



# Journal of Turkish Operations Management

## Gerçek zamanlı iki serbestlik dereceli eksiksiz döner ters sarkaç sisteminin kutup atama ile kontrolü

Servet Soygüder<sup>1\*</sup>, Mustafa Teoman Özler<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Endüstri Mühendisliği Bölümü, Ankara Yıldırım Beyazıt Üniversitesi, Ankara  
e-mail: ssoyguder@ybu.edu.tr, ORCID No: <http://orcid.org/0000-002-8191-6891>

<sup>2</sup>Makine Mühendisliği Bölümü, Fırat Üniversitesi, Elazığ  
e-mail: mozler@firat.edu.tr, ORCID No: <http://orcid.org/0000-0003-3486-4838>

\*Sorumlu Yazar

### Makale Bilgisi

#### Makale Geçmişi:

Geliş: 26.03.2021  
Revize: 03.05.2021  
Kabul: 08.05.2021

#### Anahtar Kelimeler:

Eksik tahrikli sistem,  
Furuta döner ters sarkaç,  
Matematiksel model,  
Kutupsal yerleştirme metodu

### Özet

Mühendislik problemlerinin çözümünde ve hareket analizlerinin yapılmasında eksik tahrikli iki serbestlik dereceli döner ters sarkaç mekanizması sıkça kullanılan bir mühendislik sistemidir. Bu ve benzeri sarkaç sistemleri üzerinde yapılan çalışmalar ve analizler günümüz teknolojisinde araba, uçak, uzaysal araçlar, savunma araçları, füze rampasından insan yürüyüşüne, yük taşıyan robotlardan depreme dayanıklı bina tasarımlarına kadar vb. birçok sistemin tasarım ve denetim algoritmalarının oluşturulmasında bilim adamlarına ışık tutmuştur. Eksik tahrikli iki serbestlik dereceli döner ters sarkaç mekanizması diğer adıyla Furuta ters sarkaç, kontrol mühendisliğinde kullanılan en önemli temel sistemlerden biridir. Bu çalışmada ilk olarak sistem için matematiksel model oluşturulmuştur. Bu denklemleri ifade eden dinamik denklemler Lagrange metodu ile elde edilmiştir. Döner ters sarkaç doğrusal olmayan (Nonlinear) bir sistemdir. Elde edilen denklemlerin lineerleştirilmesi (Doğrusallaştırılması) yapılarak durum-uzay modeli elde edilmiştir. Durum-uzay modeli ile sisteme ait durum denklemleri ve durum değişkenleri elde edilmiştir. Bulunan bu verilerle sistemin kontrol analizi gerçekleştirilmiştir. Daha sonra gerçek zamanlı Furuta döner ters sarkaç için kutup atama (PP) kontrol algoritması tasarlanarak gerçek sistem üzerinde denetimleri başarılı olarak yapılmıştır. Sonuç olarak tasarlanan ve uygulanan bu kontrol metodu ve performansı irdelenerek gerekli kontrol analizi gerçekleştirilmiş ve sonuçlar elde edilmiştir.

## Control with pole assignment of real-time two-degree-of-freedom underdriven rotating inverted pendulum system

### Article Info

#### Article History:

Received: 26.03.2021  
Revised: 03.05.2021  
Accepted: 08.05.2021

#### Keywords:

Deficient system,  
Furuta rotating inverted pendulum,  
Mathematical model,  
Pole placement method

### Abstract

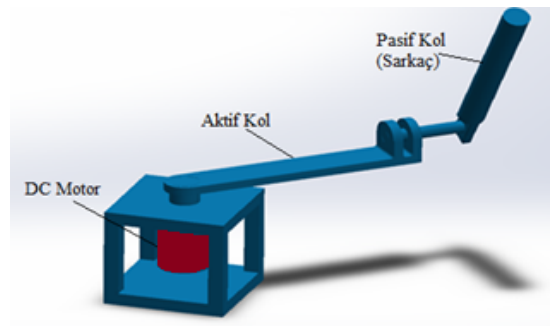
Two degrees of freedom deficient rotating inverted pendulum mechanism is frequently used in the solution of engineering problems and motion analysis. Studies and analyzes on these and similar pendulum systems are used in today's technology such as cars, planes, spacecraft, defense vehicles, missile launchers, human walking, load bearing robots, earthquake resistant building designs, etc. has shed light on scientists in the design and control algorithms of many systems. The two-degree of freedom deficient rotating pendulum mechanism, also called Furuta inverted pendulum, is one of the most important basic systems used in control engineering. In this study, firstly, a mathematical model was created for the system. Dynamic equations expressing these equations were obtained by Lagrange method. The rotating inverted pendulum is a nonlinear system. Linearization of the obtained equations was done and state-space model was obtained. State equations and state variables of the system were obtained with the state-space model. Control analysis of the system was carried out with these data. Then, the pole assignment (PP) control algorithm for the Furuta rotating pendulum in real time was designed and successfully controlled on the real system. As a result, this control method and its performance was designed and applied to examine the necessary control analysis and the results were obtained.

## 1. Giriş

Son yıllarda sarkaç sistemleri üzerinde birçok çalışmalar yapıldı. Sarkaçların birbirinden farklı birçok örnekleri bulunmaktadır. Bunlardan; Furuta, Okutani ve Sone (1978) tarafından yapılmış olan çift ters sarkaç, Furuta, Yamakita ve Kobayashi (1992) tarafından yapılmış olan ters sarkaç, Yoshida (1999) tarafından yapılmış olan arabalı-ters sarkaç, Aström ve Furuta (2000) tarafından yapılmış olan döner tek kollu sarkaç, Li, Miao, ve Wang, (2002) tarafından yapılmış olan dört kollu ters sarkaç, Shen ve arkadaşları (2004) tarafından yapılmış olan küresel sarkaç ve Tsai ve Shen (2007) tarafından yapılmış olan paralel tipte çift ters sarkaçtır.

