COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A: Mathématiques, Physique et Astronomie

TOME 21 A — ANNÉE 1971

Über eine spezielle Darstellung der symmetrischen Gruppen

by

E. BAYAR

1

Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara
Ankara, Turquie

Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara

Comité de Rédaction de la Série A

F. Domaniç S. Süray C. Uluçay

Secrétaire de publication

N. Gündüz

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara" est un organe de publication englobant toutes les disciplines scientifiques représentées à la Faculté: Mathématiques pures et appliquées, Astronomie, Physique et Chimie théorique, expérimentale et technique, Géologie, Botanique et Zoologie.

La Revue, à l'exception des tomes I, II, III, comprend trois séries

Série A: Mathématiques, Physique et Astronomie.

Série B: Chimie.

Série C: Sciences naturelles.

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible, les communications des auteurs étrangers. Les langues allemande, anglaise et française sont admises indifféremment. Les articles devront etre accompagnés d'un bref sommaire en langue turque.

Adres: Fen Fakültesi Tebliğler Dergisi Fen Fakültesi, Ankara, Turquie.

Über eine spezielle Darstellung der symmetrischen Gruppen

E. BAYAR

Karadeniz Technische Universität, Fakultät für Naturwissenschaften, Abteilung für Mathematik, Trabzon

(eingegangen am 10/1/1972)

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird eine spezielle reduzible Darstellung der symmetrischen Gruppen versucht. Es wird dabei zunächst ein bekanntes Lemma hergeleitet, das zeigt, daβ das Produkt der Schurschen Charakteristiken durch die Charaktere der erwähnten Darstellung von symmetrischen Gruppen ausgedrückt werden kann. Dann wird gezeigt, daβ mit Hilfe dieses Lemmas eine rekürsive Formel für die Berechnung der erwähnten Charaktere angegeben werden kann.

1.

Eine Klasse der *symmetrischen Gruppe* S_n aller Permutationen von endlichen Ziffernmenge $M = (1,2,\ldots,n)$ besteht bekanntlich aus genau den Permutationen, die bei der üblichen Zyklenschreibweise von einer bestimmten Bauart sind. Eine *Klasse* von S_n, die etwa genau aus den Permutationen besteht, die ρ_i Zyklen der Länge i enthalten $(1 \leqq i \leqq n,\ 0 \leqq \rho_i \leqq n)$, kann mit ihrem *Typus*

$$(\rho) = (i^{\rho_i}) \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=1}^{n} i\,\rho_i = n$$

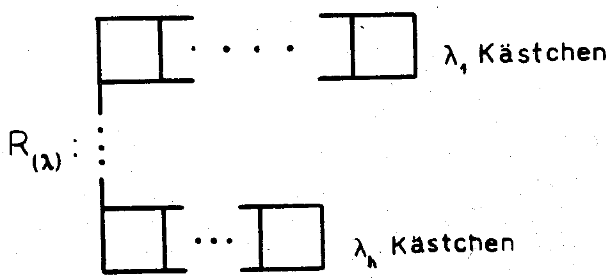
bezeichnet werden. Die *Ordnung* der Klasse (ρ) ist

1.1 $$g_\rho = \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} i^{\rho_i}\,\rho_i\,!}.$$

Ordnet man Zykellängen, die wir mit λ_i bezeichnen, der Klasse (ρ) nach ihrer Größe, so kann man der Klasse (ρ) umkehrbar eindeutig die *Partition*

$$(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h) : \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_h > 0 \qquad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{h} \lambda_i = n$$

von n zuordnen. Eine Partition $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h)$ von n kann man sich auch durch einen *Rahmen* $R(\lambda)$ veranschaulichen, der aus n *Kästchen* in h Zeilen besteht und λ_i Kästchen in der i-ten Zeile enthält. Die Zeilen beginnen sämtlich in der gleichen Spalte:

