COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A_1: Mathématiques

TOME 31 ANNÉE : 1982

Beitrag Zum Studium Der Randwertproblemen Fur Polywelleninteg-rodifferential Gleichungen

by

D.L. FERNANDEZ, D. MANGERON
L.E. KRIVOSHEIN, P.T. CRACIUNAS

8

Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara
Ankara, Turquie

Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara

---

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara" est un organe de publication englobant toutes les disciplines scientifiques représentées à la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara.

La Revue, jusqu'à 1975 à l'exception des tomes I, II, III etait compose de trois séries

Série A: Mathématiques, Physique et Astronomie,
Série B: Chimie,
Série C: Sciences Naturelles.

A aprtir de 1975 la Revue comprend sept séries:

Série A_1: Mathématiques,
Serié A_2: Physique,
Série A_3: Astronomie,
Série B: Chimie,
Série C_1: Géologie,
Série C_2: Botanique,
Série C_3: Zoologie.

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible les communications des auteurs étrangers. Les langues Allemande, Anglaise et Française seront acceptées indifféremment. Tout article doit être accompagné d'un resumé.

Les articles soumis pour publications doivent être remis en trois exemplaires dactylographiés et ne pas dépasser 25 pages des Communications, les dessins et figures portés sur les feuilles séparées devant pouvoir être reproduits sans modifications.

Les auteurs reçoivent 25 extraits sans couverture.

l'Adresse : Dergi Yayın Sekreteri,
Ankara Üniversitesi,
Fen Fakültesi,
Beşevler–Ankara

Beitrag Zum Studium Der Randwertproblemen Fur Polywellenintegro-differential Gleichungen

von

D.L. FERNANDEZ (1), D. MANGERON (2)
L.E. KRIVOSHEIN (3) und P.T. CRACIUNAS (4)

ZUSAMMENFASSUNG

Einer der Verfasser hat erstmalig in [1], [2], Randewertprobleme für nichtklassische Polywellenintegrodifferentialgleichungen mit totalen Ableitungen im Sinne von M. Picone [8] aufgestellt und untersucht. Der Prototyp der so erhaltenen Problemen nicht elliptischen Typus ist durch

(1) $\overset{(1)}{M}_m \; [A(x)\overset{(1)}{M}_m u(x) + pB(x)u(x)] + p\,[B(x)\overset{(1)}{M}_m u(x) + C(x)u(x)] = 0,$

(2) $u(x)\;|_{\partial R} = 0, \; \overset{(1)}{M}_m = \partial^m / \partial x_1 \partial x_2, \ldots, \partial x_m, \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_m),$

$R = \{a_i \leq x_i \leq b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m\}$,

oder durch seinen gleichgeltenden variationellen Modellen

$$D\;[f(x)] = \min_f \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_m}^{b_m} A(x)\;[\overset{(1)}{M}_m f(x)]^2\,dx,$$

(3)

$$J\;[f(x)] = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_m}^{b_m} [2B(x)f(x)\overset{(1)}{M}_m f(x) + C(x)f(x)]\,dx = 1,$$

(4) $$f(x)\;|_{\partial R} = 0,$$

oder durch (4) und

$$J^+[f(x)] = \min_f \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_m}^{b_m} [2B(x)f(x)\overset{(1)}{M}_m f(x) + C(x)f(x)]\,dx,$$

---

(1) Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação-IMECC, Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, Campinas, São Paulo, Brasil.

(2) Polytechnisches Institut von Iasi, Iasi, Rumänien. z. Z. IMECC, UNICAMP, BRASILIEN. Der Verf. moche hier seinen herzlichsten Dank an d. FAPESP (Brasil) für d. Grand Nr. 80/1757-2 sowie an. d. IMECC, UNICAMP auszusprechen für die ausgezeichnete Bedingungen offerierten an ihm um seine wissenschaftlichen gemeinsame Arbeiten weiterhin zu entwickeln.

(3) Kirgizian State University. Kirg SSR, UdSSR. Frunze.