Literatürde sarkaç sistemleri üzerine yapılan çalışmalarda; Komine ve arkadaşları (2004), döner çift kollu ters sarkaç için sistemin doğal frekansını kullanarak kutup atamasına dayanan kontrol stratejisini önermiştir. Aynı zamanda hızlanma ve rotasyonun geri bildirim ile gerçekleştirildiğini göstermişlerdir. Kontrol yöntemi, sarkacın doğal frekansına yakın olduğu kararsız kutupların atanmasından türetilmiştir. Önerilen yöntemin etkinliği deney ile doğrulanmıştır. Xu ve Duan (2002), tek yönlü tersine çevrilmiş bir sarkaç ve matematiksel modelini sunmaktadır. Tek yönlü tersine çevrilmiş bir sarkaç için sırası ile LQR ve kutup yerleştirme uygulanmıştır. Simülasyon ve gerçek zamanlı kontrol sonuçları karşılaştırılmıştır. Mathew ve arkadaşları (2013), döner ters sarkaç (RIP) kontrolü için hızlanma ve enerji bazlı bir kontrol cihazı önermiştir. Enerji bazlı kontrolde sarkacın dik pozisyonundaki değerine eşit olacak şekilde bir kontrol yapılmıştır ve bunun için kayan kipli denetleyici (SMC) tasarlanmıştır. İkinci olarak, sarkacın dik durmasını ve bozulmayı belirli bir noktaya kadar giderilmesini sağlayacak bir durum geri besleme kontrol cihazı tasarlanmıştır. Durum geri besleme denetleyicisi, doğrusal ikinci dereceden düzenleyici (LQR) kullanılarak tasarlanmıştır. Daha sonra (LQR) ve (SMC) kontrolörün cevapları simülasyonda karşılaştırılmıştır. Hassanzadeh ve Mobayen (2011), genetik algoritmalar (GA), parçacık sürüsü optimizasyonu (PSO) ve karınca kolonisi optimizasyonu (ACO) yöntemleri de dahil olmak üzere, döner ters sarkaç (RIP) kontrolör tasarımı için evrimsel yaklaşımları sunmuşlardır. Önerilen yöntemlerin, benzer doğrusal olmayan çeşitli sistemlerin kontrolü için ümit verici olduğunu belirtmişlerdir. Rahimi ve arkadaşları (2013), döner Ters Sarkaç (RIP) kontrolör tasarımı için parçacık sürüsü optimizasyon yaklaşımını sunmaktadır. Simülasyon sonuçları, önerilen denetleyici tasarım yönteminin etkinliğini göstermektedir ve çeşitli benzer doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü için alternatif yol olarak düşünülmektedir. Shojaei ve arkadaşları (2011), döner ters sarkaç için bir tekrarlayan sinir ağma ve PID denetleyicisine dayanan kontrol cihazı önermektedir. Kontrolörün amacı, sarkaç açısını sabitlemek için kontrol stratejisini belirlemektir. RNN kontrol cihazı ve PID kontrol cihazı tarafından kontrol edilen döner ters sarkaç, detaylı olarak analiz edilmiştir ve doğrusal olmayan bir model için kontrol tasarımını yönlendirebilen genetik algoritma (GA) kullanarak RIP'i stabilize etmek için bir araştırma konusu sunulmuştur. Anvar ve arkadaşları (2010), döner ters sarkaç sisteminin dengelenmesi için genetik algoritma tabanlı durum geri besleme kontrolü ve kayan kipli denetleyicisi (SMC) birleştirilmiştir. Sarkaç yukarı çevrildikten sonra, önerilen kayma modu kontrolü etkinleştirilir ve sarkaç dik konumda sabitlenir. Önerilen denetleyiciyi uygulamanın deneysel sonuçları SMC'ye kıyasla daha yüksek bir performans göstermektedir.

Bu çalışmanın konusu olan Furuta ters sarkacı ilk olarak Furuta ve arkadaşları (1978) tarafından 1992 yılında yayımlanan makalede önerilmiştir. Furuta döner ters sarkacı, sistemlerin temellerini ve teorilerini öğretmek amacı ile makine mühendisliğinde, mekatronik mühendisliğinde ve kontrol mühendisliğinde eğitim ve araştırma amaçlı kullanılan sistemlerden biridir. Birçok mühendislik alanında uygulanmasıyla karşımıza çıkan sarkaç teknolojisi günümüzde insansız robotlarda, roketlerde, uçaklarda ve deprem ölçüm cihazlarında sıkça kullanılmakta olup genel olarak sistemlerin dengeleme problemlerinde çözüm için kullanılmaktadır. İki serbestlik derecesine sahip olan Furuta döner ters sarkaç sistemi tek tahrikli bir mekanizmaya sahip olduğundan eksik tarihli mekanik sistemler sınıfında değerlendirilir. Eksik tahrikli bir mekanik sistem olması Furuta döner ters sarkaç sisteminin kontrol edilebilirliğini zorlaştırmakta olduğu gibi döner ters sarkacı kararsız ve doğrusal olmayan bir yapıya da büründürmektedir.