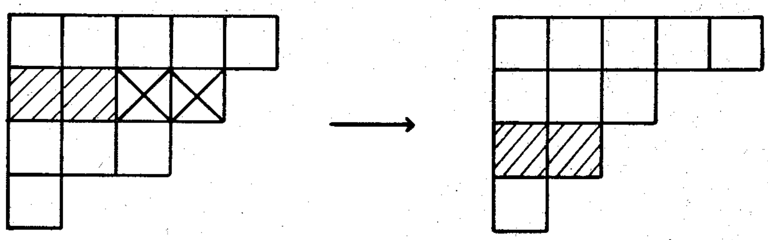
1.2 

Jedem Rahmen $R(\lambda)$ kann eine *gewöhnliche irreduzible Darstellung* $D^{(\lambda)}$ von S_n so zugeordnet werden, daß Darstellungen zu verschiedenen Rahmen *inäquivalent* sind, wobei unter gewöhnlichen Darstellungen C-Darstellungen (C Körper der komplexen Zahlen) verstanden werden. Also kann man jeder Partition (λ) von n eine gewöhnliche irreduzible Darstellung $D^{(\lambda)}$ von S_n zuordnen. Der durch die Partition (λ) von n bestimmte gewöhnliche irreduzible *Charakter* $\chi^{(\lambda)}$ der Gruppe S_n ist eine *Klassenfunktion* in S_n, die jeder Klasse (ρ) von S_n einen rational ganzzahligen Wert $\chi^{(\lambda)}_{\rho}$ zuordnet.

Es sei $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h)$ eine Partition von n und $R(\lambda)$ sei der zu (λ) gehörige Rahmen. Wenn man die letzten r Kästchen der j-ten Zeile von Rahmen $R(\lambda)$ abschneidet, so erhält man natürlich im allgemeinen keinen Rahmen. Aber es gibt eine k-te Zeile von $R(\lambda)$ mit $\lambda_{k-1} \geqq \lambda_j - r \geqq \lambda_k$. Nun schneiden wir die letzten r Kästchen der j-ten Zeile von $R(\lambda)$ ab und bringen den Rest

($\lambda_j - r$ Kästchen) zwischen der $(k-1)$-ten und k-ten Zeile, dann erhalten wir einen Rahmen, der aus $n-r$ Kästchen entsteht. Dieser Rahmen, den wir mit $R(\lambda)(j)$ bezeichnen, erzeugt eine gewöhnliche irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe S_{n-r}. Die zugehörige Partition von $n-r$ bezeichnen wir mit $(\lambda)(j)$.

Beispiel. $(\lambda) = (5,4,3,1)$, $j = 2$, $r = 2$:



2.

Wir erinnern noch an die Bildung der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere der symmetrischen Gruppe S_n aus ihren *Schurschen Charakteristiken* oder *S-Funktionen.* Aus reellen Veränderlichen $s_1,s_2,\ldots,s_n$ bilde man für jede ganze Zahl $k \geqq 0$ die Funktion

$$2.1 \qquad \{k\}(s) = \sum_{(\tau)} \frac{1}{\tau_1!\tau_2!\ldots\tau_k!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\tau_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\tau_2} \ldots \left(\frac{s_k}{k}\right)^{\tau_k}$$

wobei die Summe über alle Klassen $(\tau) = (i^{\tau_i})$ von S_k zu nehmen ist; ferner setze man

$$\{k\}(s) = 0 \quad \text{für} \quad k < 0.$$

Bilden wir das Produkt

$$2.2 \qquad \Gamma_\tau(s) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\tau_i!} \left(\frac{s_i}{i}\right)^{\tau_i},$$

so kann man der Funktion $\{k\}(s)$ auch die einfachere Gestalt

$$\{k\}(s) = \sum_{(\tau)} \Gamma_\tau(s) \text{ für } 0 \leqq k \leqq n : \{k\}(s) = 0 \text{ für } k < 0$$

gegeben werden. Für eine beliebige Partition $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h)$ von n liefert dann die h-zeilige isobare Determinante vom Grade n:

$$2.3 \quad \{\lambda\}(s) = \begin{vmatrix} \{\lambda_1\}(s) & \{\lambda_1+1\}(s) & \ldots \{\lambda_1+h-1\}(s) \\ \{\lambda_2-1\}(s) & \{\lambda_2\}(s) & \ldots \{\lambda_2+h-2\}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \{\lambda_h-h+1\}(s) & \{\lambda_h-h+2\}(s) & \ldots \{\lambda_h\}(s) \end{vmatrix}$$

in ihrer Entwicklung

$$2.4 \qquad \{\lambda\}(s) = \sum_{(\rho)} \chi_\rho^{(\lambda)} \Gamma_\rho(s),$$

den dieser Partition zugeordneten gewöhnlichen irreduziblen Charakter $\chi^{(\lambda)}$ der symmetrischen Gruppe S_n, wobei die Summe über alle Klassen (ρ) von S_n zu nehmen ist.