(4) Polytechnisches Institut von Iasi, Iasi, Rumänien, Abteilung Math.

(5)

$$D^{+} [f (x) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} A (x) [M_m^{(1)} f (x)]^2 dx = 1$$

gegeben; Das neue bei diesen Problemen besteht unter anderem in der Tatsache, dass das "Rechteck" R m-dimensional, ∂R die Grenze des Gebietes R und $M_m^{(n)} = \partial^{mn} / \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m$, wie schon oben gesagt wurde, die totale Ableitung n-ter Ordnung ist.

In dieser Arbeit sind einige Randwertaufgaben für eine Klasse der nichtlinearen Polywellen-Integrodifferentialgleichungen mit totalen Ableitugen k-ter Ordnung untersucht und die Problemen die das Existenz, Eindeutigkeit und Darstellung der angenäherten Lösungen des betrachteten Randwertproblems (9), (10) betrefft mit Hilfe der Integralgleichungsmethode [2], [3] gelöst, während der erste Verfasser die Verallgemeinerungen der Polywellen - Integro - und nur partiellen Differentialgleichungen in einigen abstrakten Räume als Fortsetzung und interessante Anwendung der Reihe seiner Studien [28], u.a. betrachtet.

1. EINLEITUNG.

Die erstaunlich rasche Entwicklung der Theorie und Praxis der nichtlinearen-Integrodifferentialgleichungen, denen die meis oton Referate und Arbeiten verschiedenen veranstalteten Konferenzen - wie z.B. [13] – [16] – gewidmet waren, match die Festsetzung der Studien in dieser Richtung unentbehrlich.

Da die Charakteristiken der Regelungssysteme mit mehrfacher Ruckkopplung durch gewisse nichtlineare Integrodifferentialgleichungen beschrieben werden [17] und eine Reihe neuer Theorien-wie z.B. die von dem Mitglied der Rumänischen Akademie E. Carafoli aufgestellte Theorie der seitlichen Flussigkeitsstrahlen [18] - sich auf verschiedene Klassen von Integrodifferentialgleichungen stützt [19], [20], haben die Verfasser allein oder gemeinsam mit anderon Mitarbeitor lineare und nichtlineare "polykalorische", "polyharmonische" und "Polywellwenintegrodifferentialgleichungen" höherer Ordnung studiert, qualitativo Eigenschaften und Stabilität der Lösungen verschidener zugehoriger Randwertprobleme untersucht und bei einer Klasse linearisiertor Probleme durch Entwicklung der Greenschen Funktionen nach Fundamentallösungen Spektralzerlesungen gewonnen [21] - [24].

In dieser Arbeit sind einige Randwertaufgaben für eine Klasse der nichtlinearen Polywellenintegrodifferentialgleichungen mit totalen Ableitung im Sinne von M. Picone [8] k-ter Ordnung untersucht und die Probleme die das Existenz-Eindeutigkeit-und Darstellung der angenäherten Lösungen des betrachteten Randwertproblems (9), (10) betreffen mit Hilfe der Intergralgleichungsmethode [2], [3] gelöst.

2. TRANSFORMATION DER POLYWELLENINTEGRODIFFERENTIALGLEICHUNG 2k-TER ORDNUNG.

Die Polywellenintegrodifferentialgleichung 2k-ter Ordnung.

$$(6)\quad \overset{(k)}{M_2}[v\ (\xi,\eta)] = f_1^*(\xi,\eta) + \lambda \iint_{R_1^*} K_1(\xi,\eta;\xi_o,\eta_o) \times f_2^*(\xi_o,\eta_o;\ v\ (\xi_o,\eta_o)\ )\ d\ \xi_o d\eta_o,$$

in der λ ein Parameter, ist $\overset{(1)}{M_2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ bedeutet, die Funktionen f_1^*, K_1, f_2^* in dem Gebiet $(\xi,\eta), (\xi_o,\eta_o) \in R_1^* \equiv [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $\alpha \leq v \leq \beta$,

