergenz der Reihe (5) die Folge (a_n) eine Nullfolge bildet und wegen (2) und (4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_{k-1}^{n} a_\nu}{k^n} \tag{8}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{0} (k-1)^n a_\nu - \binom{n}{1} (k-1)^{n-1} a_{\nu+1} + - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} a_{\nu+n}}{k^n} = 0$$

ist. Durch den Ansatz (7) ist also jedes Glied der Reihe (5) als eine unendliche Reihe dargestellt.

Nun summieren wir in Schema (6) die n-te Spalte, d.h. wir bilden

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \left[\frac{1}{k^n} \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu} - \frac{1}{k^{n+1}} \Delta_{k-1}^{n+1} a_{\nu} \right]. \tag{9}$$

Da

$$\Delta_{k-1}^{n+1} a_{\nu} = (k-1) \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu} - \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu+1}$$

ist, so ist

$$\frac{1}{k^n} \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu} - \frac{1}{k^{n+1}} \Delta_{k-1}^{n+1} a_{\nu}$$

$$= \frac{k \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu} - (k-1) \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu} + \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu+1}}{k^{n+1}} = \frac{\Delta_{k-1}^{n} a_{\nu} + \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu+1}}{k^{n+1}}.$$

Daher ist die Reihe (9) für festes n

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\Delta_{k-1}^{n} a_{\nu} + \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu+1}}{k^{n+1}} = \frac{1}{k^{n+1}} \left[\Delta_{k-1}^{n} a_0 + \lim_{\nu\to\infty} (-1)^{\nu} \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu} \right].$$

Nun strebt aber $a_\nu \to 0$, also ist auch die Folge der Zahlen

$$(k-1)\ a_\nu - a_{\nu+1}$$

d. h. die Folge $(\Delta_{k-1} a_\nu)$ eine Nullfolge. Man sieht also, dass auch die Folge

$$\left(\Delta_{k-1}^{n} a_\nu\right)$$

für festes n und für jede ganze Zahl $k \geqq 2$ eine Nullfolge ist (für $\nu \to \infty$). Es ist daher

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu n} = \frac{1}{k^{n+1}} \Delta_{k-1}^{n} a_0.$$

Jetzt berechnen wir die Zeilenreste $r_{\nu l}$. Für festes $l \geqq 0$ ist

$$r_{\nu l} = \sum_{n=l}^{\infty} a_{\nu n}$$

$$= \sum_{n=l}^{\infty} (-1)^{\nu} \left[\frac{1}{k^n} \Delta_{k-1}^{n} a_{\nu} - \frac{1}{k^{n+1}} \Delta_{k-1}^{n+1} a_{\nu} \right]$$

und man findet, genau wie in (7′)

$$r_{\nu l} = \frac{(-1)^{\nu}}{k^l} \Delta^{l}_{k-1} a_{\nu} .$$

Also für festes $l \geqq 0$

$$R_l = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu l} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{1}{k^l} \Delta^{l}_{k-1} a_{\nu}$$

$$= \frac{1}{k^l} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \Delta^{l}_{k-1} a_{\nu} .$$

Wir zeigen nun dass

$$\lim_{l \to \infty} R_l = 0$$

ist. Zu dem Zweck schreiben wir

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \Delta^{l}_{k-1} a_{\nu}$$

$$= \binom{l}{0} (k-1)^l a_0 - \binom{l}{1} (k-1)^{l-1} a_1 + \binom{l}{2} (k-1)^{l-2} a_2 - + \ldots + (-1)^l \binom{l}{l} a_l$$

$$- \binom{l}{0} (k-1)^l a_1 + \binom{l}{1} (k-1)^{l-1} a_2 - \binom{l}{2} (k-1)^{l-2} a_3 + \ldots + (-1)^{l+1} \binom{l}{l} a_{l+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$(-1)^{\nu} \left[\binom{l}{0} (k-1)^l a_{\nu} - \binom{l}{1} (k-1)^{l-1} a_{\nu+1} + \ldots + (-1)^l \binom{l}{l} a_{l+\nu} \right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wenn wir jetzt für die als konvergent gegebene Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu} ,$$