Nun berechnen wir die Ableitung von $\{k\}(s)$ nach s_r:

$$2.5 \qquad r\frac{\partial}{\partial s_r}\{k\}(s) = \{k-r\}(s).$$

Beweis. Es gilt

$$r\frac{\partial}{\partial s_r}\{k\}(s) = \sum_{(\tau)} r\frac{\partial}{\partial s_r}\Gamma_\tau(s).$$

Es sei nun der Klasse $(\tau) = (i^{\tau_i})$ von S_k mit $\tau_r \geqq 1$ die Klasse $(\tau') = (i^{\tau'_i})$ von S_{k-r} mit $\tau_i' = \tau_i$ für $i \neq r$, $\tau'_r = \tau_r - 1$ zugeordnet. Durchläuft (τ) die Klassen von S_k mit $\tau_r \geqq 1$, dann durchlaufen die zugehörigen (τ') genau die Klassen von S_{k-r}. Obige Gleichung ergibt also

$$r\frac{\partial}{\partial s_r}\{k\}(s) = \sum_{(\tau')} \Gamma_{\tau'}(s) = \{k-r\}(s).$$

3.

Ist $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h)$ eine Partition von n, dann sei S_{λ_1} die symmetrische Gruppe auf dem Ziffernabschnitt $M_1 = (1, 2, \ldots, \lambda_1)$, S_{λ_2} die auf $M_2 = (\lambda_1+1, \lambda_1+2, \ldots, \lambda_1+\lambda_2)$ usw. und $S(\lambda)$ das *direkte Produkt*

3.1 $$S(\lambda) = \mathop{\times}_{i=1}^{h} S_{\lambda_i} \,.$$

Die Permutationsgruppe $S(\lambda)$ ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n.

Ist ES_{λ_i} die *Einsdarstellung* von S_{λ_i}, so ist das (*äussere*) *direkte Produkt*

3.2 $$ES(\lambda) = \bigotimes_{i=1}^{h} ES_{\lambda_i}$$

Einsdarstellung von $S(\lambda)$. Mit $ES(\lambda) \uparrow S_n$ bezeichnen wir die davon induzierte Darstellung von S_n. Den gewöhnlichen Charakter der Darstellung $ES(\lambda) \uparrow S_n$, die im allgemeinen *reduzibel* ist, bezeichnen wir mit $\varphi(\lambda)$. Dann gilt folgendes Lemma:

3.3 *Lemma*: Ist $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h)$ eine Partition von n, (ρ) eine Klasse der symmetrischen Gruppe S_n, dann gilt

$$\sum_{(\rho)} \varphi_\rho^{(\lambda)} \, \Gamma_\rho(s) = \prod_{i=1}^{h} \{\lambda_i\}(s).$$

Beweis. Zuerst können wir nach *Distributivitäts*- und *Transitivitätseigenschaft* von induzierten Darstellungen

$$ES(\lambda) \uparrow S_n \sim \Big(\bigotimes_{i=1}^{h} ES_{\lambda_i}\Big) \uparrow S(\lambda_1, n_1) \uparrow S_n \sim (ES_{\lambda_1} \otimes ES(\lambda)_1 \uparrow S_{n_1}) \uparrow S_n$$

schreiben („$\sim$" bedeute *äquivalent*), wobei $(\lambda)_1 = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_h)$ eine Partition von $n_1 = n - \lambda_1$ bedeutet und $S(\lambda_1, n_1) = S_{\lambda_1} \times S_{n_1}$.