bekannte stetige Funktionen ihrer Argumente sind und die Funktion f_2^* nichtlinear von $\underline{\vee}$ abhängt, gebt durch die Substitution

$$\xi = (1/2)\ (x+y), \qquad \eta = (1/2)\ (x-y)$$

in die folgende Integrodifferentialgleichung mit Ableitungen höherer Ordnung im Sinne vom Picone [8] über:

$$(7)\ M_2^{(k)}[u\,(x,y)] = F_1(x,y) + \lambda \iint_{R^*} K_2(x,y;t,\tau) \times f\,(t,\tau;u\,(t,\tau))\,dtd\tau.$$

worin

$$(8)\begin{cases} u\ (x,y) \equiv v\,[\tfrac{1}{2}\,(x+y)\ ,\tfrac{1}{2}\,(x-y)\,],\ F_1\ (x,y) \equiv f_1^*[\ \tfrac{1}{2}\,(x+y),\ \tfrac{1}{2}\,(x\text{-}y)\ ], \\ K_2(x,y;t,\tau) \equiv K_1\ [\tfrac{1}{2}\,(x+y),\ \tfrac{1}{2}\,(x-y);\ \tfrac{1}{2}\,(t+\tau),\ \tfrac{1}{2}\,(t-\tau)\ ], \\ f\ (t,\tau;\ u\ (t,\tau)\ ) \equiv f_2^*\ [\tfrac{1}{2}\,(t+\tau),\ \tfrac{1}{2}\,(t-\tau);\ v\ (\tfrac{1}{2}\,(t+\tau),\ \tfrac{1}{2}\,(t-\tau)\ )\ ], \end{cases}$$

$$R^* \equiv [a,c] \times [b,d]$$

ist.

3. DAS DIRICHLETSCHE RANDWERTPROBLEM FUR EINE NEUE KLASSE NICHTLINEARER INTEGRODIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

Es werde das Existenz-und Eindeutigkeitsproblem für die folgende nichtlineare Randwertaufgabe betrachtet:

$$(9)\quad u\ (A)\ |_{\partial R^*} = \varphi_o(A)\ |_{\partial R^*},\ M_2^{(i)*}[u\ (A)\ ]\ |_{\partial R^*} = \varphi_i(A)\ |_{\partial R^*}$$
$$i = (0, 1,..., k\text{-}1)$$

$$(10)\quad M_2^{(2k)}[\ u\ (A)\ ] + \sum_{i=o}^{k-1} \sum_{j=o}^{k-1} B_{ij}(A)\ \frac{\partial^{i+j} u\ (A)}{\partial x^i \partial y^i}$$

$$= f_1[\ A,\ u\ (A)\ ] + \int \int_{R^*} K\ (A,B) \times f\ [B,u)\ ]\ dB,$$

worin $M_2^{(1)} \equiv \partial^2 / \partial x \partial y$ das Symbol der totalen Ableitung erster Ordnung von M. Picone ist; $B_{ij}(A) \equiv B_{ij}(x,y)$, $\varphi_i(A)$, $K\ (A,B)$ für alle $A,\ B \in R^* = [a,c] \times [b,d]$ bekannte stetige Funktionen ihrer Argumente und $dB = d\xi d\eta$, $f_1[A,u\ (A)\ ]$, $f_2[\ [B,u\ (B)\ ]$ für alle $A,B,u \in$ $\in G\{R^*,\ r_1 \leq |u| \leq r_2\}$ bekannte, in allgemeinen nichtlineare Funktionen des zweiten Argumentes sind. ∂R^*ist die Grenze des Gebietes R^*, R_1 ist das durch

$$R_1 = \begin{cases} x = a,\ b \leq y \leq d \\ y = b,\ a \leq x \leq c, \end{cases}$$

gegebene Gebiet und ähnlicher Weise R_2 ist das durch

$$R_2 = \begin{cases} x = c,\ b \leq y \leq d, \\ y = d,\ a \leq x \leq c, \end{cases} \qquad \partial R^* \equiv R_1 + R_2$$

gegebene Gebiet.