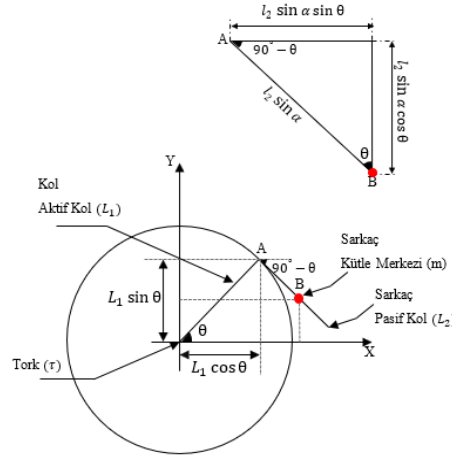


### Şekil 1. Döner ters sarkaç

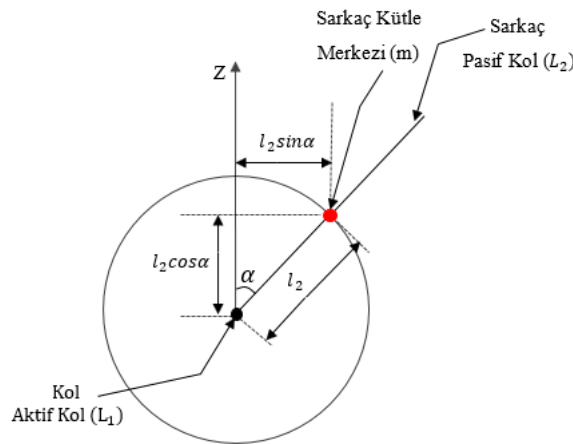
Şekil 1’den anlaşılacağı üzere pasif kolun (sarkacın) hareketi herhangi bir kısıtlayıcı elaman olmadan aktif kola bağlıdır ve bu hareket aktif kolun diğer ucuna bağlı olan DC servo motordan verilmektedir. DC servo motordan alınan tahrik ile aktif kol yer düzlemine paralel olan eksende dönme hareketi yaparken pasif kol (sarkaç) yer düzlemine dikey olan eksen üzerinde dönme hareketi yapar. Furuta döner ters sarkaç sistemi için bu çalışmada amaç, sarkacı dikey eksende dik olarak, dış kuvvetler etkisi altındayken tasarlanan kutup atama ile dengelemektir.

## 2. Sistemin Modellenmesi

Furuta döner ters sarkaç sisteminin matematiksel modellenmesinde sisteminin hareketi büyük önem taşımaktadır. Sistemin hareketi verilen tork’ un yönüne bağlı olarak 2 farklı biçimde gerçekleştirilebilir. Bunlardan birincisi motorun bağlı olduğu aktif kola saat yönünde tork uygulanmasıdır. Bu durumda aktif kol saat yönünde (cw) dönme hareketi yapar pasif kol (sarkaç) ise saat yönünün tersi yönünde dönme hareketi yapar. İkincisi ise, motorun bağlı olduğu aktif kola saatin ters yönünde tork uygulanmasıdır. Bu durumda aktif kol saatin ters yönünde (cw) dönme hareketi yapar pasif kol (sarkaç) ise saat yönünde dönme hareketi yapar. Bu belirtilen iki durumdan ikinci durum için döner ters sarkaç sistemi modellenmiştir. Bu modellenmenin açık ve belirgin bir biçimde gerçekleşmesi için Şekil 2 ve Şekil 3 oluşturulmuştur. Burada Şekil 2 sarkacın ve kolun yatay düzlemdeki iz düşümünü belirtirken Şekil 3 ise sarkacın dikey izdüşümünü belirtmektedir.



Şekil 2. Sarkacın ve kolun yatay düzlemde iz düşümü



Şekil 3. Sarkacın dikey izdüşümü

Şekil 2 de ve Şekil 3 de aktif kolun tam boyunu ' $L_1$ ' uzunluğu, sarkacın tam boyunu ise ' $L_2$ ' uzunluğu belirtmektedir. Aktif kolun sarkaca bağlandığı noktadan sarkaç kütle merkezine kadar olan uzunluğa ' $l_2$ ' denilmiştir. ' $L_1$ ' koluna iletilen tork ile ' $L_1$ ' kolunun dönüşü saat yönünün tersi yönünde gerçekleşmektedir. Bu dönme sonucunda ' $L_1$ ' kolunun x eksenine ile yaptığı açı ' $\theta$ ' ile gösterilmiştir. ' $L_1$ ' kolunun dönüşü, sarkacın saat yönünde dönüşüne sebep olur ve z eksenine ile ' $\alpha$ ' kadarlık açısal değişim gözlemlenir.

Ters sarkacın kütlesi olarak belirlenmiş ' $m$ ' kütlesi için orijine göre genel koordinatları Şekil 2 ve Şekil 3 dikkate alınarak yazılacak olur ise aşağıdaki gibidir.

$$X_m = L_1 \cos \theta + l_2 \sin \alpha \sin \theta \quad (1)$$

$$Y_m = L_1 \sin \theta - l_2 \sin \alpha \cos \theta \quad (2)$$

$$Z_m = l_2 \cos \alpha \quad (3)$$

Aktif kol için kinetik enerji ' $T_1$ ', sarkaç için yani pasif kol için kinetik enerji ' $T_2$ ' ve pasif kol için potansiyel enerji ' $V$ ' bulunacak olur ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m V_m^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\alpha}^2 \quad (5)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m [L_1^2 \dot{\theta}^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + l_2^2 \dot{\alpha}^2 - 2L_1 l_2 \dot{\theta} \cos \alpha \dot{\alpha}] + \frac{1}{2} J_2 \dot{\alpha}^2 \quad (6)$$

$$V = m g l_2 \cos \alpha \quad (7)$$

Sistemin toplam kinetik enerjisi aşağıdaki gibidir.