Nun sei $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ ein *vollständiges Repräsentantensystem* der *Linksnebenklassen* der Untergruppe $S(\lambda_1, n_1)$ von S_n:

$$S_n = \bigcup_{i=1}^{q} g_i S(\lambda_1, n_1).$$

$\Psi(u)$ sei der Charakter der Darstellung $ES\lambda_1 \otimes ES(\lambda)_1 \uparrow S_n$. Setzt man nun

$$\dot{\Psi}(g) = \begin{cases} \Psi(g) & \text{für } g \in S(\lambda_1, n_1) \\ 0 & \text{für } g \notin S(\lambda_1, n_1), \end{cases}$$

so ist der Charakter von $ES(\lambda) \uparrow S_n$

$$\varphi^{(\lambda)}(g) = \sum_{i=1}^{q} \dot{\Psi}(g_i^{-1} g g_i) \qquad g \in S_n.$$

Liegt g in der Klasse $(\rho) = (i^{\rho_i})$ von S_n, so liegen alle die rechts vorkommenden Gruppenelemente in der Klasse (ρ). Jedes davon, das in $S(\lambda_1, n_1)$ liegt, gehört also zu einer der Klassen $(\rho_1)(\bar{\rho}_1)$ von $S(\lambda_1, n_1)$, wobei $(\rho_1) = (i^{\rho_{1i}})$ eine Klasse von $S\lambda_1$, $(\bar{\rho}_1) = (i^{\bar{\rho}_{1i}})$ eine Klasse von S_{n_1} (also ihr Produkt $(\rho_1)(\bar{\rho}_1) = (i^{\rho_{1i} + \bar{\rho}_{1i}})$ eine von $S(\lambda_1, n_1)$) ist. Also ist (ρ) eine Klasse von S_n, deren Zyklen sich auf $S\lambda_1$ und S_{n_1} verteilen lassen, d. h. $(\rho) = (\rho_1)(\bar{\rho}_1)$, $\rho_i = \rho_{1i} + \bar{\rho}_{1i}$. Für diejenigen Klassen von S_n, deren Zyklen sich überhaupt nicht $S\lambda_1$ und S_{n_1} verteilen lassen, kommt natürlich Null heraus. Dann ist $\dot{\Psi}(g_i^{-1} g g_i) = \Psi_{\rho_1 \bar{\rho}_1}$. Nun versuchen wir, wie oft ein solches $\Psi_{\rho_1 \bar{\rho}_1}$ kommt. Lassen wir t ganz S_n durchlaufen, so kommt unter den $t^{-1}gt$ jedes zu g in S_n konjugierte Element bekanntlich $\frac{n!}{g_\rho}$ mal vor, also $\frac{n!\, g_{\rho_1} g_{\bar{\rho}_1}}{g_\rho}$ mal ein Element aus der Klasse $(\rho_1)(\bar{\rho}_1)$ von $S(\lambda_1, n_1)$, wo g_{ρ_1} die Ordnung von (ρ_1), $g_{\bar{\rho}_1}$ die Ordnung von $(\bar{\rho}_1)$ ist. Nun haben wir aber von allen Elementen $t = g_i u$ der Nebenklasse $g_i S(\lambda_1, n_1)$ nur das eine g_i zu nehmen. Da zeigt sich, daß die $(g_i u)^{-1} g (g_i u) = u^{-1} (g_i^{-1} g g_i) u$ alle zu $g_i^{-1} g g_i$ in $S(\lambda_1, n_1)$ konjugiert sind. Also haben wir nur noch durch die Ordnung

$\lambda_1!n_1!$ von $S(\lambda_1, n_1)$ zu dividieren: $\dfrac{n!\,g_{\rho_1}\,g_{\bar{\rho}_1}}{g_\rho\,\lambda_1!n_1!}$ von den $g_i^{-1}\,gg_i$ liegen in $(\rho_1)\,(\bar{\rho}_1)$. Also ist

$$\varphi_\rho^{(\lambda)} = \frac{n!}{g_\rho\,\lambda_1!n_1!} \sum_{\substack{(\rho_1),(\bar{\rho}_1):\\ (\rho_1)(\bar{\rho}_1)=(\rho)}} g_{\rho_1}\,g_{\rho_1}\,\varphi_{\bar{\rho}_1}^{(\lambda)_1},$$