Es sei $\Phi\ (A)$ eine bekannte 4k-mal differenzierbare Funktion, die die inhomogenen Randbedingungen (9) befriedigt, und $G\ (A,B)$ die Greensche Funktion [25] des Randwertproblems

$$(10')\quad u\ (A)\ |_{\partial R^*} = 0;\ M_2^{(i)}[u\ (A)\ ]\ |_{R_1} = 0,\ M_2^{(i)}[u\ (A)\ ]\ |_{R_2} = 0,$$
$$M_2^{(2k)}[u\ (A)\ ] = 0, \quad (i = 0,1,...,k-1)$$

wo $G\ (x,\ y;\ \xi,\eta) \equiv G\ (A,B)$ ist.

Aus (9) und (10) erhält man

$$u\ (A) = \Phi\ (A) + \int \int_{R^*} G\ (A,B)\ [f_1\ [B,\ u\ (B)\ ] - s\ u\ (B)\ ]$$
$$(11)\qquad + \int \int_{R^*} K\ (B,\ C)\ f_2[C,\ u\ (C)\ ]\ dC]\ dB$$
$$= \Phi\ (A) - \int \int_{R^*} G\ (A,B)\ S\ [u\ (B)\ ]\ dB + \int \int_{R^*} f_3[A,B,u\ (B)\ ]\ dB,$$

wo

$$f_3[A,B,u\ (B)\ ] \equiv G\ (A,B)\ f_1[B,u\ (B)\ ] +$$

$$(12) \qquad f_2[B,u(B)] \equiv \int\int_{R^*} G(A,C)\, K(C,B)\, dC,$$

$$S[u(B)] = \sum_{i=o}^{k-1} \sum_{j=o}^{k-1} B_{ij}(B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j}$$

ist.

Führen wir die Funktion

$$(13) \qquad \varphi(A) = S[u(A)]$$

ein und wenden den Operator S an, so geht die Gleichung (11) in die Integralgleichung

$$(14) \quad \varphi(A) = \Phi_1(A) + \int\int_{R^*} G_2(A,B)\, \varphi(B) dB + \int\int_{R^*} f_1[A,B,u(B)] dB$$

Uber, worin $\Phi_1(A)$, $G_2(A,B)$ fur alle $A,B \in R^*$bekannte Funktione sind und $f_4[A,B,u(B)^2] \equiv S_A[f_1[A,B,u(B)]]$ ist.

Es sei $\Gamma(A,B)$ der lösende Kern des Kernes $G_2(A,B)$. Damit folgt aus (14)

$$(15) \qquad \begin{aligned} \varphi(A) &= \Phi_1(A) + \int\int_{R^*} f_4[A,B,u(B)] dB + \\ &+ \int\int_{R^*} \Gamma(A,B) [\Phi_1(B) + \int\int_{R^*} f_4[B,C,u(C)] dC] dB \\ &\equiv \Phi_2(A) + \int\int_{R^*} f_5[A,B,u(B)] dB. \end{aligned}$$

Aus (11) und (15) erhält man

$$(16) \qquad u(A) = \Phi_3(A) + \int\int_{R^*} f_6[A,B,u(B)] dB.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Problems (9), (10) sind also auf Grund des klassischen Banachschen Prinzips gesichert, wenn die Funktion $f_6[A,B,u(B)]$ ist Gebiet

$$G = \{R^*, r_1 \leq |u| \leq r_2\}$$

bezuglich des dritten Argumentes einer Lipschtzbedingung mit einem Koeffizienten $\gamma(A,B)$, genugt, der die Ungleichung

$$(17) \qquad \max_{R^*} \int\int_{R^*} \gamma(A,B)\, db < 1$$

erfüllt.