$$T = T_1 + T_2 \quad (8)$$

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m L_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l_2^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} m l_2^2 \dot{\alpha}^2 - m L_1 l_2 \dot{\theta} \cos \alpha \dot{\alpha} \quad (9)$$

Matematiksel modelleme için Lagrange metodu kullanılır ise Furuta döner ters sarkaç sistemi için Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right) = Q_\theta \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) + \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} \right) = Q_\alpha \quad (11)$$

Burada aktif koldaki viskoz sürtünme ' $B_m$ ', pasif koldaki viskoz sürtünme ' $B_s$ ' ve dissipatif fonksiyon ' $D$ ' ile ifade edilmiştir. Furuta döner ters sarkaç sistemi için Lagrange fonksiyonu ve matematiksel modelin birinci ve ikinci denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$L = T - V \quad (12)$$

$$L = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m L_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l_2^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} m l_2^2 \dot{\alpha}^2 - m L_1 l_2 \dot{\theta} \cos \alpha \dot{\alpha} - m g l_2 \cos \alpha \quad (13)$$

$$J_1 \ddot{\theta} + m L_1^2 \ddot{\theta} + m l_2^2 \ddot{\theta} \sin^2 \alpha + 2 m l_2^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} - m L_1 l_2 \cos \alpha \ddot{\alpha} + m L_1 l_2 \sin \alpha \dot{\alpha}^2 = \tau - B_m \dot{\theta} \quad (14)$$

$$J_2 \ddot{\alpha} + m l_2^2 \ddot{\alpha} - m L_1 l_2 \cos \alpha \ddot{\theta} - m l_2^2 \dot{\theta}^2 \sin \alpha \cos \alpha - m g l_2 \sin \alpha = -B_s \dot{\alpha} \quad (15)$$

## 2.1. Doğrusallaştırma

Furuta döner ters sarkaç sistemi için değişken parametreler ve değişken parametrelerin başlangıç koşullarının belirtildiği genel doğrusallaştırma denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$Z^T = [\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}] \quad (16)$$

$$Z_0^T = [0,0,0,0,0,0] \quad (17)$$

$$F_{lin}(\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, \ddot{\theta}, \ddot{\alpha}) = F_{lin}(z) = F(z_0) + \frac{\partial F(z)}{\partial \theta} \Big|_{z=z_0} (\theta - 0) + \frac{\partial F(z)}{\partial \alpha} \Big|_{z=z_0} (\alpha - 0) + \frac{\partial F(z)}{\partial \dot{\theta}} \Big|_{z=z_0} (\dot{\theta} - 0) + \frac{\partial F(z)}{\partial \dot{\alpha}} \Big|_{z=z_0} (\dot{\alpha} - 0) + \frac{\partial F(z)}{\partial \ddot{\theta}} \Big|_{z=z_0} (\ddot{\theta} - 0) + \frac{\partial F(z)}{\partial \ddot{\alpha}} \Big|_{z=z_0} (\ddot{\alpha} - 0) \quad (18)$$

Matematiksel modelin denklemleri olan Denklem 14 ve 15, ayrı ayrı 'z' fonksiyonu olarak tanımlanıp denklem 18'deki formül uygulanırsa Furuta döner ters sarkaç sisteminin doğrusallaştırılmış denklemleri aşağıdaki gibi oluşmaktadır.

$$(J_1 + mL_1^2)\ddot{\theta} - (mL_1l_2)\ddot{\alpha} = \tau - B_m\dot{\theta} \quad (19)$$

$$-(mL_1l_2)\ddot{\theta} + (J_2 + ml_2^2)\ddot{\alpha} - (mg l_2)\alpha = -B_s\dot{\alpha} \quad (20)$$

## 2.2. Durum uzay modeli

Denklem 19 ve 20'den döner ters sarkaç sistemine ait durum uzay denklemleri elde edilecek olur ise aşağıdaki gibidir.

$$\det[K] = (J_1J_2) + J_1ml_2^2 + J_2mL_1^2 \quad (21)$$

$$A = \frac{1}{\det[K]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (m^2g L_1l_2^2) & -(J_2B_m + ml_2^2B_m) & -(mL_1l_2B_s) \\ 0 & (J_1mg l_2 + m^2g l_2L_1^2) & -(mL_1l_2B_m) & -(J_1B_s + mL_1^2B_s) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$B = \frac{1}{\det[K]} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (J_2 + ml_2^2) \\ (mL_1l_2) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Burada 'A', 'B', 'C' ve 'D' sırası ile Furuta döner ters sarkaç sistemi için sistem matrisini, giriş matrisini, çıkış matrisini ve ileribesleme matrisini ifade etmektedir. Döner ters sarkaç sisteminin kutup atama ile kontrolör tasarımı yapılacaktır. Bu tasarım gerçekleştirilmeden önce sistemin deneysel olarak gözlemleneceği unutulmamalıdır. Bu durumda Furuta döner ters sarkaç sistemine ait fiziksel parametreleri içeren durum uzay denklemleri belirtilmelidir.

Furuta döner ters sarkaç sistemine ait uzunluk, kütle atalet momenti, kütle, doğal frekans, sönüm katsayısı, yerçekimi ve sönüm oranı aşağıdaki tablo 1'de verilmiştir.