wo $\varphi^{(\lambda)_1}$ der zu $(\lambda)_1$ gehörige Charakter von $ES(\lambda)_1 \uparrow S_{n_1}$ ist. Da andererseits offenbar

$$ES(\lambda)_k \uparrow S_{n_k} \sim \Big(\bigotimes_{i=k+1}^{h} ES\lambda_i\Big) \uparrow S(\lambda_{k+1}, n_{k+1}) \uparrow S_{n_k} \sim (ES\lambda_{k+1} \otimes ES(\lambda)_{k+1} \uparrow$$
$$S_{n_{k+1}}) \uparrow S_{n_k}, \quad 1 \leqq k \leqq h-1$$

ist, so erhält man daraus die Rekursionsformel

$$\varphi_{\bar{\rho}_k}^{(\lambda)_k} = \frac{n_k!}{g_{\bar{\rho}_k}\,\lambda_{k+1}!n_{k+1}!} \sum_{\substack{(\rho_{k+1}),(\bar{\rho}_{k+1}):\\ (\rho_{k+1})(\bar{\rho}_{k+1})=(\bar{\rho}_k)}} g_{\rho_{k+1}}\,g_{\bar{\rho}_{k+1}}\,\varphi_{\bar{\rho}_{k+1}}^{(\lambda)_{k+1}}, \quad 1 \leqq k \leqq h-1,$$

wobei $(\lambda)_j = (\lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_h)$ eine Partition von $n_j = n_{j-1} - \lambda_j\;(n_0 = n)$, $(\rho_j) = (i^{\rho_{ji}})$ eine Klasse von $S\lambda_j$ und g_{ρ_j} ihre Ordnung, $(\bar{\rho}_j) = (i^{\bar{\rho}_{ji}})$ eine Klasse von $S(\lambda_j, n_j) = S\lambda_j \times S_{n_j}$ und $g_{\bar{\rho}_j}$ ihre Ordnung, $\varphi^{(\lambda)_j}$ der Charakter von $ES(\lambda)_j \uparrow S_{n_j}$. Daraus folgt unter die Beachtung $(\bar{\rho}_h) = (\rho_h)$

$$\varphi_\rho^{(\lambda)} = \frac{n!}{g_\rho\,\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_h!} \sum_{(\rho_1)(\rho_2)\ldots(\rho_h)=(\rho)} g_{\rho_1}\,g_{\rho_2}\cdots g_{\rho_h}.$$

Damit erhalten wir durch Multiplikation mit $\Gamma_\rho(s)$ und Summation über alle (ρ)

$$\sum_{(\rho)} \varphi_\rho^{(\lambda)}\,\Gamma_\rho(s) = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_h!} \sum_{(\rho_1),(\rho_2),\ldots,(\rho_h)} \frac{g_{\rho_1}\,g_{\rho_2}\cdots g_{\rho_h}}{g_\rho}\,\Gamma_\rho(s).$$

Es ist klar, daß

$$\frac{n!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_h!}\quad\frac{g_{\rho_1}\,g_{\rho_2}\cdots g_{\rho_h}}{g_\rho}\quad\Gamma_\rho(s)=\prod_{i=1}^{h}\Gamma_{\rho_i}(s)$$

ist. Damit erhalten wir also schließlich

$$\sum_{(\rho)}\varphi_\rho^{(\lambda)}\,\Gamma_\rho(s)=\sum_{(\rho_1),(\rho_2),\ldots,(\rho_h)}\prod_{i=1}^{h}\Gamma_{\rho_i}(s)=\prod_{i=1}^{h}\Big(\sum_{(\rho_i)}\Gamma_{\rho_i}(s)\Big)=\prod_{i=1}^{h}\{\lambda_i\}(s).$$

Bezeichnen wir nun das Produkt $\prod_{i=1}^{h}\{\lambda_i\}(s)$ mit $[\lambda](s)$, so lautet 3.3

3.4 $$[\lambda](s)=[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_h](s)=\sum_{(\rho)}\varphi_\rho^{(\lambda)}\;\Gamma_\rho(s).$$

Damit können wir also jeder Partition (λ) ein Produkt von Schurschen Charakteristiken $[\lambda](s)$ zuordnen. Umgekehrt können wir auch mit der Gleichung 3.4 jedem solchen Produkt eine Partition zuordnen, da $\{m\}(s)\,\{n\}(s)=\{n\}(s)\,\{m\}(s)$ ist. Wir bezeichnen das zu $(\lambda)(j)$ gehörige Produkt mit $[\lambda]_j(s)$. Dann ist 3.4 der Ausgangspunkt für die im folgenden herzuleitende Rekursionsformel für $\varphi^{(\lambda)}$.