$$r_{\nu} = (-1)^{\nu} \left[a_{\nu} - a_{\nu+1} + a_{\nu+2} - a_{\nu+3} + - \ldots \right]$$

setzen, so strebt $r_{\nu} \to 0$. Auf der anderen Seite kann man die Reihe (10) durch gleiedweise Addition der konvergenten $(l+1)$ Reihen

$$\binom{l}{0} (k-1)^l r_0 , \binom{l}{1} (k-1)^{l-1} r_1 , \ldots \binom{l}{l-1} (k-1) r_{l-1} , \binom{l}{l} r_l$$

entstanden denken (l fest!). Also erhalten wir nach (8), da $r_0, r_1, \ldots$ eine Nullfolge ist,

$$R_l = \frac{\binom{l}{0}(k-1)^l r_0 + \binom{l}{1}(k-1)^{l-1} r_1 + \ldots + \binom{l}{l-1}(k-1) r_{l-1} + \binom{l}{l} r_l}{k^l} \to 0.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Markoffschen Satzes erfüllt, und unser Satz bewiesen. Für $k = 2$ erhält man die Eulersche Reihentransformation.

Literatur

K. Knopp. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (Springer - Verlag, Berlin, 1964).

Özet

Bilindiği gibi, $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$ yakınsak bir seri olduğuna ve $\Delta^n a_0$, a_0 ın n ninci farkını gösterdiğine göre, Euler seri transformasyonu teoremi

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}$$

olduğunu, yani ikinci serinin de yakınsak ve toplamının birinci serinin toplamına eşit bulunduğunu ifade eder. Bu yazıda önce, $k \geqq 2$ bir tamsayı olmak üzere

$$c_{n\nu} = \frac{1}{k^n}\binom{n}{\nu}(k-1)^{n-\nu} \qquad \begin{pmatrix} n = 0,1,2, \ldots \\ \nu = 0,1,2, \ldots \end{pmatrix}$$

alınmış, $\nu > n$ için $c_{n\nu} = 0$ olmak üzere $(c_{n\nu})$ matrisinin regülerlik şartlarını sağladığı gösterilmiş, bunu müteakip bir (s_n) dizisi için

$$\Delta_{k-1} s_\nu = (k-1) s_\nu - s_{\nu+1}$$

ve genel olarak

$$\Delta_{k-1}^n s_\nu = (k-1) \Delta_{k-1}^{n-1} s_\nu - \Delta_{k-1}^{n-1} s_{\nu+1}, \qquad \begin{aligned} \Delta_1 s_\nu &= \Delta s_\nu, \\ \Delta_{k-1}^0 s_\nu &= s_\nu \end{aligned}$$

tarifleri verilmiştir. Nihayet bunlar ve Markoff seri transformasyonu teoremi yardımiyle şu teorem ispatlanmıştır :

Eğer

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$$

serisi yakınsak herhangi bir seri ise, her $k \geqq 2$ tam sayısı için

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_{k-1}^{n} a_0}{k^{n+1}}$$

dir, yani ikinci seri de yakınsak ve toplamı, birinci serinin toplamının aynıdır. k = 2 için buradan Euler teoremi elde edilir.

AVIS IMPORTANT

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara" sera publiée dorénavant sous forme de fascicules à l'arrivée de chaque article. Le tome 15 de la série A, commençant par ce fascicule, sera complété par le dernier fascicule à paraître avant le 31 décembre 1966.

Prix de l'abonnement annuel pour 1966 :

Turquie : 15 TL ; Etranger : 30 TL.

Prix de ce numéro : 5 TL (pour la vente en Turquie).

Prière de s'adresser pour l'abonnement à : Fen Fakültesi Dekanlığı, Ankara, Turquie.

ANKARA ÜNİVERSİTESİ BASIMEVİ. 1966