Es gibt der folgende

SATZ 1. Ist $G(A,B)$ die Greensche Funktion des Randwertproblems (10′), 1 kein Eigenwert des Kernes $G_2(A,B)$, $\Gamma(A,B)$ der lösende Kern des Kernes $G_2(A,B)$ und genugt die Funktion $f_6[A,B,u(B)]$ im Gebiet G bezüglich des dritten Arguments einer Lipschitzbedingung mit dem

Koeffizienten γ (A,B), der der Ungleichung (17) genugt, so besitzt die Randwertaufgabe (9), (10) eine eindeutige 4k-mal stetig differenzierbare Lösung, die nach der Methode der suksessiven Approximationen in Sinne von E. Picard-M. Picone construiert werden kann.

4. ANGENÄHERTE LÖSUNG DES RANDWERTPROBLEMS (9), (10) MIT HILFE DER INTEGRALGLEICHUNGSMETHODE.

Da die Lösung des Randwertproblems (9), (10) der Lösung der Integralgleichung (16) gleichwertig ist, lösen wir anstelle des Problems (9), (10) die Integralgleichung (16) und benutzen dazu die vom einer der Verfasser ausgearbeitete Methode der Integralgleichungen [2], [3]. Zu diesen Zweeck betrachten wir die Funktionalhilfsgleichung

$$(18)\quad w\,(A) = \Phi_3(A) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} c_{ij} f_6 [A, (x_i, y_j), w\,(x_i, y_j)\,],$$

$$(x_i, y_j) \in R^*,$$

worin c_{ij} die Koeffizienten der gewählten bekannten Kubaturformeln sind [27].

Schreibt man die Gleichung (18) nacheinander für alle $A = (x_k, y_l) \in R^*$ ($k = 1,2,\ldots, s$; $l = 1,2,\ldots, r$) auf, so erhält man, in Matrix-Vektor-Form geschrieben, das folgende System nichtlinearer Gleichungen:

$$(19)\qquad W = \Phi_4 + T\ (W)$$

Genügt die Norm des Operators T der Ungleichung

$$(20)\qquad ||T|| < 1,$$

so forgen aus (19) unmittelbar Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des systems (19). Folglich ist auch die Funktion w (A) eindeutig bestimmt. Ist die Lösung des Systems (19) nur näherungs - weise bekannt, so bestimmt man auch die Funktion w (A) nur näherungsweise.

Es sei σ_{ij}(($i = 1,2,\ldots, s$; $j = 1,2,\ldots, r$) eine (exakte oder näherungsweise) Lösung des Systems (19). Als Näherungslösung des Problems (9), (10) nimmt man dann die Funktion

$$(21)\quad u_{sr}(A) = \Phi_3(A) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} c_{ij} f_6 [A, (x_i, y_j), \sigma_{ij}].$$

Zur näherungsweisen Bestimmung der Funktion φ (A) benutzt man, wenn der Kern Γ (A,B) unbekant ist, anstelle der Gleichung die vereinfachte Gleichung

$$(22)\quad \bar{\varphi}(A) = \Phi_1(A) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} c_{ij}G_2(A,(x_i,y_j))\,\bar{\varphi}(x_i,y_j) + \psi[A,\bar{u}]$$

in der

$$\Psi[A,u] = \int\int_{R^*} f_4[A,B,\bar{u}(B)]\,dB$$

ist. Wenn die Ungleichung

$$(23)\qquad \det\left(c_{ij}G_2(x_\alpha,y_\beta),(x_i,y_j)\right) \neq 0$$

erfüllt ist, kann man aus (22 (zunächst $\bar{\varphi}(x_i, y_j)$ bestimmen und erhält dann

$$(24)\quad \bar{\varphi}(A) = \Phi_{sr}(A) + \int\int_{R^*} f_7[A,B,\bar{u}(B)]\,dB,$$

we $\Phi_{sr}(A)$ und $f_7[A,B,\bar{u}(B)]$ bekannte Funktionen ihrer Argumente sind.

Durch Substitution von (24) in (11) erhält man die Integralgleichung

$$\begin{aligned} z_{sr}(A) &= \Phi_{sr}(A) + \int\int_{R^*} f_3[A,B,z_{sr}(B)]\,dB - \\ (25)\quad &\int\int_{R^*} G(A,C)\left[\Phi_{sr}(C) + \int\int_{R^*} f_7[C,B,z_{sr}(B)]\,dB\right] dC \\ &\equiv \Psi_{sr}(A) + \int\int_{R^*} f_8[A,B,z_{sr}(B)]\,dB, \end{aligned}$$

die die näherungsweise Bestimmung der Lösung $z_{sr}(A)$ gestattet.

