COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A_1 : Mathématiques

TOME : 32 ANNÉE : 1983

Aspects De L'Homotopie Concrete

by

Georges HOFF

3

Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara
Ankara, Turquie

Communications de la Faculté des Sciences
de l'Universite d'Ankara

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara" est un organe de publication englobant toutes les diciplines scientifique représentées à la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara.

La Revue, jusqu'à 1975 à l'exception des tomes I, II, III etait composé de trois séries

Série A : Mathématiques, Physique et Astronomie,
Série B : Chimie,
Série C : Sciences Naturelles.

A partir de 1975 la Revue comprend sept séries:

Série A_1 : Mathématiques,
Série A_2 : Physique,
Série A_3 : Astronomie,
Série B : Chimie,
Série C_1 : Géologie,
Série C_2 : Botanique,
Série C_3 : Zoologie.

A partir de 1983 les séries de C_2 Botanique et C_3 Zoologie ont été réunies sous la seule série Biologie C et les numéros de Tome commencerons par le numéro 1.

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté des Sciences de l'Universiteé d'Ankara. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible les communications des auteurs étrangers. Les langues Allemande, Anglaise et Française seront acceptées indifféremment. Tout article doit être accompagnés d'un resume.

Les articles soumis pour publications doivent être remis en trois exemplaires dactylographiés et ne pas dépasser 25 pages des Communications, led dessins et figures portes sur les feuilles séparées devant pouvoir être reproduits sans modifications.

Les auteurs reçoivent 25 extraits sans couverture.

l'Adresse : Dergi Yayın Sekreteri,
Ankara Üniversitesi,
Fen Fakültesi,
Beşevler – Ankara
TURQUIE

Aspects De L'Homotopie Concrete

Georges HOFF

(Recu le 25, Octobre, 1982; Accepté le 6 Jonvier, 1983)

INTRODUCTION

On trouve des situations homotopiques (homotopie, fibrations, cofibrations,...) dans des cadres divers. Les homotopies des espaces topologiques ou des ensembles simpliciaux sont maintenant classiques. On retrouve les mêmes préoccupations pour d'autres structures, dans d'autres catégories.

On a donc besoin d'un point de vue global, c'est l'objet de l'algébre homotopique.

Dans les théories abstraites de l'homotopie, on considère une catégorie munie de classes de morphismes (nommés fibrations, cofibrations, équivalences faibles) et/ou d'une relation d'équivalence entre morphismes (nommée homotopie) vérifiant un certain nombre d'axiomes. On a une bonne situation quand on a une catégorie modèle (au sens de Quillen).

Le point de vue que nous adoptons est plus concret sans être moins général. Partant d'une situation homotopique dans une catégorie donnée, le but n'est pas de forcer la situation à devenir "modèle" mais de l'étudier telle qu'elle est. Les axiomes, s'ils sont vérifiés, sont alors résultats de théorèmes.

Une situation homotopique dans une catégorie consiste en la donnée de fibrations, de cofibrations et/ou d'une relation d'homotopie. De manière concrète, ces données peuvent etre le fait de systèmes d'homotopie (au sens de Kan), i.e. de foncteurs "chemin" ou "cylindre", ou d'une famille de morphismes via la catégorie de fractions et les propriétés de relèvement.

Dans le présent article, nous resterons dans une catégorie donnée $\mathcal{C}$ supposée sans propriété particulière.

1. FRACTIONS ET RELEVEMENTS.

Si $\mathcal{M}$ est une classe de morphismes de $\mathcal{C}$, on définit la *catégorie de fractions* de $\mathcal{C}$ pour $\mathcal{M}$ comme étant la catégorie $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ qui a les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et qui est munie d'un foncteur $Q: \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{M}$ préservant les objets et vérifiant les propriétés suivantes;

(FR 1) pour chaque $m \in \mathcal{M}$, le morphisme $Q(m)$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}/\mathcal{M}$;

(FR 2) si $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur tel que $F(m)$ est un isomorphisme pour chaque $m \in \mathcal{M}$, alors il existe un unique foncteur $G: \mathcal{C}/\mathcal{M} \to \mathcal{D}$ tel que $F = GQ$.