**Tablo 1.** Furuta döner ters sarkacın parametreleri ve sistemin belirlenen değerleri

Semboller	Sistemin Belirlenen Değerleri	Birimler
$J_2$	0,0012	Kg m <sup>2</sup>
$J_1$	9,9829 x 10 <sup>-4</sup>	Kg m <sup>2</sup>
$L_2$	0,3365	m
$L_1$	0,2159	m
$l_2$	0,1556	m
$m$	0,1270	Kg
$\omega_n$	4	Rad /sn
$B_s$	0,0024	Nms/rad

$B_m$	0,0024	Nms/rad
$g$	9,81	$m/s^2$
$\zeta$	0.7	–

Denklem 22 ve 23'deki oluşturulmuş durum-uzay matrislerinde Tablo 1'de verilen fiziksel parametreler yerine konulursa sistem matrisi, giriş matrisi, çıkış matrisi ve ileribesleme matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 81.4033 & -45.8259 & -0.9319 \\ 0 & 122.0545 & -44.0966 & -1.3972 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 83.4659 \\ 80.3162 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

### 3. Kontrolör Tasarımı ve Analizi

#### 3.1 Furuta döner ters sarkaç sistemi için kontrol edilebilirlik

Kontrol sistemlerinin tasarlanmasında kutup yerleştirme ile kontrol çok eski bir geçmişe ve önemli bir yere sahiptir. Kutup yerleştirme ile kontrolün temel uygulanabilirlik şartı sistemin kontrol edilebilir bir sistem olmasıdır. Kısaca bir kontrol sistemi kontrol edilebilir bir sistem ise kutup yerleştirme tasarımı yapılabilir eğer bir sistem kontrol edilebilir değil ise kutup yerleştirme ile kontrol gerçekleştirilemez denilmektedir. Bu durumda Furuta döner ters sarkaç sisteminin kontrol edilebilirlik matrisi elde edilecek olursa aşağıdaki gibidir.

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]_{n \times nr} \quad (30)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 83,4659 & -3899,7466 & 188781,8957 \\ 0 & 80,3162 & -3792,7802 & 187067,7944 \\ 83,4659 & -3899,7466 & 188781,8957 & -9134173,5792 \\ 80,3162 & -3792,7802 & 187067,7944 & -9048936,7581 \end{bmatrix} \quad (31)$$

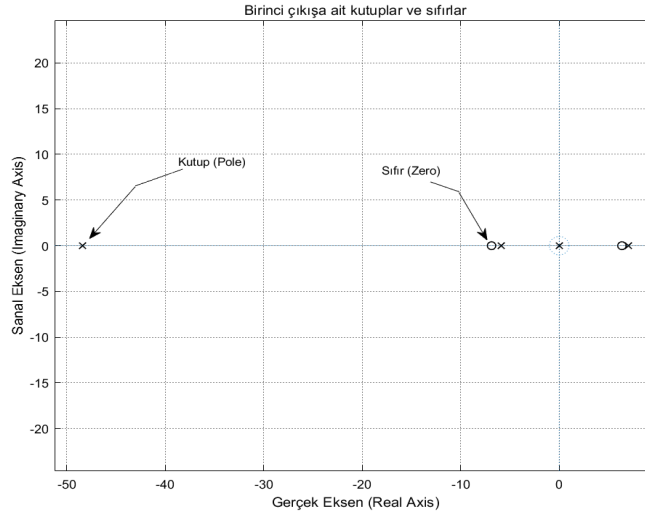
$$\det[S] = 85910381353,05 \quad (32)$$

Det [S]≠0 çıkmadığından dolayı rankı tam rank yani 4 olarak bulunur ve sistem kontrol edilebilir bir sistem olduğunu kanıtlamıştır.

#### 3.2 Furuta döner ters sarkaç sisteminin karakteristik denklemi ve kutupları

Kontrol stratejisinin oluşturulmasında ve tasarımın yapılmasında yardımcı olması için kullanılacak Furuta döner ters sarkaç sisteminin karakteristik denklemi ve kutupları matlab paket programında durum uzay denklemlerinin tanıtılıp çözümlenmesiyle aşağıdaki denklem 33 ve şekil 4'deki gibi bulunmuştur.

$$s^4 + 47,22 s^3 - 99,12 s^2 - 2004 s = 0 \quad (33)$$



Şekil 4. Furuta döner ters sarkaç sisteminin kutupları ve sıfırları

Şekil 4 de görüldüğü üzere sıfırlar '-6.8668' ve '6.3664' şeklindedir. Sistemin kutupları '0', '-48.4124', '7.0576' ve '-5.8652' görülmektedir. Kutup sayısı ve sıfır sayısı eşit olması gerekirken iki tane sıfır görülmektedir. Grafikte görülmeyen iki sıfır ise sonsuzdadır. Kutuplardan bir tanesi görüldüğü üzere sanal eksenin sağ tarafında kaldığından dolayı sistem stabil değildir. Sistemin kontrolü gerçekleştirilirken bu durum göz önüne alınarak sistem kontrolü yapılmıştır.

### 4.3. Furuta döner ters sarkaç sisteminin kutup atma ile kazanç değerlerinin eldesi

Kontrol edilebilir sistemlerin kontrol edilebilir kanonik biçimi (KKB) bilgisinden yararlanarak Furuta döner ters sarkaç sisteminin ( $A^* - B^*K^*$ ) Öz değerleri bulunacak olur ise aşağıdaki gibidir.