3.5 *Lemma.* Ist $(\lambda)=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_h)$ eine Partition von n, $(\rho)=(i^{\rho_i})$ eine Klasse von S_n mit $\rho_r\geqq 1$, $(\sigma)=(i^{\sigma_i})$ die Klasse von S_{n-r} mit $\sigma_i=\rho_i$ für $i\neq r$, $\sigma_r=\rho_r-1$, dann gilt

$$\varphi_\rho^{(\lambda)}=\sum_{i=1}^{h}\varphi_\sigma^{(\lambda)(i)}\,.$$

Beweis. Es gilt

$$r\frac{\partial}{\partial s_r}\Big(\sum_{(\rho)}\varphi_\rho^{(\lambda)}\Gamma_\rho(s)\Big)=\sum_{(\rho)}\varphi_\rho^{(\lambda)}\;r\frac{\partial}{\partial s_r}\Gamma_\rho(s)=r\frac{\partial}{\partial s_r}[\lambda](s).$$

Daraus erhält man

$$\sum_{(\sigma)}\varphi_\rho^{(\lambda)}\;\Gamma_\sigma(s)=r\frac{\partial}{\partial s_r}[\lambda](s),$$

wobei die Summe über alle Klassen (σ) von S_{n-r} mit $\sigma_i = \rho_i$ für $i \neq r$, $\sigma_r = \rho_r - 1$ zu nehmen ist (vgl. Beweis zu 2.5). Daher gilt nach 2.5

$$r \frac{\partial}{\partial s_r} [\lambda](s) = \sum_{i=1}^{h} [\lambda]_i(s) \quad \text{mit} \quad [\lambda]_i(s) = \sum_{(\sigma)} \varphi_\sigma^{(\lambda)(i)} \Gamma_\sigma(s),$$

wobei das Glied $[\lambda]_i(s)$ fehlt, wenn $\lambda_i - r < 0$ ist. Folglich erhalten wir

$$\sum_{(\sigma)} \varphi_\rho^{(\lambda)} \Gamma_\sigma(s) = \sum_{(\sigma)} \left(\sum_{i=1}^{h} \varphi_\sigma^{(\lambda)(i)} \right) \Gamma_\sigma(s).$$

Durch Vergleichen der Koeffizienten von $\Gamma_\sigma(s)$ entsteht folgende Rekursionsformel:

$$\varphi_\rho^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{h} \varphi_\sigma^{(\lambda)(i)} .$$

Dabei ist (ρ) eine Klasse von S_n mit $\rho_r \geqq 1$, (σ) die Klasse von S_{n-r} mit $\sigma_i = \rho_i$ für $i \neq r$, $\sigma_r = \rho_r - 1$.

Beispiel. Die Charaktere von $ES(\lambda) \uparrow S_4$:

$$\varphi_\rho^{(4)} = 1 \quad \text{für alle Klassen von } S_4 .$$

$$\varphi_{(1^4)}^{(3,1)} = \varphi_{(1^3)}^{(3)} + \varphi_{(1^3)}^{(2,1)} = 1 + \varphi_{(1^2)}^{(2)} + \varphi_{(1^2)}^{(1^2)} = 2 + 2\, \varphi_{(1)}^{(1)} = 4$$

$$\varphi_{(1^2,2)}^{(3,1)} = \varphi_{(1^2)}^{(1^2)} = 2\, \varphi_{(1)}^{(1)} = 2$$