La propriété universelle (FR 2) implique l'unicité du couple $(\mathcal{C}/\mathcal{M}, Q)$ à une équivalence près. Son existence, donnée dans [4], est prouvée en détail dans [1].

Cette situation permet de définir une relation d'homotopie dans $\mathcal{C}$.

Définition 1.1. Deux morphismes f et g de $\mathcal{C}$ sont dits *$\mathcal{M}$-homotopes*, et on note $f \underset{\mathcal{M}}{\simeq} g$, si on a $Q(f) = Q(g)$. On dira que f est une *$\mathcal{M}$-équivalence d'homotopie* s'il existe un g tel que fg et gf soient homotopes aux identités.

Cette relation d'équivalence entre morphismes a les propriétés usuelles des homotopies (voir [1]).

Théorème 1.2. a) *Tout isomorphisme de $\mathcal{C}$ est une équivalence d'homotopie.*

b) *Soient* f_1g, f_2g, hf_1, hf_2 *des composés dans* $\mathcal{C}$, *alors on a*

$$f_1 \underset{\mathcal{M}}{\simeq} f_2 \Rightarrow f_1g \underset{\mathcal{M}}{\simeq} f_2g \quad \text{et} \quad hf_1 \underset{\mathcal{M}}{\simeq} hf_2$$

c) *Si des morphismes* f *et* g *de* $\mathcal{C}$ *sont égalisés ou coégalisés par un élément de* $\mathcal{M}$*, alors ils sont* $\mathcal{M}$ *-homotopes.*

Remarque. Deux classes distinctes peuvent déterminer la même relation d'homotopie. On trouvera dans [1] une étude de ce problème considérant les classes $\mathcal{M}$ pour lesquelles la $\mathcal{M}$- homotopie est la même que celle déterminée par la classe des $\mathcal{M}$-équivalences d'homotopie. Une telle classe est dite *stable* et est caractérisée par le fait que le foncteur Q est épic. i.e. étant donné $\bar{f} \in \mathcal{C}/\mathcal{M}$ (A, B) il existe un $f \in \mathcal{C}$ (A, B) tel que Q (f) $= \bar{f}$. Alors deux familles stables distinctes déterminent des notions d'homotopie distinctes. Mais il est des $\mathcal{M}$-homotopies qui ne peuvent être obtenues à partir d'une famille stable.

La notion de relévement permet par ailleurs à $\mathcal{M}$ de définir des notions de fibration et de cofibration.

Définition 1.3. Un morphisme p: A $\to$ B (resp. i: A $\to$ B) de $\mathcal{C}$ est appelé *$\mathcal{M}$- fibration* (resp. *$\mathcal{M}$-cofibration*) si étant donnés un morphisme m: U $\to$ V dans $\mathcal{M}$ et deux morphismes f: V $\to$ B et f': U $\to$ A (resp. g: B $\to$ V et g': A $\to$ U) de $\mathcal{C}$ tels que pf' $=$ fm (resp. gi $=$ mg'), alors il existe un morphisme f'': V $\to$ A (resp. g'': B $\to$ U) tel que pf'' $=$ f et f'' m $=$ f' (resp. g'' i $=$ g' et mg'' $=$ g).

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "m"'] & A \arrow[d, "p"] \\ V \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "f''"] & B \end{tikzcd} \qquad \text{(resp.} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "i"'] & U \arrow[d, "m"] \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "g''"] & V \end{tikzcd} \quad)$$

On dit souvent que p (resp. i) a la propriété de relévement à droite (resp. à gauche) relativement à $\mathcal{M}$ quand p (resp. i) est une $\mathcal{M}$-fibration (resp. cofibration). Notre définition, moins générale que celle de [1], coincide avec celle-ci quand $\mathcal{M}$ est une famille de monomorphismes scindés (resp. d'épimorphismes scindés) ce qui sera le cas dans les sections suivantes. Elle a l'avantage de se relier à d'autres études. Pour une catégorie modèle au sens de [11] on a une caractérisation du fait qu'elle est une catégorie modèle fermée à l'aide de propriétés de relèvement entre les classes de morphismes de base (voir [12]). On trouvera une axiomatisation de la théorie des relèvements de ce point de vue dans [13]. L'utilisation des "lifting properties" rejoint aussi des travaux comme ceux sur les systèmes de factorisation (voir [2]).