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2004 & 99.12 & -47.22 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$|sI - A^* + B^*K^*| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ k_1 & -2004 + k_2 & -99.12 + k_3 & s + 47.22 + k_4 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$|sI - A^* + B^*K^*| = s^4 + (k_4 + 47.22)s^3 + (k_3 - 99.12)s^2 + (k_2 - 2004)s + k_1 \quad (37)$$

Denklem 37 de bulunan her bir karakteristik denklem katsayısına bir tek bağımsız düştüğünden öz değerlerin keyfi yerleştirilebileceği açıktır. Burada ' $A^*$ ' sistem matrisinin kontrol edilebilir kanonik biçimini ' $B^*$ ' ise giriş matrisinin kontrol edilebilir kanonik biçimini ifade etmektedir. Ayrıca  $k_1, k_2, k_3$  ve  $k_4$  kanonik biçimde ifade edilmiş geribesleme kazançlarıdır. Kanonik biçimde ifade edilmiş geri besleme kazançları olan  $k_1, k_2, k_3$  ve  $k_4$ 'ün reel değerlerini bulmadan önce sistemin stabil olmadığı unutulmamalıdır. Bu durumda sistemin doğal frekansından ve sönümlemesinden yararlanarak sistemi stabil yapan karakteristik denklem elde edilerek, her iki karakteristik denklem eşleştirmesi ile kanonik biçimdeki geribesleme kazançları bulunur ise uygun bir tasarım yapılmış olur. Sönüm ve doğal frekans cinsinden ifade edilmiş karakteristik denklemin kutupları bulunacak olur ise aşağıdaki gibidir.

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (38)$$

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_d \quad (39)$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_d \quad (40)$$

$$\omega_d = \omega_n * \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (41)$$

$$\omega_d = 4 * \sqrt{1 - (0.7)^2} = 2.86 \quad (42)$$

$$p_1 = -2.8 + j2.86 \quad (43)$$

$$p_2 = -2.8 - j2.86 \quad (44)$$

Burada  $p_1$ ' ve  $p_2$ ' baskın eşlenik kutupları ' $\omega_d$ ' ise sönümlü doğal frekansı ifade etmektedir. Döner ters sarkaç sisteminin 4 kutuplu olduğu daha önce bulunmuştu. Buna göre ' $p_1$ ' ve ' $p_2$ ' baskın eşlenik kutuplara ek olarak iki kutup daha eklenmesi gerekmektedir. Bu eklenen kutuplar baskın köklerden daha baskın olamayacak, sistemin kararlılığını bozmayacak ve en önemlisi sistemin stabil olmasını sağlayacak olan kutuplar olmalıdır. Rastgele seçilecek kutuplar sanal eksenin sol tarafında '-30' ve '-40' olur ise sistem kararlı ve stabil olacaktır. Belirlenen kutuplar doğrultusunda sistemin karakteristik denklemi elde edilecek olur aşağıdaki gibidir.

$$(s + 40)(s + 2.8 - j2.86)(s + 2.8 + j2.86)(s + 30) \quad (45)$$

$$s^4 + 75.6 s^3 + 1608 s^2 + 7840s + 19200 \quad (46)$$

Denklem 45 ve Denklem 46 bulunan her iki karakteristik denklemin katsayıları eşitlenir ise kanonik biçimdeki geribesleme kazanç değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$K^* = [19200 \ 9844 \ 1707.12 \ 29.34] \quad (47)$$

Denklem 47 de bulunmuş olunan bu kanonik biçimdeki geri besleme kazanç değerleri sisteme direk girilirse hata vermektedir kanonik biçimden tekrardan normal biçime çevrilmesi gerekmektedir. O halde kanonik biçimdeki geri besleme kazanç değerleri kanonik biçime dönüşüm matrisinin tersi ile çarpılır ise geri besleme kazanç değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

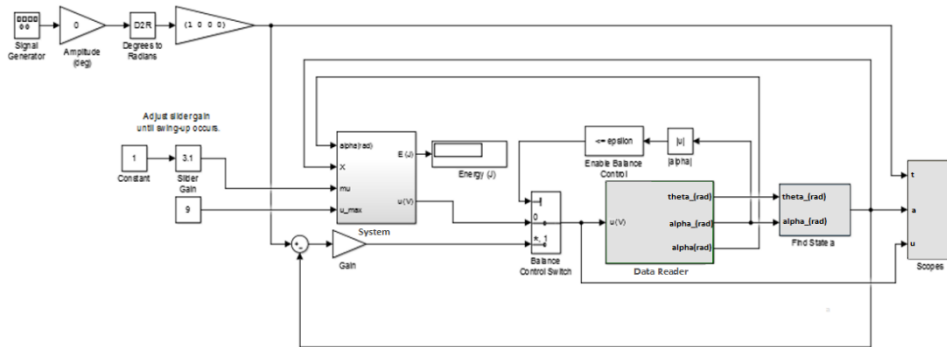
$$K = K^* P^{-1} \quad (48)$$

$$K^* = [19200 \ 9844 \ 1707.12 \ 29.34] \quad (49)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -0.000274 & 0.0002863 & -0.0000031 & 0.0000032 \\ -0.00000084 & 0.0001434 & -0.000274 & 0.0002847 \\ -0.00005848 & 0.012512 & -0.0000015 & 0.0000015 \\ 0.0027974 & -0.002854 & -0.0000264 & 0.0124782 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$K = [-5,2868374344 \ 28,18433868 \ -2,76111245972 \ 3,2346967151] \quad (50)$$

Denklem 50'de bulunan kazanç değerleri aşağıda belirtilen Kutup atama ile kontrol yönteminin MATLAB simülasyon paketinde tasarlanan blok diyagramında gain(kazanç) yerine bırakılması ile yapılmaktadır.

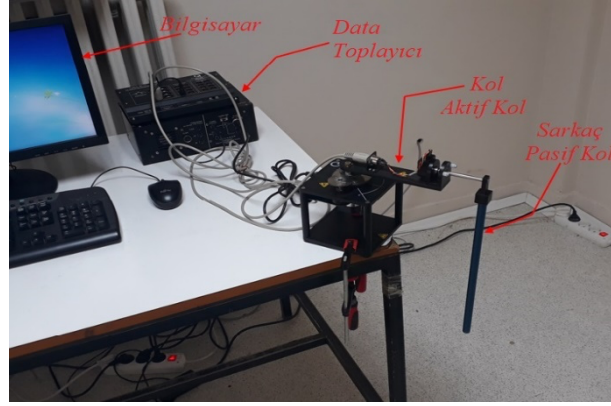


Şekil 5. Kutup atama ile kontrol matlab blok diyagramı



#### 4. Deney Düzenegi ve Gerçek Zamanlı Kontrolü

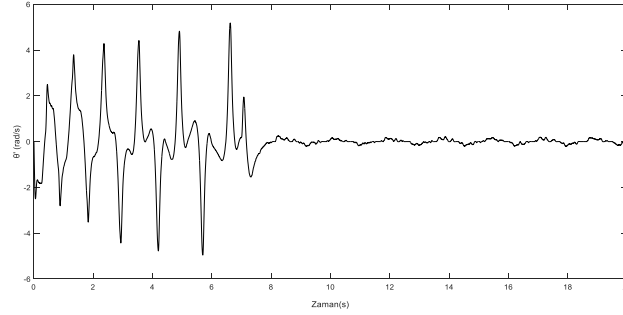
Fırat Üniversitesi Makine Mühendisliği Robotik ve Mekatronik laboratuvarında gerçek zamanlı döner ters sarkaç sistem üzerinde kutup atamaya kontrol deneysel olarak gerçekleştirilmiştir. Bu deney seti ve deneysel ortam Şekil 6'da gösterilmiştir.



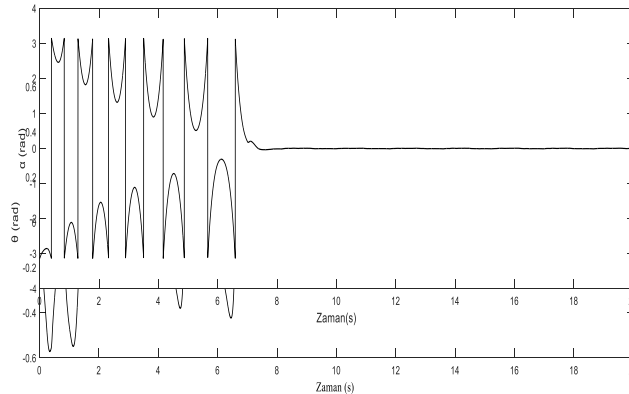
Şekil 6. Furuta döner ters sarkaç deney düzenegi

Şekil 6'da gösterilen deney düzeneginde kutup atama ile kontrol için MATLAB paket programı tercih edilmiş ve kontrol gerçekleştirilmiştir. Furuta döner ters sarkaç sisteminin kutup atama ile kontrolü sonucunda elde edilen elde edilen grafiklerin tamamı sisteminin 20 saniyelik çalışması için alınmıştır. Aktif kolun açılal konum-zaman grafiği Şekil 7'de, aktif kolun açılal hızı Şekil 8'de, pasif kolun açılal konumu Şekil 9'da, pasif kolun açılal hızı Şekil 10'da ve voltaj zaman grafiği Şekil 11'de görüldüğü gibidir.

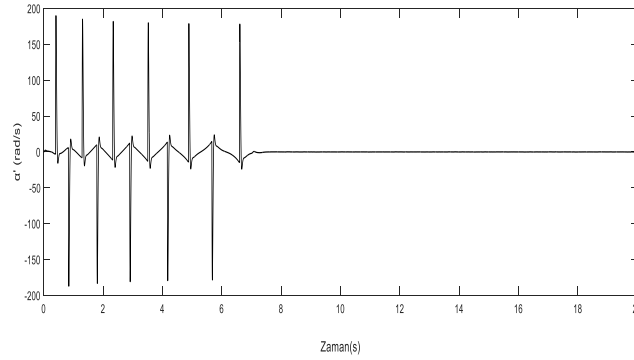
Şekil 7. Aktif kolun açılal konumu(rad)



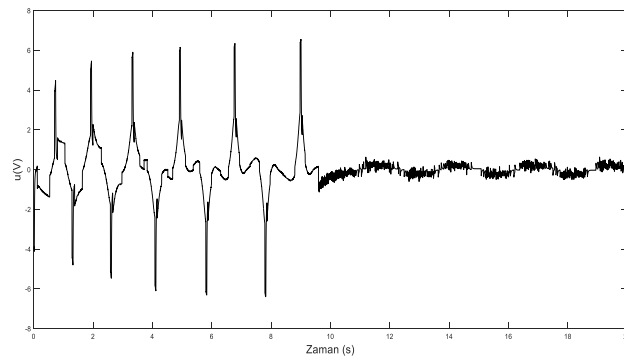
Şekil 8. Aktif kolun açılal hızı (rad/s)



Şekil 9. Pasif kolun açılal konumu (rad)



Şekil 10. Pasif kolun açısal hızı (rad/s)



Şekil 11. Kutup atama ile kontrole göre voltaj zaman grafiği

## 6.Sonuçlar

Furuta döner ters sarkaç sisteminin kutup atama ile kontrolü için gerekli olan sistemin modellenmesi işlemi Lagrange metodu ile yapılmıştır. Lagrange metodu uygulanırken sisteme ait kinetik enerji, potansiyel enerji ve Lagrange fonksiyonu elde edilmiştir. Lagrange metodunun uygulanması sonucunda Furuta döner ters sarkaç sistemi için 2 serbestlik dereceli doğrusal olmayan dinamik denklemler elde edilmiştir. Elde edilen bu denklemler analiz ve tasarım açısından kolaylık sağlaması için doğrusallaştırılmış ve durum-uzay modeli oluşturulmuştur. Oluşturulan durum uzay modelinden sistemin kontrol edilebilirlik (controllability) durumu irdelenmiş ve sonuç olarak sistemin kontrol edilebilir bir sistem olduğu tespit edilmiştir. Furuta döner ters sarkaç sisteminin kontrol analizinin uygun bir biçimde yapılabilmesi için elde edilen karakteristik denkleminde sonra sistemin kutupları (poles), sıfırları (zeros) ve tekil noktaları bulunmuştur. Bulunan bu verilerden faydalanarak Furuta döner ters sarkaç sisteminin gerçek zamanlı denetimi kutup yerleştirme (pole placement) ile gerçekleştirilmiştir. Sistemin gerçek zamanlı denetiminde Matlab paket programı kullanılmıştır. Tasarlanan kontrol algoritmasının çalışmasıyla aktif kolun ve pasif kolun(sarkaç) konum-zaman, hız-zaman ve voltaj zaman grafikleri alınmıştır. Sonuç olarak tasarlanan ve gerçek zamanlı olarak uygulanan Kutup atama ile (PP) kontrolün Furuta döner ters sarkaç sisteminin kararlı bir şekilde dengelenmesinde oldukça başarılı olduğu görülmüştür.

## Teşekkür

Bu çalışma Fırat Üniversitesi Makine Mühendisliği Robotik ve Endüstriyel Otomasyon Laboratuvarında gerçekleştirdiğinden dolayı yazarlar teşekkürlerini sunmaktadır.

## Araştırmacıların Katkısı

Bu çalışma Mustafa Teoman ÖZLER'in yüksek lisans tezi konusu olup bilimsel yayın araştırması, yöntemin uygulanması ve yorumlanması ile makalenin hazırlanması ve kontrolüne katkıda bulunmuştur.

## Çıkar Çatışması

Yazarlar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir.

## Kaynaklar

- Anvar, S. M. M., Hassanzadeh, I., & Alizadeh, G. (2010). Design and Implementation of Sliding Mode-State Feedback Control for Stabilization of Rotary Inverted Pendulum. ICCAS 2010, Gyeonggi-do, South Korea. <https://doi.org/10.1109/ICCAS.2010.5670108>
- Astrom, K.J., & Furuta, K.(2000). Swing up a Pendulum by Energy Control. Automatica, 2000; 36: 287-295. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00140-5](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00140-5)
- Furuta, K., Okutani, T., & Sone, H. (1978). Computer Control of a Double Inverted Pendulum. Computer and Electrical Engineering, 5(1), 67–84. [https://doi.org/10.1016/0045-7906\(78\)90018-6](https://doi.org/10.1016/0045-7906(78)90018-6)
- Furuta, K., Yamakita, M., & Kobayashi, S. (1992). Swing-up Control of Inverted Pendulum using Pseudo-State Feedback. Journal of Systems and Control Engineering, 206, 263-269. [https://doi.org/10.1243/PIME\\_PROC\\_1992\\_206\\_341\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1992_206_341_02)
- Hassanzadeh, I., & Mobayen, S. (2011). Controller Design for Rotary Inverted Pendulum System Using Evolutionary Algorithms. Mathematical Problems in Engineering, 2011, 1-17.
- Komine, T., Iwase, M., Suzuki, S., & Furuta, K.(2004). Rotational Control of Double Pendulum, IFAC Proceedings Volumes, 37, 325-330. <https://doi.org/10.1155/2011/572424>
- Li, H., Miao, Z. ve Wang, J. (2002). Variable Universe Adaptive Fuzzy Control on the Guadruple Inverted Pendulum. Science in China (Series E), 45, 213-224. <https://link.springer.com/article/10.1360/02ye9026>
- Mathew, N. J., Rao K. K., & Sivakumaran, N. (2013). Swing up and Stabilization Control of a Rotary Inverted Pendulum. in IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 37, 325-330. <https://doi.org/10.3182/20131218-3-IN-2045.00128>
- Rahimi, A., Raahemifar, K., Kumar, K., & Alighanbari, H.(2013). Controller Design for Rotary Inverted Pendulum System Using Particle Swarm Optimization Algorithm, 26th IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE). <https://doi.org/10.1109/CCECE.2013.6567710>
- Shen,J., Sanyal, A.K., & Chaturvedi, N. A. (2004). Bernstein, D., & McClamroch, H.(2004). Dynamics and Control of a 3D Pendulum. 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601), Nassau, p. 323-328. <https://doi.org/10.1109/CDC.2004.1428650>
- Shojaei, A. A., Othman, M. F., Rahmani, R., & Rani, M. R. (2011). A Hybrid Control Scheme for a Rotational Inverted Pendulum. UKSim 5th European Symposium on Computer Modeling and Simulation, Madrid, Spain. <https://doi.org/10.1109/EMS.2011.79>
- Tsai, M., & Shen, B. H. (2007). Synchronization Control of Parallel Dual Inverted Pendulums Driven by Linear Servomotors. IET Control Theory and Applications, 1(1),320-327. <https://doi.org/10.1049/iet-cta:20060038>
- Xu, K., & Duan, X. D. (2002). Comparative Study of Control Methods of Single-Rotational Inverted Pendulum. International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Beijing, China. <https://doi.org/10.1109/ICMLC.2002.1174486>
- Yoshida, K. (1999). Swing-up Control of an Inverted Pendulum by Energy-based Methods, Proceedings of the American Control Conference, San Diego. <https://doi.org/10.1109/ACC.1999.786297>