Aus (25) ersieht man, dass die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $z_{sr}(A)$ bei Gültigkeit der Ungleichungen

$$(26)\quad |f_6[A,B,v_2(B)] - f_8[A,B,v_1(B)]| \leq l(A,B)\,|v_2(B) - v_1(B)|,$$

$$(27)\qquad \max_{R^*} \int\int_{R^*} l(A,B)\,dB < 1$$

gesichert ist, wobei $\{v_1, v_2B\} \in G$ und l (A,B) die Lipschitz-"Konstante" ist.

Falls die Ungleichungen (26) und (27) bestehen, kann die Funktion $z_{sr}(A)$ nach dem Picardschen-Picones Verfahren der schrittweisen Annäherung verbessert werden. Gelten die Ungleichungen (26), (27) nicht, betrachten wir eine reduzierte Gleichung der Form

$$u_{sr}(A) = \Psi_{sr}(A) + \sum_{\alpha=1}^{\upsilon} \sum_{\beta=1}^{\lambda} C_{\alpha\beta} f_2 [A, (x_\alpha, y_\beta), u_{sr}(x_\alpha, y_\beta)], (x_\alpha, y_\beta) \in R^*.$$

Dan stellt man wie oben das System

$$u_{sr}(x_i, y_j) = \psi_{sr}(x_i, y_j) + \sum_{\alpha=1}^{\upsilon} \sum_{\beta=1}^{\lambda} c_{\alpha\beta} f_8 [A, (x_\alpha, y_\beta), u_{sr} (x_\alpha . y_\beta)]$$

$$(\alpha = 1,2,\ldots, \nu;\ \beta = 1,2,\ldots, \lambda)$$

auf, bestimmt zuerst (exakt oder angenähert) die Werte $u_{sr}(x_\alpha, y_\beta)$ und anschliessend die Näherungslösung $\bar{u}_{sr}(A)$ des Problems (9), (10). Es gelten folgende Sätze:

SATZ 2. Wenn 1. das Randwertproblem (9), (10) in R^* eine eindeutige 4k-mal stetig differenzierbare Lösung besitzt, 2. Γ (A,B) der lösende Kern des Kernes G_2(A,B) ist und 3. die Ungleichung (20) gilt, dann ist die gesuchte Näherungslösung des bettrachteten Randwertproblems durch den Ausdruck (21) gegeben

SATZ 3. Wenn 1. das Randwertproblem (9), (10) in R^*eine eindeutige 4k-mal stetig differenzierbare Lösung besitzt und 2. die Ungleichungen (23), (26), (27) gelten, dann kann man eine Näherungslösung des betrachteten Randwertproblems in der Form

(28) $$\bar{u}_{sr}(A) = \Psi_{sr}(A) + \int\int_{R^*} f_8 [A,B, w_{sr}(B)] \, dB$$

gewinnen, worin $w_{sr}(A)$ die (exakte oder angenäherte) Lösung der Integralgleichung

(29) $$v (A) = \Psi_{sr}(A) + \int\int_{R^*} f_8 [A,B,v (B)] \, dB$$

ist, die mit der gleichen wie die Lösung von (19) konstruiert werden kann.

BEMERKUNGEN.

1°. In einigen Arbeiten der Verfasser, die in "Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova" veröffentlicht wurden [26] und verschiedene Randwertprobleme für Polywellenintegrodifferentialgleichungen betreffen, wurde ein anderer Weg zur Lösung des problems (9), (10) angegeben. Es wurden verschiedene spezielle Aufgaben, die die Eigenschaften des Kernes K (A,B), wie z.B.

$$K(A,B) \equiv \begin{cases} K_1(A,B) \not\equiv 0, & a \leq t \leq x;\ b \leq \tau \leq y, \\ 0, & x \leq t,\ y \leq \tau, \end{cases}$$

betreffen, gelöst. In [27] hat man eine neue einheitliche Theorie ausgearbeitet, die verschiedene Klassen der eliptischen, hypebolischen und parabolischen partiellen Differentialgleichgungen höherer Ordnung vereiningt.