Les fibrations et cofibration ainsi définies ont les propriétés classiques (voir [13]).

Théorème 1.4. a) *Tout isomorphisme est une fibration (resp. cofibration).*

b) *Les fibrations (resp. cofibrations) sont stables par composition.*

c) *Les fibrations (resp. cofibrations) sont stables par changement de base (resp. de cobase).*

d) *Les fibrations (resp. cofibrations) sont stables par rétracts.*

Remarque. On peut comparer les notions de fibrations déterminées par des classes distinctes grâce à la remarque suivante. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux classes de morphismes de $\mathcal{C}$ et si tout $m \in \mathcal{M}$ est rétract d'un $n \in \mathcal{N}$, alors toute $\mathcal{N}$-fibration est une $\mathcal{M}$-fibration. On a bien sûr un résultat analogue pour les cofibrations. Signalons anfin que deux classes peuvent déterminer la même notion d'homotopie et des notions différentes de fibrations (et vica versa).

Exemples. Avec des choix convenables de classes de morphismes, on retrouve dans *Top* les fibrations de Hurewicz ou celles de Serre, dans Δ-*Ens* les fibrations de Kan, dans $\mathcal{C}$*at* nos fibrations de [6] ou dans une catégorie abélienne les i-fibrations de Kleisli ([9]). De même, Quillen ([11]) montre qu'on obtinet aussi les cofibrations standard ou les cofibrations triviales de Δ-E*ns*...

2. CYLINDRES

Kan ([8]) a défini la notion de *système d'homotopie* décrivant le fait que l'homotopie entre morphismes est définie à l'aide de cylindres.

Un *foncteur cylindre* dans $\mathcal{C}$ est la donnée d'un foncteur $Z\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et de transformations naturelles $\beta\colon 1_{\mathcal{C}} \to Z$, $\tau\colon 1_{\mathcal{C}} \to Z$ et $\pi\colon Z \to 1_{\mathcal{C}}$ telles que

(CY) $\pi\beta = \pi\tau = \mathrm{id}\colon 1_{\mathcal{C}} \to 1_{\mathcal{C}}$.

Une telle donnée permet de définir une relation d'homotopie.

Définition 2.1 Si A et B sont deux objets de $\mathcal{C}$, on dit que f et g $\in \mathcal{C}(A, B)$ sont Z-homotopes, et on note $f \underset{Z}{\simeq} g$, s'ils sont dans la même classe modulo la relation d'équivalence engendrée par: $f \sim g$ si, et seulement si il existe un morphisme $h: ZA \to B$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\beta A"'] \arrow[dr, "f"] & \\ ZA \arrow[rr, "h"] & & B \\ & A \arrow[ul, "\tau A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Si la relation $\sim$ est réflexive, de par (CY), ce n'est pas en général une relation d'équivalence. On trouvera dans [10] des conditions sur système pour que $\sim$ soit symétrique et transitive.

Remarque. La relation $\sim$, et donc la relation $\underset{Z}{\simeq}$, est compatible avec la composition des morphismes. On a donc une catégorie, la catégorie de Z-homotopie de $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}_Z$, avant les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les classes de Z-homotopie de morphismes de $\mathcal{C}$ et un foncteur canonique H_Z: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_Z$.

Théorème 2.2 *Soit* $\mathcal{M}$ *une classe de morphismes de* $\mathcal{C}$. *Supposons que* $H_Z(m)$ *soit un isomorphisme pour tout* $m \in \mathcal{M}$, *alors on a:*

$$f \underset{\mathcal{M}}{\simeq} g \quad \Rightarrow \quad f \underset{Z}{\simeq} g$$

Démonstration. La propriété (FR2) implique l'existence d'un foncteur G: $\mathcal{C}/\mathcal{M} \to \mathcal{C}_Z$ tel que $H_Z = GQ$ et si l'on a $Q(f) = Q(g)$, on a alors $H_Z(f) = H_Z(g)$.

Si l'on a un foncteur cylindre, celui-ci fournit des notions de fibrations et de cofibrations. On notera $\mathcal{M}_Z$ (resp. $\mathcal{M}^Z$) la classe des morphismes $\beta X: X \to ZX$ (resp. πX: $ZX \to X$).