$$\varphi_{(1,3)}^{(3,1)} = \varphi_{(1)}^{(1)} = 1$$

$$\varphi_{(2^2)}^{(3,1)} = \varphi_{(2)}^{(1^2)} = 0$$

$$\varphi^{(3,1)}_{(4)} = 0$$

$$\varphi^{(2^2)}_{(1^4)} = 2\,\varphi^{(2,1)}_{(1^3)} = 2\,\varphi^{(2)}_{(1^2)} + 2\,\varphi^{(1^2)}_{(1^2)} = 2+4\,\varphi^{(1)}_{(1)} = 6$$

$$\varphi^{(2^2)}_{(1^2,2)} = 2\,\varphi^{(2)}_{(1^2)} = 2$$

$$\varphi^{(2^2)}_{(1,3)} = 0$$

$$\varphi^{(2^2)}_{(2^2)} = 2\,\varphi^{(2)}_{(2)} = 2$$

$$\varphi^{(2^2)}_{(4)} = 0$$

$$\varphi^{(2,1^2)}_{(1^4)} = 2\,\varphi^{(2,1)}_{(1^3)} + \varphi^{(1^3)}_{(1^3)} = 6+3\,\varphi^{(1^2)}_{(1^2)} = 6+6\,\varphi^{(1)}_{(1)} = 12$$

$$\varphi^{(2,1^2)}_{(1^2,2)} = \varphi^{(1^2)}_{(1^2)} = 2\,\varphi^{(1)}_{(1)} = 2$$

$$\varphi^{(2,1^2)}_{(1,3)} = 0$$

$$\varphi^{(2,1^2)}_{(2^2)} = \varphi^{(1^2)}_{(2)} = 0$$

$$\varphi^{(2,1^2)}_{(4)} = 0$$

$$\varphi^{(1^4)}_{(1^4)} = 24\,, \quad \varphi^{(1^4)}_{(1^2,2)} = \varphi^{(1^4)}_{(1,3)} = \varphi^{(1^4)}_{(2^2)} = \varphi^{(1^4)}_{(4)} = 0.$$

Klasse	(1^4)	$(1^2,2)$	$(1,3)$	(2^2)	(4)
Ordnung	1	6	8	3	6
$\varphi^{(4)}$	1	1	1	1	1
$\varphi^{(3,1)}$	4	2	1	0	0
$\varphi^{(2^2)}$	6	2	0	2	0
$\varphi^{(2,1^2)}$	12	2	0	0	0
$\varphi^{(1^4)}$	24	0	0	0	0

LITERATUR

(1) Boerner, H.: Darstellungen von Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer 1955: 2. Aufl. 1967.

(2) ———: Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Enzyklopädie der math. Wiss. Band I, 1, Heft 6, Teil II. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1967.

(3) Coleman, A. J.: Induced representations with applications to S_n and GL(n). Lecture notes prepared by C. J. Bradley. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, no. 4. Queen's University, Kingston, Ontario, 1966.

(4) Gündüzalp, Y.: Über die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere der symmetrischen Gruppe. Mitt. math. Sem. Univ. Gießen 81, no. 2, 1969.

(5) Murnaghan, F. D.: The theory of group representation. Baltimore 1938. Neuabdruck New York 1963.

(6) ———: The analysis of the direct product of irreducible representations of the symmetric groups. Amer. Journal of Math. 60, 44–65, 1938.

(7) Robinson, G de B.: Representations theory of the symmetric group. University of Toronto Press, Toronto 1961.

ÖZET

Bu çalışmada, simetrik grupların özel bir indirgenebilir gösterimi incelenmiştir. Önce Schur Karakteristiklerinin çarpımının, simetrik grupların sözü edilen gösterimine değgin karakterler yardımıyla ifade edilebileceğini gösteren bir bilinen lemma elde edilmiştir. Bu lemma yardımıyla sözü edilen karakterlerin hesabı için bir rekürsiyon formülü verilmiştir.

Prix de l'abonnement annuel

Turquie : 15 TL ; Étranger : 30 TL.
Prix de ce numéro : 5 TL (pour la vente en Turquie).
Prière de s'adresser pour l'abonnement à : Fen Fakültesi Dekanlığı
Ankara, Turquie.

Ankara Üniversitesi Basımevi - 1972