2°. In einer vorigen Arbeit eines der Verfasser in Zusammenhang mit dem bedauersweise verstorbenelm Kollege G. Miltzlaff waren die Differentiationsregel einer Fredholmschen Determinante sowie ihrer Minoren nach einem Parameter abgeleitet. Forner war eine Relation hergeleitet, die zwischen den Fredholmschen Minoren zweiter Ordnung eines komponieter Kernes uns seiner Komponenten besteht. Einige Anwendungem dieser Ergebnisse werden in einer der spateren Arbeiten dargestellt.

3°. Trotz der Tatsache, dass die obere Darstellung zu dem klassischen Muster gehört, es lohnt sich aus ebenfalls der Fall der Randwertaufgaben die die Integrodifferentialgleichungen mit Operatoren höherer Ordnung $M^{(2k+1)}$betreffen grundsätzlich zu studieron, während das Studium dieser Art der Probleme vom abstrakten Standpunkte aus findet man in dem "Bulletin der Technischen Hochschule zu Iasi – Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy" [28].

LITERATUR

[1] **D. Mangeron,** a) Nuovi problemi al contorno. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, (4) 2, 29-40 (1932; b) Nuovi problemi al contorno non lineari. Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. fis. mat. nat., 16, 305-310 (1932)'

[2] **D. Mangeron,** Integral equations method in nonlinear Mechanics' IUTAM Proc. nonlinear Mechanics of vibrations Inst. of Math. Ukrain. Acad. Sci., Kiev; 4 p., 1961).

[3] **D. Mangeron,** Neue graphisch-analytische Methoden zum Studiem der nichtlinearen Schwingungen, Abh. Deutschen Akad. Wiss. zu Berlin. III. Konferenz Über nichtlineare Schwingungen, I. 76-90 (1964).

[4] **M.N. Ogustoreli,** Some problems concerning Mangeron polyvibrating equations. Conference on functional equations. The Univ. of Waterloo, Abstracts, 15-16 (1970).

[5] **S. Easwaran,** Problems concerning Mangeron equations of higher order. Doctoral Dissertation. Dept. of Math., The University of Alberta, 1972.

[6] **C.M. Nielsen,** Applications of D. Mangeron's Theorem. S.I.A.M. Annual Congress, Atlanta, Georgia, Abstracts, 11-12 (1976).

[7] **G. Birkhoff; W. Gordon.** On the draftsmen and related equations. J. Approx. Theory, 1, 199-208 (1968).

[8] **M. Picone, a) Mauro Picone** in d. Band "Duodecin Doctorum Viromum Vitae at Operum Notitia". Pontificia Academia Scientiarum, Citta del Vaticano, 118-146 (1972); b) La mia vita, Academia Naz. dei Lincei, 1971; c) Nuevi metodi di calcolo delle soluzione delle equazioni alle derivate parziali della Fisica Matematica. Ann. Sci. Univ. Jassy, Sect. I, 26, 183-232(1940)

[9] **K.V. Leung, T. Musuraliev** & al. Problèmes à la frontière aux autocontroles concernant une classe d'èquations intègrodifferentièlles aux opērateurs hyperboliques. Bull. Univ. Galati, 1, Fauc. II, 7-14 (1976).

[10] **W. Gordon,** Automated Design of free form surfaces. General Motors Research Series, Warren, Michigan, 1968.

[11] **A. Kutanov, D. Salandi** & al.Contributions to the study of Mangeron equations. Bul. Inst. politechn, Iasi, N.S., 24, 1-2, 11-16 (1974).

[12] **G. Birkhoff,** Piecewise Interpolation and Approximation in Polygon in d. Band "Approximations with special Emphasis on Spline Function Academic Press, New York, 165-211, 1969.

[13] **F. Calogero, Editor,** Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform. Pitman, London, San Francisco, Melbourne. Research Notes in Mathematics 26, XVII + 257 p. (1978).

[14] **R.J. KNOPS, Editor,** Nonlinear Analysis and Mechanics Heriot-Watt Symposium, Vols. I-IV, Pitman, London, San Francisco, Lelbourne, Research Notes in Mathematics 17, 27, 30, 39, 1977.

[15] **CL. L. Simionescu, I. Benko,** Editors, Proceedings of the Internations Symposium on Applications of Mathematics in System Theory. Dec. 27, 30, 1978. The University of Brasov, Vols. I, II.

[16] The Fifth World Congress of the Theory of Machines and Mechanisms Proceedings, Vols. 1-2, July 9-13, 1979, CONCORDIA University, Montreal, P.Q. CANADA.

[17] **R. Reissig,** Über die Arbeiten der Abteilung "Nichtlineare Mechanik und Regelungstheorie". III. Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, Berlin 25. -30.5. 1964. Akademie - Verlag. Berlin (1965).

[18] **E. Carafoli,** The theory of lateral fluid jets. Revue Roumaine Sci. Techn. Mec. appl., 14, 11, 637-841 (1962).

[19] **D. Mangeron,** a) Methodes nouvelles d'approximation des solutions de certains problemes aux limites non linéaires relatifs aux équation intégro-differentielles aux derivées partielles. Colloque d'approximation des fonctions, avec applications au calcul numérique. Institul de Calcul, Cluj 15-19. XI. 1963; b) On the theory and applications of polyawve or polyvibrating equations, I. Memoirs of the Sci. Sect. of the Romanian Academy, Series IV, Vol. I, 9-75 (1977-1978).

[20] **D. Mangeron, L.E. Krivoshein.** Solutions computing of various integro-differential systems of Mathematical Physics. Romanian J. Applied Mechanics, 9, 1964, 1195-1221; 10, 1965, 3-34 a.o.

[21] **P. Craciunas, D.L. Fernandez, A.M. Krall and L.E. Krivoshein,** Problémes d'autocontrôle concernant une classe α'equations non linéaires aux opérateurs héréditaires et polyvibrants d'ordre supérieur. Bulletin of the University of Galati (nachgeschickt).

[22] **D.L. Fernandez, L.E. Krivoshein, D. Mangeron, M. Shimbo,** Sur la résolution des systémes aux autocontrôles qui généralisent les équations non linéaires d'evolution. (nachgeschickt.)

[23] **D.L. Fernandez, AM. Krall, L.E. Krivoshein, D. Mangeron,** Goursat-Darboux problems concerning certain nonlinear systems with polyvibrating and hereditary operators and self-control in the limits of integration (nachgeschickt).

[24] **D. Mangeron,** Toward an unified of polyvibrating polycaloric and polyharmonic equations. Proc. Romanian Congress of Mathematicians. Vol. II, May 27-June 4, 1956, Bucharest.

[25] **D. Mangeron, L.E. Krisvohein,** Problemi al contorno per svariati integro-differenziali. Rend. Sem. Mat. Padova, 33, 1963, 226-266; 34, (1964), 344-368; 35, (1965), 341-368.

[26] **A.M. Krall,** The development of general differential and general differential boundary systems. Rockey Mt. J. Math. 5, (1975), 493-542.

[27] **D.V. Ionescu.** Les formules de quatreture généralisées. Ann. Sci. Univ. Al. I. Cuza de Jassy, Îasi Sect. I, 28, (1974), 151-159.

[28] **D.L. Fernandez,** Interpolation of 2^n Banach spaces, Bull. Polytechn Inst., Jassy, Section I.

ÖZET

Bu çalışmada yazarlardan birine ait integral denklem yöntemiyle [2] lineer olmayan bir çoklu-dalga integrodiferensiyel denklem sınıfı için bir sınır değer problemi ele alınmıştır.