Proposition 2.3. *Tout monomorphisme (resp. épimorphisme) de* $\mathcal{C}$ *est une* $\mathcal{M}^Z$*-fibration (resp.* $\mathcal{M}_Z$*-cofibration).*

Démonstration. Soit f un monomorphisme. On considère le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} ZX \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\pi X"'] & A \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

Posons $g'' = g' \beta X$. On a $fg'' = fg' \beta X = g\pi X \beta X = g$. D'autre part $fg'' \pi X = fg' \beta X \pi X = g \pi X = fg'$ et comme f est un monomorpfisme on a $g'' \pi X = g'$. Le morphisme f est donc une $\mathcal{M}^Z$–fibration. Si f est un épimorphisme, on considère le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\beta X"] \\ B \arrow[r, "g"] & ZX \end{tikzcd}$$

Posant $g'' = \pi Xg$, on a $g'' f = g'$ et $\beta X g'' f = gf$ et comme f est un épimorphisme on a $\beta X g'' = g$. Le morphisme f est donc une $\mathcal{M}_Z$-cofibration.

Définition 2.4. Un morphisme de $\mathcal{C}$ est appelé Z- *fibration* (resp. Z- *cofibration*) si c'est une $\mathcal{M}_Z$- fibration (resp. $\mathcal{M}^Z$- cofibration).

Les classes de morphismes $\mathcal{M}^Z$ et $\mathcal{M}_Z$ déterminent à leur tour une homotopie via les catégories de fractions Q^Z: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{M}^Z$ et Q_Z: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{M}_Z$ qui leur sont associées.

Théorème 2.5. *Soient* f *et* g *deux morphismes de* $\mathcal{C}$, *alors on a:*

$$f \underset{Z}{\simeq} g \;\Rightarrow\; f \underset{\mathcal{M}^Z}{\simeq} g \;\Leftrightarrow\; f \underset{\mathcal{M}_Z}{\simeq} g$$

Démonstration. a) Montrons d'abord la seconde équivalence. Pour tout $\pi X \in \mathcal{M}^Z$, on a $Q_Z(\pi X)\, Q_Z(\beta X) = Q_Z(\pi X \beta X) = 1_{Q_Z(X)}$. Alors $Q_Z(\beta X)$ étant un isomorphisme puisque $\beta X \in \mathcal{M}_Z$, le morphisme $Q_Z(\pi X) = Q_Z(\beta X)^{-1}$ est un isomorphisme. Par conséquent il existe un unique G_1: $\mathcal{C}/\mathcal{M}^Z \to \mathcal{C}/\mathcal{M}_Z$ tel que $G_1 Q^Z = Q_Z$. On démontre de même qu'il existe un unique G_2: $\mathcal{C}/\mathcal{M}_Z \to \mathcal{C}/\mathcal{M}^Z$ tel que $G_2 Q_Z = Q^Z$. On aura donc $Q^Z(f) = Q^Z(g)$ si, et seulement si $Q_Z(f) = Q_Z(g)$.

b) Soient f, g $\in \mathcal{C}(A,B)$ tels que $f \underset{Z}{\simeq} g$. Supposons qu'il existe un morphisme h tel que le diagramme suivant sout commutatif

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\beta A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
ZA \arrow[rr, "h"] & & B \\
& A \arrow[ul, "\tau A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

(i. e. $f \sim g$ au sens de 2.1.). Dans $\mathcal{C}/\mathcal{M}^Z$ on a $Q^Z(\pi A)\, Q^Z(\beta A) = Q^Z(\pi A)\, Q^Z(\tau A) = 1Q^Z(A)$ et donc, $Q^Z(\pi A)$ étant un isomorphisme puisque $\pi A \in \mathcal{M}^Z$, les morphismes $Q^Z(\beta A)$ et $Q^Z(\tau A)$ sont des isomorphismes tels que $Q^Z(\beta A) = Q^Z(\pi A)^{-1} = Q^Z(\tau A)$. Par conséquent on a $Q^Z(f) = Q^Z(h)\, Q^Z(\beta A) = Q^Z(h)\, Q^Z(\tau A) = Q^Z(g)$ d'ou $f \underset{\mathcal{M}^Z}{\simeq} g$. En général, on a une suite finie de morphismes $g_1, f_1, g_2, \ldots, f_n$ de $\mathcal{C}$ tels que $f \sim g_1$, $f_1 \sim g_1$, $f_1 \sim g_2, \ldots, f_n \sim g$; on applique alors le raisonnement précédent à chaque étape et on obtient encore $f \underset{\mathcal{M}^Z}{\simeq} g$.

Théorème 2.6. *On a la réciproque*

$$f \underset{\mathcal{M}^Z}{\simeq} g \Rightarrow f \underset{Z}{\simeq} g$$

si et seulement si $H_Z(\pi X)$ *est inverse à droite de* $H_Z(\beta X)$ *pour tout* X.

Démonstration. Si on a $H_Z(\beta X)\, H_Z(\pi X) = 1_{H_Z(ZX)}$, comme on a toujours $\pi X \beta X = 1_X$, alors $H_Z(\pi X)$ est un isomorphisme. Ceci étant pour tout $\pi X \in \mathcal{M}^Z$, si on a $f \underset{m^Z}{\simeq} g$ alors on a $f \underset{Z}{\simeq} g$ de par le théorème 2.2

Réciproquement, comme 1_{ZX} et $\beta X \pi X$ sont $\mathcal{M}^Z$-homotopes, car coégalisés par $\pi X \in \mathcal{M}^Z$ et en vertu du théorème 1.2.c., par hypothèse ils seront Z- homotopes.

Exemples. L'exemple le plus connu de foncteur cylindre est celui qui a déterminé cette terminologie, à savoir, dans $\mathcal{T}op$, le foncteur Z: $X \to X \times [0, 1]$. Les Z-fibrations sont alors les fibrations de Hurewicz et les cofibrations sont les applications continues i: $A \to B$ telles que pour toute application continue $\varphi: A \to [0, 1]$, il existe une application $\Psi: B \to [0, 1]$ telle que $\varphi = \Psi \circ i$. La Z-homotopie est l'homotopie usuelle.

Remarque. Certaines notions de cofibrations définies au moyen du cylindre ne se retrouvent pas ici. C'est le cas par exemple, dans $\mathcal{T}op$. des cofibrations définies en généralisant la propriété d'extension des homotopies. On les récupèrera de manière naturalle dans la section 4.

3. CHEMINS

La situation duale de celle des systèmes d'homotopie est celle des *systèmes de cohomotopie* utilisant la notion de chemin.

Un *foncteur chemin* dans $\mathcal{C}$ est la donnée d'un foncteur P: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et de transformations naturelles $\alpha: P \to 1_{\mathcal{C}}$, w: $P \to 1_{\mathcal{C}}$ et $\varkappa: 1_{\mathcal{C}} \to P$

telles que

(PA) $\alpha\varkappa = w\varkappa = \mathrm{id}: 1_{\mathcal{C}} \to 1_{\mathcal{C}}$.

Il est clair que se donner un foncteur chemin dans $\mathcal{C}$ revient à se donner un foncteur cylindre dans la catégorie duale de $\mathcal{C}$. Ici encore, on a une relation d'homotopie.

Définition 3.1. Si A et B sont deux objects de $\mathcal{C}$, on dit que f et g $\in \mathcal{C}(A, B)$ sont P- *homotopes*, et on note $f \underset{P}{\simeq} g$, s'ils sont dans la même

classe modulo la relation d'équivalence engendrée par: $f \sim g$ si, et seulement si il existe un morphisme h: $A \to PB$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
& B & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g"'] & & PB \arrow[ul, "\alpha B"'] \arrow[dl, "\omega B"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Un foncteur chemin fournit à son tour fibrations et cofibrations. On notera $\mathcal{M}_P$ (resp. $\mathcal{M}^P$) la classe des morphismes $\varkappa X$: X $\rightarrow$ PX (resp. αX: PX $\rightarrow$ X).

Définition 3.2. Un morphisme de $\mathcal{C}$ est appelé P-*fibration* (resp. P-*cofibration*) si c'est une $\mathcal{M}_P$- fibration (resp. $\mathcal{M}^P$-cofibration).

Par dualité, on retrouve pour ces notions des propriétés semblables à 2.2., 2.3. et 2.5, 2.6

Exemples. Dans $\mathcal{T}op$ on a le foncteur chemin bien connu qui donne encore l'homotopie usuelle. Dans certaines catégories, par exemple $\mathcal{C}at$ (Voir [5] et [6]), ou l'on n'a pas de foncteur cylindre commode, on a quand même une notion de chemin qui permet d'y développer une théorie d'homotopie. Le type de fibrations que nous considérions dans [6] est plus faible que celle qui est fournie par le foncteur chemin de $\mathcal{C}at$ (tout comme dans $\mathcal{T}op$, du point de vue des cylindres, les fibrations de Serre sont plus faibles que celles de Hurewicz).

Remarque. Ici encore, certaines notions de fibrations définies à l'aide des chemins ne se caractérisent pas par une propriété de relèvement. C'est le cas dans [7] et pour les fibrations catégoriques de [5] Nous les retrouverons dans la section 4.

La dualité entre cylindre et chemin se précise dans des situations d'adjonction comme nous l'allons voir ci dessous.

4. ADJONCTION

Le résultat suivant a été donné par [3] dans l'étude de la longeur homotopique des objets d'une catégorie comme invariant homotopique.

Théorème 4.1. *Si* Z *est un foncteur cylindre dans* $\mathcal{C}$ *et si* P *est un adjoint à droite de* Z, *alors* P *est un foncteur chemin dans* $\mathcal{C}$ *et la* P-*homotopie coincide avec la* Z-*homotopie.*

Démonstration. Soit η: $\mathcal{C}$ (A, PB) $\rightarrow$ $\mathcal{C}$(ZA, B) la bijection naturelle donnée par l'adjonction. Si β, τ et π sont les transformations naturelles données avec Z, pour chaque objet A de $\mathcal{C}$, on pose α A$=\eta$ (1_{PA}) βPA, wA $= \eta$ (1_{PA}) τ PA et $\varkappa$A $= \eta^{-1}$ (πA). Ceci définit des transformations naturelles $\alpha, w \colon P \to 1_{\mathcal{C}}$ et $\varkappa \colon 1_{\mathcal{C}} \to P$ faisant de P un foncteur chemin. Soient f et $g \in \mathcal{C}(A, B)$, s'il existe un morphisme $h \colon A \to PB$ tel que $\alpha Bh = f$ et $w\, Bh = g$, alors le morphisme $\eta(h) \colon ZA \to B$ est tel que $\eta\,(h)\,\beta A = f$ et $\eta\,(h)\,\tau A = g$. Ceci implique que si f et g sont P-homotopes, alors ils sont Z-homotopes. La réciproque se démontre de la même manière à l'aide de η^{-1}.

Cette situation est celle que l'on a dans $\mathcal{T}op$ avec les foncteurs cylindre et chemin usuels. L'adjonctiun permet d'obtenir des propriétés nouvelles. En particulier le foncteur Z (resp. P) préserve coégalisateurs et coproduits (resp. égalisateurs et produits); selon la terminologie de [3] on dit alors que le système est *fidèle*. Nous considérons ici cette situation surtout parce qu'elle va nous permettre d'introduire de nouveaux types de fibrations et cofibrations attachées à des foncteurs chemin et cylindre.

Théorème 4.2. *Sous les hypothèses de* 4.1. *on a :*

(i) $p \colon A \to B$ *est une Z-fibration si, et seulement si, étant donnès* $g' \colon X \to A$ *et* $g \colon X \to PB$ *tels que* $pg' = \alpha Bg$, *il existe* $g'' \colon X \to PA$ *tel que* $\alpha Ag'' = g'$ *et* $Ppg'' = g$.

(ii) $i \colon A \to B$ *est une* P-*cofibration si, et seulement si, étant donnés* $g' \colon B \to X$ *et* $g \colon ZA \to X$ *tels que* $g'i = g\beta A$, *il existe* $g'' \colon ZB \to X$ *tel que* $g''\,\beta B = g'$ *et* $g''\,Zi = g$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[dr, dashed, "g''"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& PA \arrow[r, "\alpha A"] \arrow[d, "Pp"] & A \arrow[d, "p"] \\
& PB \arrow[r, "\alpha B"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta A"] \arrow[d, "i"'] & ZA \arrow[d, "Zi"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
B \arrow[r, "\beta B"] \arrow[drr, bend right, "g'"'] & ZB \arrow[dr, dashed, "g''"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Donnons la preuve de (i), l'assertion (ii) s'en déduisant par dualité.

a) Soit $p \colon A \to B$ une Z-fibration. Etant donnés g et g' tels que $pg' = \alpha Bg$, l'adjonction nous donne alors $pg' = \eta(g)\,\beta X$. Comme p est une Z-fibration, il existe un $\bar{g} \colon ZX \to A$ avec $p\,\bar{g} = \eta(g)$ et $\bar{g}\beta X = g'$. Soit alors $g'' = \eta^{-1}(\bar{g})$, ona $Ppg'' = Pp\eta^{-1}(\bar{g}) = \eta^{-1}(p\bar{g}) = \eta^{-1}(\eta(g)) = g$ et $\alpha Ag'' = \alpha A\eta^{-1}(\bar{g}) = \bar{g}\beta X = g'$. La condition de (i) est donc satisfaite. b) Soit p: $A \mapsto B$ vérifiant la condition de (i). Considérons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta X"'] & A \arrow[d, "p"] \\ ZX \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

En posant $g = \eta^{-1}(f)$ et $g' = f'$, on a $pg' = pf' = f\beta X = \alpha B\eta^{-1}(f) = \alpha Bg$ et alors il existe g'': $X \mapsto PA$ tel que $\alpha Ag'' = g'$ et $Ppg'' = g$. Soit alors $f'' = \eta(g'')$: $ZX \mapsto A$, on a alors $pf'' = p\eta(g'') = \eta(Ppg'') = \eta(g) = \eta(\eta^{-1}(f)) = f$ et $f''\beta X = \eta(g'')\beta X = \alpha Ag'' = g' = f'$. Ce qui signifie que p est une Z- fibration.

Dans les conditions de (i) et (ii), nous retrouvons les définitions dont nous signalions l'absence dans les sections précédentes. On reconnait dans (ii) la définition de fibrations topologiques bien connues et dans (i) celle des fibration catégoriques considérées par Golasinski ([5]). Il en va de même pour les fibrations (resp. cofibrations) définies par un système de cohomotopie (resp. d'homotopie) dans [7].

REFERENCES

[1] **F.W. Bauer, J. Dugundji:** *Categorical homotopy and fibrations.* Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1969), 239-256.

[2] **A. K. Bousfield:** *Construction of factorization systems in categories.* J. of Pure and Appl. Alg. 9 (1977), 207-220.

[3] **B. Eckmann, P. J. Hilton:** *Group-like structures in general categories.* Math. Ann. 151 (1963), 150-186.

[4] **P. Gabriel, M. Zisman:** *Calculus of fractions and homotopy theory.* Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgeb. 35 (1967), Springer ed.

[5] **M. Golasinski:** *Teoria homotopii w kategoriach.* Inst. Mat. Uniw. M. Kopernika, Torun, Preprint 2 (1977).

[6] **G. Hoff:** *Categorical homotopy.* Quaest. Math. 2 (1977), 419-432.

[7] **K.H. Kamps:** *Faserungen und Cofaserungen in Kategorien mit Homotopie system.* Dissertation, Univ. des Saarlandes, Saarbrücken (1968).

[8] **D. Kan:** *Abstract homotopy II.* Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 42 (1956), 255-258.

[9] **H. Kleisli:** *Homotopy theory in abelian categories.* Canada J. Math. 14 (1962), 139-169.

[10] **R. Lavendhomme:** *Sur l'ensemble des systemes d'homotopie d'une categorie.* Ann. Soc. Sc. Bruxelles 81 (1967), 119-135.

[11] **D. Quillen:** *Homotopical algebra.* Lecture Notes in Math. 43 (1967), Springer ed.

[12] **D. Quillen:** *Rational homotopy.* Ann. of Math. 90 (1969), 205-295.

[13] **R. Ruiz:** *The closure of a model category.* Rev. Colombiana de Mat. 11 (1977), 19-50.

Département de Mathématiques
Centre Scientifique et Polytechnique
Université Paris-Nord
Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse