

Türkiye'deki 11. Sınıf Matematik Ders Kitaplarının Radyan Tanım ve Şekil Temsillerinin İncelenmesi: Nitel ve Nicel Açı Görüşü

Fikret Cihan^a ve Hatice Akkoç^b

Öz

Bu çalışmanın amacı Türkiye'deki matematik ders kitaplarında yer alan radyan tanım ve şekil temsillerinin incelenmesidir. Bu nitel araştırmanın verileri 2019-2020 eğitim-öğretim yılında 11. sınıf ortaöğretim matematik derslerinde okutulması kararlaştırılan beş ders kitabından toplanmıştır. Bu belgelerden elde edilen veriler Alyami'nin (2020) radyan açı ölçüsünün tanım ve şekilleri için nitel ve nicel açı görüşü ayrımına dayanan analiz çerçevesi kullanılarak betimleme çözümlemesine tabi tutulmuştur. Araştırmanın sonuçlarına göre ders kitaplarındaki radyan tanımları ve tanımı açıklayan radyan şekil temsilleri bir radyana odaklanmaktadır. Bu tanım ve şekillerde yay uzunluğu ile yarıçapın eşitlik dışındaki orantısal ilişkileri yeterince vurgu yapılmamıştır. Araştırmanın sonuçları doğrultusunda ders kitaplarındaki radyan tanımı ve radyan temsili şekillerde yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğunun eşitlik dışındaki nicel ilişkisinin ön plana çıkarılması önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematik ders kitapları, nicel açı görüşü, nitel açı görüşü, radyan, trigonometri öğretimi

Makale Hakkında

Gönderim tarihi: 04.04.2021

Düzeltilme tarihi: 05.01.2022

Kabul tarihi: 03.10.2022

Elektronik Yayın Tarihi: 29.11.2022

Giriş

İlk trigonometri çalışmalarının yapıldığı Mısır, Babil ve Antik Yunan'dan günümüze trigonometri pek çok kültürden etkilenecek şekilde gelişmiştir (Van Brummelen, 2009). Trigonometri okul matematiği konularında önemli, zorlayıcı (Kamber ve Takaci, 2018; Maknun vd. 2018) ve bir o kadar da değerli bir konuma (Hertel ve Cullen, 2011) sahiptir. Günlük yaşamda kendisine geniş bir kullanım alanı bulan trigonometri, öğrencilerin çeşitli bilişsel becerilerini geliştirmesi açısından da önemlidir (Akkoç ve Akbaş-Gül, 2010; Tuna, 2013). Matematiğin en eski konularından biri olan trigonometri, cebirsel, geometrik ve grafiksel akıl yürütmeyi birleştirmektedir (Weber, 2005). Cebirin trigonometriye dâhil edilmesiyle, tarihsel süreci içinde geometrik gelişiminin yanı sıra

^a Sorumlu yazar, Kırklareli Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü, Bilgisayar Programcılığı Programı, fikret.cihan@klu.edu.tr, ORCID: 0000-0001-8783-4136

^b Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, hakkoc@marmara.edu.tr, ORCID: 0000-0002-0223-1158

cebirsel gelişimi de ivme kazanmıştır (Sampaio ve Batista, 2018). Trigonometrinin cebir ve geometri öğrenme alanları arasında sağladığı geçiş (Akkoç ve Akbaş-Gül, 2010; Tuna, 2013) öğrencilerin cebirsel ve geometrik düşünceleri arasında etkileşim sağlamaktadır.

Açı ölçü birimleri trigonometrinin anlaşılması için önemli kavramlardır. En bilindik açı ölçü birimleri derece ve radyandır. Öncelikle derece ve radyanın her ikisinin de trigonometride “bir açının *açıklığı*” ölçtüğü bilinmelidir (Moore ve LaForest, 2014, s. 618; Thompson, 2008). Bir çemberin çevresini yani çember yayının tamamını gören merkez açının derece ölçüsü 360° dir. Bu durumda bir derece, uzunluğu çemberin çevresinin $\frac{1}{360}$ 'ı olan bir çember yayı olacaktır (Abramson, 2018; Bressoud, 2010; Thompson, 2008). O yüzden 1° çemberin çevresinin $\frac{1}{360}$ 'ına eşit olan çember yayını gören merkez açının ölçüsü olarak tanımlanır (Moyer ve Ayers, 2018).

Radyan kelimesi *radyal açı* için kısaltma olarak kullanılır (Bressoud, 2010). Radyan, merkez açının gördüğü yayın uzunluğunun çemberin yarıçap uzunluğuna oranıdır. İki çemberin eşit ölçülü merkez açıların, yarıçapları ile doğru orantılı yaylar oluşturduğu geometride ispatlanmıştır (Kells, 2014). r yarıçaplı çemberin çevresinin yarıçapına oranı $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ sabitidir (Lindkvist, 2019; Stitz ve Zeager, 2013). Bir çemberin çevresini yani çember yayının tamamını gören merkez açının radyan ölçüsü diğer deyişle tam dairesel dönüş $2\pi \text{ rad}$ 'dır (Moyer ve Ayers, 2018). 1 rad herhangi bir çemberde yarıçap uzunluğunda yayı gören açıdır ve çember çevresinin $\frac{1}{2\pi}$ 'lik kısmına eşit olan çember yayını gören merkez açının ölçüsü olarak tanımlanır (Moore ve LaForest, 2014). Kıyaslama yapmak gerekirse öğrenciler için $\frac{1}{2\pi}$ 'ye göre $\frac{1}{360}$ 'ı kavramlaştırmak daha kolay görünebilir (Bressoud, 2010). Ancak derece ve radyan bu şekilde yay uzunluğuna bağlı ifade edilirse tam olarak aynı tür şeyler olurlar (Thompson, 2008). Birim çember çoğu ders kitabında bir radyanın geometrik olarak temsil ettiği şeyi göstermek için kullanılır (Lindkvist, 2019). Birim çemberde merkez açının radyan ölçüsü yay uzunluğuna eşittir (Stitz ve Zeager, 2013). İki uzunluğun oranı olan radyan açı ölçüsü reel sayılarla ifade edildiği için her reel sayıya radyan cinsinden bir açı karşılık gelebilir (Akkoç, 2008). Ancak öğrenciler için radyan açı ölçü biriminden reel sayılara geçiş anlaşılması zor bir konudur (Demir, 2012).

Tam bir dairesel dönüş derece (D) cinsinden 360° ve radyan (R) cinsinden 2π olduğundan $\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi}$ yani $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ yazılabilir. Bu denklemde $R = \pi$ veya $D = 180^\circ$ yazılırsa $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ eşitliği görülmektedir. Denklemde $D = 1$ yazılırsa $1^\circ = \frac{\pi}{180} \cong 0,0175 \text{ rad} = 17,5 \text{ mrad}$ olduğu yine kolayca görülebilir. Son olarak denklemde $R = 1$ yazılırsa $1 \text{ rad} \cong 57,2957^\circ \cong 57^\circ + 17' + 45''$ sonucu görülebilir. İlerleyen sayfalarda ele alınacağı üzere öğrencilerin radyan açı ölçüsüne dair anlayışları bu formülle sınırlı kalabilmektedir (Akkoç, 2008).

Ülkemiz dâhil birçok ülkenin öğretim programı (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2017; Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018; Ministry of Education, Singapore [MOE], 2019) trigonometri öğretiminde derece

kavramına radyan kavramından önce yer vermektedir. Bu öğretim programlarında trigonometri konusu genel olarak dik üçgenlerin kenar uzunluklarının oranlarına odaklanan üçgen trigonometrisi ile başlar (Hertel ve Cullen, 2011). Sonrasında bu trigonometrik oranların birim çember üzerindeki noktanın koordinatlarıyla ilişkilendirildiği (MEB, 2018) çember trigonometrisi ile devam eder. Açıların statik olduğu (Mesa ve Goldstein, 2017) dik üçgende çalışılan trigonometrik oranlar için açılar dar açı iken, açılar dinamik olduğu (Mesa ve Goldstein, 2017) birim çemberde geniş açılar da söz konusudur (Demir, 2012). Açılar derece cinsinden ölçüldüğü ve trigonometrik oranların dik üçgende hesaplandığı üçgen trigonometrisi ile açılar radyan cinsinden ölçüldüğü ve trigonometrik fonksiyonların çember üzerinde hesaplandığı çember trigonometrisi öğrencilerde ikileme (Bressoud, 2010) ve radyan açılı ölçüsünü derece ölçüsüne bağlı düşüncelerine (Akkoç, 2008) sebep olabilmektedir. Buradan yola çıkarak öğrencilerin radyan ölçüsüne, derece ölçüsü kadar hâkim olmadıkları söylenebilir (Moore ve LaForest, 2014). Ortaöğretim matematik kitaplarında radyan ile ilgili verilen bilgiler, radyanın bir cümlelik tanımı ve radyan ölçüsünü derece ölçüsüne, derece ölçüsünü de radyan ölçüsüne çevirmek için kullanılan formül ile sınırlıdır (Kamber ve Takacı, 2018). Sonrasında hemen radyanın trigonometrik fonksiyonlarda kullanıldığı çalışmalara geçilir (Lindkvist, 2019). Ortaöğretim matematiğinde radyanın ne için tanıtıldığı veya radyana nerelerde ihtiyaç duyulduğuna değinilmemesi yaygın bir durumdur (Kupková, 2008). Ders kitaplarında açı ölçme birimi olarak radyanın ortaya çıkmasının nedenlerinin açıklığa kavuşturulmaması ve radyandan reel sayılara geçişteki sınırlı bilgiler bazı kavramsal kopuşlara neden olmaktadır (Martinez-Sierra, 2008). Trigonometrik fonksiyonların gösteriminde dik üçgenden birim çembere geçişteki güçlükler ya da trigonometrik fonksiyonların koordinat düzleminde grafiklerini çizerken π içermeyen reel sayılara karşılık gelen değerleri bulmada yaşanan zorluklar bu kopuşlara örnek olarak verilebilir. Ayrıca ders kitaplarında trigonometrik fonksiyonların birim çemberde açıklanması ile ilgili bilgiler de sınırlıdır. Ders kitaplarında birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonlar tanımlanırken ters trigonometrik fonksiyonlar tanımlanmaz (Barrera, 2014). Tüm bunlardan dolayı bu konuda güçlük yaşayan öğrencilerin trigonometrik fonksiyonları anlamlandırılmaları ve verimli bir şekilde kullanmaları hedeflenecek ise ister derece olsun ister radyan olsun açı ölçüsünü, iki büyüklük arasındaki orantısal ilişki olarak görmelerine destek olunmalıdır (Moore ve LaForest, 2014). Açı ölçüsü açıkça iki nicelik arasındaki orandır. Bir durumun ölçülebilir özellikleri nicelik olarak adlandırılır (Moore, 2013). Yani nicelik ölçülebilen bir şeyin tasarlanmış özelliğidir (Thompson, 1990). Radyan açılı ölçüsünün hesaplanmasında yay uzunluğu ve yarıçap uzunluğu olmak üzere iki niceliğin ölçülmesi ve oranlanması gereklidir. Nicelikler arasındaki ilişkiye dayanan açı ölçü anlayışında, açı ölçüsü bir etiketten daha fazlasıdır (Moore, 2013). Açı ölçüsü α , β , $1 rad$ şeklinde bir isimlendirmeden, açının gördüğü yay da sadece açığı gösteren bir etiket işaretçisinden daha fazla işleve sahiptir. Yayı gören merkez açının radyan açılı ölçüsü (α), yay uzunluğunun (s), yarıçap uzunluğuna (r) oranıdır yani $\alpha = \frac{s}{r}$ dir (Moore ve LaForest, 2014). Buradan herhangi bir radyan açılı ölçüsünü ifade eden sonsuz sayıda denklik oluşturulabileceği söylenebilir. Bunlar orantılı bir şekilde değişen yay ve yarıçap uzunluklarının oranıdır. “İki nicelik doğru orantılı ise, her iki niceliğin sayısal değerleri aynı oranda değiştiğinden, bir niceliğin diğerine oranı değişmez” (Lobato ve Ellis, 2010,

s. 11). Radyan kavramı için bu orantısal akıl yürütmenin kullanılması kavramsal bir anlayışın da işaretidir (Demir, 2012). Çünkü orantısal akıl yürütme sadece orantısal ilişkilerin kurulmasını değil aynı zamanda bu orantısal ilişkilerin sonuçlarının neyi ifade ettiğini de bilmeyi gerektirir (Lamon, 2007). Aynı zamanda yay ve yarıçap uzunluklarının ölçülmesini içeren işlemler aracılığıyla radyan açı ölçümünün nicelleştirilmesi, tutarlı açı ölçüsü anlayışlarını geliştirmektedir (Moore, 2013). Çünkü orantısal ilişkiler gerçek hayat durumları ve problemleri hakkında nicel akıl yürütmenin farklı yollarını sunmaktadır (Lobato ve Ellis, 2010). Nicel akıl yürütme bir durumu tasarlamayı ve tasarlanan nicelikler arasındaki ilişkileri kurmayı gerektiren bilişsel eylemlere dayanır (Moore, 2013). Dolayısıyla nicel akıl yürütmeye dayalı trigonometri yaklaşımı, öğrencilerin yay uzunluğu ile yarıçap arasındaki nicel ilişkiyi anlamalarını destekleyebilir (Moore ve LaForest, 2014). Ancak bunun aksine ders kitaplarındaki radyan tanım ve şekillerinin sık kullanılan özellikleri, nicel ilişkilere odaklanmayan nitel bakış açısını (yay uzunluğunu açıyı adlandıran bir etiket işaretçisi olarak çizmeyi veya açının geometrik özelliklerine odaklanmayı) destekler. Bu ise öğrencilerin radyan açı ölçüsünü sadece derece açı ölçüsü üzerinden geliştiren kısıtlı bir anlayışa sahip olmalarına sebep olur (Alyami, 2020).

Literatür Taraması

Geçmişten günümüze trigonometri, matematik alanındaki araştırmaların aksine matematik eğitimi araştırmalarında hak ettiği ilgiyi görmemektedir (Akkoç, 2008; Fi, 2003; Spangenberg, 2021). Dolayısıyla matematik eğitiminde radyan kavramı da araştırılması gereken pek çok yönüyle (örneğin radyan öğretimine ilişkin öğretim stratejilerinin geliştirildiği müdahale çalışmaları, öğretmenlerin pedagojik alan ve teknolojik pedagojik alan bilgisi gibi) beklemektedir. Literatür incelemesi radyan kavramıyla ilgili matematik eğitimi literatürünün yakın bir geçmişe sahip olduğunu göstermektedir. Öğrencilerle yapılan çalışmaların (Güntekin ve Akgün, 2011; Kamber ve Takaci, 2018; Martinez-Sierra, 2008; Orhun, 2004; Steckroth, 2007) sonuçlarına göre radyan kavramı öğrenciler için anlaşılması güç bir konudur. Benzer şekilde matematik öğretmeni adaylarının radyan kavram imgelerinin (imajlarının) araştırıldığı çalışmalarda da (Akkoç, 2008; Fi, 2003; Topçu vd., 2006; Tuna, 2013) öğretmen adaylarının radyan kavramına ilişkin güçlükler yaşadıkları tespit edilmiştir. Literatürdeki çalışmaların sonuçlarına göre matematik öğretmenleri dahi radyan kavramına ilişkin benzer güçlüklerle sahiptirler (Erdem ve Man, 2018; Topçu vd., 2006; Yavuz-Mumcu ve Aktürk, 2020). Bu çalışmalarda bu güçlükler ve bu güçlüklerin nedenleri rapor edilmiş ve bu güçlüklerin üstesinden gelebilmek için bazı önerilerde bulunulmuştur. Bunların dışında π ile ilgili yapılmış deneysel ve kavramsal çalışmalar (Akkoç ve Katmer, 2011; Erdem ve Man, 2018; Fi, 2003; Lindkvist, 2019) radyan kavramıyla ilgili sorunları ortaya çıkarmada önemlidir. Bu deneysel çalışmaların sonuçlarına göre radyan kavramıyla ilgili yaşanan önemli güçlükler şu şekilde özetlenebilir. Radyan kavramıyla ilgili öğrenciler, radyanı tanımlayamama, açıları radyan cinsinden düşünememe, radyan cinsinden açının esas ölçüsünü bulamama, derece ve radyan açı ölçülerini birbirine dönüştürememe, radyanla işlem yapamama, radyan kavramını yay uzunluğu ve yarıçap uzunluğu ile ilişkilendirememe, yay uzunluğu ile yay ölçüsü kavramlarını karıştırma gibi güçlüklerle sahiptirler (Güntekin ve Akgün, 2011; Kamber ve Takaci, 2018; Orhun, 2004; Steckroth, 2007). Matematik öğretmen adayları reel sayılarla radyanı ilişkilendirememe, birim

çemberde radyanı tanımlayamama, $1 \text{ rad} = 180^\circ$ yanlışlığı, π 'nin 3,14 (yaklaşık olarak) ve 180 olmak üzere iki farklı değerinin olduğunu düşünme gibi yanlışlar ve güçlükler yaşamaktadırlar (Akkoç, 2008; Akkoç ve Katmer, 2011; Fi, 2003; Topçu vd., 2006; Tuna, 2013). Benzer şekilde matematik öğretmenleri de radyanı tanımlayamama, radyan kavramını iki uzunluğun oranı olarak ifade edememe, yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğu arasındaki ilişkiyi anlamlandıramama, radyan kavramı ile birim çemberi ve trigonometrik fonksiyonları ilişkilendiremememe, radyanı reel sayı olarak görememe, π 'yi radyan ölçü birimi olarak düşünme, bir çemberde neden 2π radyan olduğunu yorumlayamama, π 'nin 3,14 (yaklaşık olarak) ve 180 olmak üzere iki farklı değerinin olduğunu sanma, derece ve radyan arasında eşleme yapamama gibi yanlışlar ve güçlükler yaşamaktadırlar (Erdem ve Man, 2018; Topçu vd., 2006; Yavuz-Mumcu ve Aktürk, 2020). Radyan kavramıyla ilgili yaşanan bu yanlışların ve güçlüklerin üstesinden gelmeye ve onların radyan anlayışlarını geliştirmeye yönelik müdahaleler tasarlayan çalışmalar (Akkoç ve Akbaş-Gül, 2010; Maknun vd., 2018; Moore, 2013; Touval, 2009; Wolbert ve Moss, 2018) uygulama sonunda olumlu sonuçlarını rapor etmişlerdir. Ders kitaplarındaki radyan kavram imgelerinin (Alyami, 2020; Martinez-Sierra, 2008; Lindkvist, 2019) incelendiği çalışmalarda radyan kavramının daha iyi anlaşılması için kitap yazarlarına, öğretim programı geliştiricilere ve öğretmenlere önerilerde bulunulmuştur. Bu öneriler açılı ölçü birimlerinin nicel akıl yürütmeye dayalı olarak ele alınması yönünde yoğunlaşmaktadır (Alyami, 2020). Radyan kavramı ile ilgili ulusal ve uluslararası literatürde sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır.

Matematik ders kitapları ile ilgili araştırmaların daha çok ilköğretim düzeyinde yapılmış olduğu, lise düzeyindeki araştırmaların sayısının ise sınırlı olduğu hem ulusal hem uluslararası literatürde görülmektedir (Fan vd., 2013; Gökçek ve Hacısalihoğlu-Karadeniz, 2013). Uluslararası literatürde ders kitaplarındaki radyan kavramının incelendiği çalışmalar (Alyami, 2020; Martinez-Sierra, 2008; Lindkvist, 2019) sınırlı sayıda da olsa mevcuttur. Alyami'nin (2020) çalışmasının sonuçları ABD'deki ortaöğretim ders kitaplarında yer alan radyan açılı ölçüsü temsillerinin nitel yönlerine yapılan vurgunun fazla olduğunu ancak hem de nicel unsurlar taşıdığını ortaya çıkarmıştır. Ayrıca radyan temsillerinin bir radyana odaklandığına dikkat çekilmiştir (Alyami, 2020). Martinez-Sierra (2008) Meksika'daki ders kitaplarının analizinde negatif açıların ve 360° den büyük açıların varlıklarını gösterecek argüman kullanmadan tanımlarının yapılmasının ve radyan ile reel sayıların ilişkilendirilmemesinin neden olduğu kavramsal kopuşları rapor etmiştir. Lindkvist (2019) ise İsveç'teki ders kitaplarında radyan kullanımının metinsel analizini yapmıştır. π kullanımının estetik ve kullanılabilirlik açısından problemlerini tanımlamış ve 2π 'ye eşit olan tau (τ) sabitinin kullanımını önermiştir. Tau (τ) sabitinin hem estetik hem de pratik açıdan daha kullanışlı olduğunu öne sürmüş ve öğrencilerdeki kavram yanlışlarının önüne geçebileceğini belirtmiştir (Lindkvist, 2019). Fakat ülkemizde okutulan ortaöğretim ders kitaplarındaki radyan kavramını inceleyen çalışmaya yazarlar tarafından rastlanmamıştır. Bu yüzden bu çalışmada ülkemizde okutulan ortaöğretim matematik ders kitaplarındaki radyan tanım ve şekil temsilleri incelenmiştir. Açılı ölçüsünün tanım ve şekil temsilleri, bu kavramları anlamlandırma ve inşa etme potansiyeline sahip (Alyami, 2020) olduğundan bu tür çalışmalar önem arz eder. Bu yönüyle bu çalışmanın literatürdeki büyük bir açığı kapatacak nitelikte olduğu düşünülmektedir.

Teorik Çerçeve

Ders kitaplarındaki radyan tanım ve şekil temsillerini inceleyen bu çalışmanın teorik çerçevesi nitel ve nicel açı görüşünü (Heath, 1956; Matos, 1990; Tanguay ve Venant, 2016) esas almaktadır. Bu ayrım matematik eğitiminde sadece açı bağlamında değil daha geniş bir bağlamda kullanılan nicel akıl yürütme (Thompson, 1990) fikrine dayanmaktadır. Thompson (1990) nicel akıl yürütmeyi, bir durumu nicelikler ve nicel ilişkiler ağından oluşan nicel bir yapı içerisinde analiz etme olarak tanımlamıştır. Dinamik durumlarda niceliklerin değerleri değişse de onlar arasındaki sabit ilişkileri anlamada nicel akıl yürütme önemli bir rol oynamaktadır (Thompson, 2011).

Aristoteles açığı bir doğrunun sapsması veya kırılması olarak düşündüğü için onun nitel açı görüşüne sahip olduğuna inanılmaktadır (Heath, 1956; Matos, 1990). Öklid “Öğeler” adlı eserinin 13 kitabından ilkinde düzlem açığı “bir düzlemde iki çizgi birbirine dokununca ve bir doğru üzerinde oturmayınca çizgilerin birbirine göre eğimidir” şeklinde tanımlamıştır (Euclid, 2013, s.12). Aristoteles’in aksine açının ölçülebilir özelliklerine odaklanan Öklid’in nicel açı görüşüne sahip olduğu düşünülmektedir (Heath, 1956; Matos, 1990). Nitel açı görüşü daha çok geometrik bir nesne olan açığı oluşturan nitel özelliklere (köşe, tepe noktası, dönüş vs.), nicel açı görüşü ise ışınlar arasındaki boşluğun ölçümü, açıklık veya dönüş miktarı gibi nicel özelliklere dikkat etmeyi içermektedir (Alyami, 2020). Nitel açı görüşüne göre açıklık geometrik bir özellik iken nicel görüşte ise açıklığın miktarı yani ölçüsü söz konusudur. Açı ile ilgili bu görüşler açı ölçüsünün nasıl anlaşıldığı noktasında belirleyicidir (Alyami, 2020). Nicel açı görüşüne sahip öğrenciler ışınlar arasındaki boşluk ya da ışınların uzunluğu gibi açıların ölçülebilir özelliklerine odaklanmaktadır (Keiser, 2004). Nicelikler kişiden kişiye değişebildiği için kişilerin bir açının açıklığını nicelleştirmesi de farklılıklar gösterebilir (Moore, 2013). Nitel açı görüşüne sahip öğrenciler ise açığı keskin bir köşeye sahip geometrik bir nesne olarak nitelemektedirler (Keiser, 2004).

Alyami (2020) radyan açı ölçüsü kavramına ilişkin öğretim programı perspektifinden fikir edinmek için, ABD’de yaygın olarak kullanılan sekiz ortaöğretim matematik ders kitabındaki sekiz tanım ve 20 şekil temsiliğini incelemiştir. Bu çalışmanın teorik çerçevesini Alyami’nin (2020) radyan açı ölçüsünün tanım ve şekillerini incelediği analiz çerçevesi oluşturmaktadır. Bu çerçeve yukarıda da belirtildiği üzere matematiğin tarihsel sürecinde de karşımıza çıkan nitel ve nicel açı görüşü ayrımına dayanan epistemolojik temellere sahiptir. Bu doğasından dolayı Türkiye bağlamında gerçekleştirilen bu çalışmada herhangi bir uyarılma yapılmadan kullanılmıştır. Tanım ve şekillerin çözümlemesinde kullanılan kategoriler, kodlar ve açıklamaları aşağıda sunulmuştur (Alyami, 2020).

Alyami (2020) tanımları “açı ölçüsü”, “ölçülebilir nitelikler”, “ilişkisel tanım”, “bir radyan tanımı”, “birim çember” ve “standart konum” olmak üzere altı kod ile kodlamıştır (s. 25). Bu kodlar “radyanı bir açı ölçüsü olarak” ifade eden *açı ölçüsü*, “yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğuna atıfta bulunarak radyan açı ölçüsünün ölçülebilir özelliklerini” belirten *ölçülebilir nitelikler*, “yay uzunluğunun yarıçapa bağımlılığını veya yay uzunluğunu yarıçapın bir oranı olarak” veren *ilişkisel tanım*, “açı ölçüsünün bir

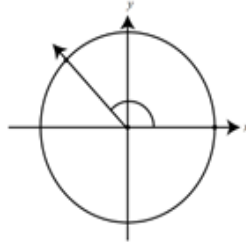
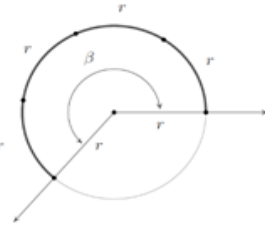
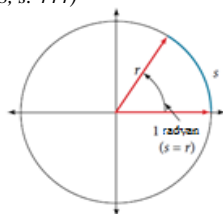
radyan olduğunu veya yay uzunluğunun yarıçapa eşit olduğunu” belirten *bir radyan tanımı*, “tanımı açıkça birim çember anlamına gelen veya yarıçapın 1 uzunluğunda olduğunu” ifade eden *birim çember* ve tanımı “özellikle standart konumda yer alan açığı” işaret eden *standart konum* kodlarıdır (s. 25). Aynı zamanda radyan açılı ölçüsü tanımlarının, radyan açılı ölçüsü şekil temsillerindeki nitel ve nicel açılı görüş ayrımını destekleyip desteklemediği de vurgulanmıştır (Alyami, 2020).

Alyami (2020) şekilleri öncelikle *nitel*, *nicel* ve *hem nitel hem nicel* olmak üzere üç kategoriye ayırmıştır. Açılı ölçüsünün bir *rad* ile sınırlı olmadığı, radyan açılı ölçüsünün yay uzunluğu ve yarıçap arasındaki orantısal ilişkiyle sunulduğu şekiller *nicel*, bu ilişkiye atıfta bulunmadan yayın bir etiket işaretçisi olarak sunulup, açının da nitel özelliklerinin vurgulandığı şekiller *nitel* olarak kodlanmıştır (Alyami, 2020). Açılı ölçüsünün bir *rad* ile sınırlı olduğu, yay uzunluğu ile yarıçap uzunluklarının eşit olduğu ve yine yayın bir etiket işaretçisi olarak sunulduğu şekiller ise *hem nitel hem nicel* olarak kodlanmıştır (Alyami, 2020, s. 22). Aşağıda bunların her birine birer örnek verilmiştir.

Sonrasında ise Alyami (2020) şekilleri; şekildeki açının ölçüsüne göre *açılı ölçüsü*, şekildeki radyan açılı ölçüsünün yayı ve yarıçapına göre *ölçülebilir özellikler*, açının konumuna göre *yönlendirme*, açılı çevreleyen elemanlara göre ise *yerleşim* kategorilerinde incelemiştir (s. 24). Bu kategorilerden *açılı ölçüsü* kategorisini ölçünün derece cinsinden verildiği *derece cinsinden sayı*, ölçünün bir *rad* olarak verildiği *bir radyan*, ölçünün bir *rad* dışında bir rasyonel olarak verildiği *rasyonel radyan ölçüsü*, ölçünün π içerecek biçimde verildiği *irrasyonel radyan ölçüsü* ve açılı ölçüsünün $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ gibi sembolik olduğu *sembolik açılı ölçüsü* alt kategorileri ile kodlamıştır (s. 24). *Ölçülebilir özellikler* kategorisini yay uzunluğunun sayı ile ifade edildiği *sayısal yay uzunluğu*, benzer şekilde yarıçap uzunluğunun sayı ile belirtildiği *sayısal yarıçap*, yay uzunluğunun sembol formunda verildiği *sembolik yay uzunluğu*, yarıçap uzunluğu içinde benzer şekilde sembollerin kullanıldığı *sembolik yarıçap*, şekilde yay ve yarıçap uzunluğunun belirtilmediği durumlarda *yay uzunluğu yok* ve *yarıçap yok* kodları ile kodlamıştır (s. 24). *Yönlendirme* kategorisinde; açılıyı oluşturan ışıklardan birinin yatay konumlandığı *standart konum* ve açılıyı oluşturan ışıklardan ikisinin de yatay konumlanmadığı *diğer yönlendirmeler* kodlarını kullanmıştır. *Yerleşim* kategorisinin kodlarını ise açının kartezyen-koordinat düzleminde (iki boyutlu *xy*-düzleminde) yerleştiği *kartezyen-koordinat düzlemi*, açının çember içinde yerleştiği *çember* ve açının çemberin tamamında olmamak üzere bir parçasında yerleştirildiği *çember parçası* oluşturmaktadır (s. 24).

Tablo 1

Radyan Şekil Temsillerini Kodlamak (Nitel, Nicel, Hem Nitel Hem Nicel) İçin Örnekler ve Açıklamalar (Alyami, 2020)

Kategori	Radyan Şekil Temsili Örnekleri	Açıklama
Nitel	<p>Şekil 1</p> <p><i>Nitel Unsurlar İçeren Radyan Şekil Temsili (Sundstrom ve Schlicker, 2020, s. 29)</i></p>  <p>Standart konumda $\frac{3}{4}\pi$ ölçülü bir açı</p>	<p>Şekil 1’de görüldüğü üzere yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğu arasındaki ilişkiye hiç atıfta bulunulmamıştır. Yay sadece bir etiket işaretçisi olarak sunulup, açının nitel özellikleri vurgulanmıştır.</p>
	<p>Şekil 2</p> <p><i>Nicel Unsurlar İçeren Radyan Şekil Temsili (Stitz ve Zeager, 2013, s. 701)</i></p>  <p>β 4 radyan ölçüsüne sahiptir</p>	<p>Şekil 2’de görüldüğü üzere açı ölçüsü bir <i>rad</i> ile sınırlı değildir. Radyan açı ölçüsü yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğunun eşitlik dışındaki orantısal ilişkisiyle sunulmuştur. Yay üzerinde yarıçap uzunluğu kadar uzunluklar işaretlenerek bu iki uzunluk arasındaki nicel ilişkiye vurgu yapılmıştır. 4 yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsü 4 radyan olarak verilmiştir.</p>
Hem nitel hem nicel	<p>Şekil 3</p> <p><i>Hem Nitel Hem Nicel Unsurlar İçeren Radyan Şekil Temsili (Abramson, 2018, s. 444)</i></p>  <p>1 radyan ($s = r$)</p>	<p>Şekil 3’te görüldüğü üzere yay uzunluğu ve yarıçap uzunluğu eşittir ($s = r$). Açıkça radyan açı ölçüsünün bir <i>rad</i> ile sınırlı olduğu belirtilmiştir. Ayrıca yay bir etiket işaretçisi olarak sunulmuştur.</p>

Not. Tablodaki kategori, kod ve açıklamalar Alyami (2020) çalışmasından Türkçe’ye çevrilmiştir.

Bu çalışmada da Türkiye’de okutulan ders kitaplarındaki radyan tanım ve şekil temsilleri bu kategori ve kodlarla çözümlenecektir. Bu teorik çerçeve altında Türkiye’deki ortaöğretim 11. sınıf matematik ders kitaplarındaki

- Radyan açı ölçüsünün tanımları nitel ve nicel açı görüşü ayrımına göre hangi özelliklere sahiptir?
- Radyan açı ölçüsünün şekil temsilleri nitel ve nicel açı görüşü ayrımına göre hangi özelliklere sahiptir?

sorularına cevap aranmaktadır.

Yöntem

Bu araştırmanın tüm süreçleri etik ilke ve kurallara uyularak yürütülmüştür. Kırklareli Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar ve Yayın Etiği Kurulu’nun 22.03.2021 tarih ve E-35523585-199-7126 sayılı kararıyla bu çalışmanın yapılmasında etik açıdan sakınca görülmemiştir.

Araştırma Deseni

Bu araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden belge çözümlemesi yöntemi tercih edilmiştir. Araştırmanın verileri 11. sınıf matematik ders kitaplarından elde edilmiştir. Bu belgelerden elde edilen veriler ise Alyami’nin (2020) çalışmasındaki kodlar kullanılarak betimleme çözümlemesine tabi tutulmuştur.

Ders Kitabı Örnekleme

Bu çalışmanın verileri ders kitapları aracılığıyla toplanmıştır. Nitel araştırmalarda örneklem araştırmanın amacına yönelik seçilmektedir (Creswell, 2014). Bu araştırmada örnekleme tekniği olarak amaçlı örnekleme tekniklerinden ölçüt örnekleme tekniği seçilmiştir. Ölçüt örnekleme tekniğinde önceden belirlenen kısıtlar özelinde tüm durumlar nitel yaklaşımla analiz edilir (Patton, 2014). Bu çalışmanın örneklemini Millî Eğitim Bakanlığı Destek Hizmetleri Genel Müdürlüğü’nün 14.01.2019 tarih ve 76198665-825.03.01-E.937919 sayılı yazısı gereği 2019-2020 eğitim-öğretim yılında 11. sınıf ortaöğretim matematik derslerinde okutulması kararlaştırılan ve basılan ders kitapları ve ders kitabı yerine kullanılabilir eğitim aracı/öğretim materyalleri oluşturmaktadır. 2020-2021 eğitim-öğretim yılı için yeni bir ders kitabı yayımlanmamıştır. Bu araştırma için ölçüt, kitapların 2019-2020 eğitim-öğretim yılında MEB tarafından okutulması kararlaştırılmış olması ve basılmasıdır. 2018 ortaöğretim matematik dersi öğretim programında radyan kavramına sadece 11. sınıfta yer verilmiştir (MEB, 2018). Radyan kavramına sadece 11. sınıf matematik dersi kitaplarında yer verildiğinden, bu araştırmada Tablo 2’deki beş ders kitabı detaylı incelemeye tabi tutulmuştur.

Tablo 2*İncelenen Ders Kitapları*

Kitap Adı	Kod	Yayıncı	ISBN
Ortaöğretim Matematik 11 Ders Kitabı	K1	Millî Eğitim Yayınları (Akbaş, 2019)	978-975-11-4599-4
Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik 11 Ders Kitabı	K2	Millî Eğitim Yayınları (Ulualan, 2019)	978-975-11-4553-6
Ortaöğretim Matematik 11. Sınıf Ders Kitabı	K3	Top Yayıncılık (Erduran ve Özdemir, 2019)	978-605-9360-51-7
Ortaöğretim Matematik	K4	MHG Kitap Basım Yayın (Gümüşel ve Deviren, 2019)	978-605-84393-4-4
Temel Düzey Ders Kitabı 11	K5	Millî Eğitim Yayınları (Masal, 2019)	978-975-11-4985-5

Verilerin Analizi

Bu çalışmada Tablo 2'deki ders kitapları belge çözümlemesine tabi tutulmuştur. Belge çözümlemesi el yazılı veya basılı belgelerin ya da elektronik materyallerin kendine özgü özellikleriyle incelenmesidir (Bowen, 2009; Norum, 2008). Belge çözümlemesinin beş aşaması: (1) çözümlenecek belgelere erişme, (2) erişilen belgelerin orjinalliğinin denetlenmesi, (3) belgeleri anlama ve çözümleme, (4) belgelerden elde edilen verileri çözümleme, (5) verileri kullanma (Forster, 1995; Yıldırım ve Şimşek, 2016) sırasıyla takip edilmiştir. İlk aşama olan belgelere erişme aşamasında öncelikle <https://www.eba.gov.tr/> adresinden 11. sınıf matematik ders kitaplarına ulaşılmıştır (Eğitim Bilişim Ağı [EBA], t.y.). Belgeler resmi ders kitapları olduğu için özgün belgelerdir. Üçüncü aşamada ders kitaplarındaki tüm metin ve şekiller incelenmiştir. Radyan ile ilgili tanım, şekil, örnek, uygulama, soru veya alıştırmalara sadece 11. sınıf ders kitaplarında yer verilmiş olduğundan Tablo 2'deki kitapların radyan ile ilgili bölümleri detaylı incelenmiştir. Öncelikle tüm kitaplardaki radyan tanımları ve şekilleri toplanmıştır. Radyan tanımları açıklamalarıyla birlikte tasnif edilmiştir. Radyanı temsil eden şekiller için radyan tanımlarını açıklayan şekiller, radyanla ilgili örneklerdeki şekiller ve radyanla ilgili sorulardaki şekiller toplanmıştır. Sonrasında dördüncü aşama olan çözümleme aşamasına geçilmiştir. Tüm tanımlar Alyami'nin (2020) Tablo 3'deki analiz çerçevesinde betimsel olarak çözümlenmiştir. Betimleme çözümlemesi için tanımlar aşağıdaki kod tablosuna göre araştırmacılar tarafından kodlanmıştır. Bu kod tablosuna göre bir tanım birden fazla kod ile kodlanmış olabilir.

Daha sonra kitaplardaki tüm radyan şekilleri Alyami'nin (2020) Tablo 4'deki analiz çerçevesinde betimleme çözümlemesine tabi tutulmuştur. Betimleme çözümlemesi için şekiller aşağıdaki kod tablosuna göre araştırmacılar tarafından kodlanmıştır. Bu kod tablosuna göre bir şekil birden fazla kod ile kodlanmış olabilir.

Tablo 3*Radyan Tanımlarının Açıklayıcı Kodlama Şeması (Alyami, 2020, s. 25)*

Kod	Açıklama
Açı ölçüsü	Tanım özellikle radyanı bir açı ölçüsü olarak ifade eder.
Ölçülebilir nitelikler	Tanım özellikle yarıçap ve yay uzunluğuna atıfta bulunarak radyan açı ölçüsünün ölçülebilir özelliklerini ifade eder.
İlişkisel tanım	Yay uzunluğu ile yarıçap arasındaki ilişkiyi ifade eder ve yay uzunluğunun yarıçapa bağımlılığını veya yay uzunluğunu yarıçapın bir oranı olarak ifade eder.
Bir radyan tanımı	Açı ölçüsünün bir radyan olduğunu açıkça belirtir veya yay uzunluğunun yarıçapa eşit olduğunu belirterek dolaylı olarak 1 radyan açı ölçüsünü belirtir.
Birim çember	Tanımı açıkça birim çember anlamına gelir veya yarıçapın 1 uzunluğunda olduğunu belirtir.
Standart konum	Tanım özellikle standart konumda yer alan açığı ifade eder.

Not. Tablodaki kod ve açıklamalar Alyami (2020, s. 25) çalışmasından Türkçe'ye çevrilmiştir.

Son aşamada Tablo 3 ve 4'teki kodlamaların Alyami'nin (2020) çalışmasından Türkçe'ye çevirileri anadili Türkçe olan ve yurt dışında matematik eğitimi alanında doktora yapmış bir akademisyen tarafından kontrol edilerek dil geçerliliği sağlanmıştır. Araştırmacılar tarafından bu tablolara göre yapılan kodlamalardan sonra, tanım ve şekiller trigonometri alanında çalışmaları olan başka bir matematik eğitimi uzmanı akademisyen tarafından kodlanmıştır. Araştırmacılar ve uzmanların radyan tanımlarına ilişkin yaptıkları 42 kodlama arasında hiçbir uyumsuzluk çıkmamıştır. Radyan temsil şekillerine ait ise 176 kodlama yapılmıştır. 160 kod için uyuma 16 kod için ise uyumsuzluk saptanmıştır. Uyumsuzluk yaşanan kodlar tanımı açıklayan şekil temsillerinde değil, sorulardaki radyan temsili şekillerde ortaya çıkmıştır. Araştırmacılar ve uzman arasındaki uyum Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64) "güvenirlilik = görüş birliğinin sayısı / görüş birliği + görüş ayrılığının toplam sayısı" formülü ile hesaplanmış ve $202/218 \approx \% 92,7$ uyum bulunmuştur. Araştırmacılar ve uzman arasındaki uyumsuz kodlar birlikte tekrar değerlendirilip kodlara son hali verilmiş ve kod frekansları tablolar halinde sunulmuştur. Bu nitel araştırmanın aktarılabirlik ve inanırılık niteliklerini (Guba ve Lincoln, 1982) geliştirmek amacıyla bulgular ders kitaplarından birebir alıntılarla desteklenmiştir.

Tablo 4*Radyan Şekil Temsillerinin Açıklayıcı Kodlama Şeması (Alyami, 2020, s. 24)*

Kategori: Açıklama	Kod	Açıklama
Açı ölçüsü: Şekildeki açının ölçüsü	Derece cinsinden sayı	Radyan şekli derece cinsinden bir açı ölçüsü içerir.
	Bir radyan	Açı ölçüsü bir radyandır veya yay uzunluğu yarıçapa eşittir.
	Rasyonel radyan ölçüsü	Radyan açı ölçüsü ne 1'dir ne de π içerir.
	İrrasyonel radyan ölçüsü	Radyan açı ölçüsü π içerir.
Ölçülebilir özellikler: Şekildeki radyan açı ölçüsünün yayı ve yarıçapı	Sembolik açı ölçüsü	Açı ölçüsü sembolle belirtilir.
	Sayısal yay uzunluğu	Yay uzunluğu bir sayı ile belirtilir.
	Sayısal yarıçap	Yarıçap sayı formunda verilir.
	Sembolik yay uzunluğu	Yay sembolle belirtilir.
	Sembolik yarıçap	Yarıçap sembol ile verilir.
Yönlendirme: Açının konumu	Yay uzunluğu yok	Şekilde yay uzunluğu gösterilmez.
	Yarıçap yok	Şekilde yarıçap gösterilmez.
	Standart konum	Açı, ışıklardan biri yatay olacak şekilde, standart konumdadır.
Yerleşim: Açıyı çevreleyen elemanlar	Diğer yönlendirmeler	Açının konumlandırması standart değildir.
	Kartezyen-koordinat düzlemi	Şekil açığı kartezyen-koordinat düzleminde (iki boyutlu xy -düzleminde) gösterir.
	Çember	Açı çemberin içindedir.
	Çember parçası	Açı, tam bir çemberden ayrı olarak çemberin bir parçasında gösterilir.

Not. Tablodaki kategori, kod ve açıklamalar Alyami (2020, s. 24) çalışmasından Türkçe'ye çevrilmiştir.

Bulgular

Bu kısımda öncelikle radyan tanımları ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. K1, K2, K3, K4 ve K5 ders kitaplarının çözümlenmesi sonucunda K1, K2 ve K3 kitaplarında radyan tanımına yer verildiği, K4 ve K5 (temel düzey) kitaplarında radyan tanımına yer verilmediği tespit edilmiştir. K1, K2 ve K3 kitaplarındaki yedi radyan tanımının Alyami'nin (2020) Tablo 3'deki kodlama çerçevesine göre çözümlenme bulguları Tablo 5'de sunulmuştur.

Tablo 5*Ders Kitaplarındaki Radyan Tanımlarına Ait Frekans Tablosu*

Kod	K1 Frekans	K2 Frekans	K3 Frekans	K4 Frekans	K5 Frekans	Toplam Frekans
Açı ölçüsü	2	2	2	0	0	6
Ölçülebilir nitelikler	2	2	2	0	0	6
İlişkisel tanım	0	0	1	0	0	1
Bir radyan tanımı	2	2	1	0	0	5
Birim çember	0	0	0	0	0	0
Standart konum	0	0	0	0	0	0

Tablo 5'den görüldüğü gibi ders kitaplarındaki yedi tanımın altısının içinde yay ve yarıçap uzunluğundan bahsedilerek radyan açı ölçüsünün ölçülebilir niteliklerine yer verilmiştir. Yine ders kitaplarındaki yedi radyan tanımından altısında radyan bir açı ölçüsü olarak ifade edilmiştir. Yedi tanımdan beşinde içinde yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğunun eşit olduğu vurgulanan bir radyan tanımına yer verilmiştir. Sadece bir tanımda ise yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğu arasındaki eşitlik dışındaki orantısal ilişkiye vurgu yapan ilişkisel tanıma yer verilmiştir. Yedi tanımın hiçbirinde yarıçap uzunluğunun 1 olduğu ile ilgili bilgiye yani birim çember anlamına gelecek bir ifadeye yer verilmemiştir. Benzer şekilde hiçbir tanımda açının konumuyla ilgili ifadeye yer verilmemiştir. Tanımlarda ne standart konuma ne de diğer konumlara atıf yapılmamıştır.

K1'de radyan tanımı "Bir çemberde yarıçap uzunluğuna eşit yayın uzunluğunu gören merkez açının ölçüsüne 1 radyan denir ve bu ölçü 1^R ile gösterilir" (Akbaş, 2019, s. 15) şeklinde ifade edilmiştir. Bu tanımda "... merkez açının ölçüsüne ..." ifadesine yer verilerek, radyan açıkça bir açı ölçüsü olarak ifade edilmiştir. Yine bu tanımda yay ve yarıçap uzunluklarına atıfta bulunulmuş dolayısıyla radyan açı ölçüsünün ölçülebilir nitelikleri tanımda ifade edilmiştir. Ancak yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğu arasındaki eşitlik dışındaki orantısal ilişkiye yani ilişkisel tanıma yer verilmemiştir. Sadece "... yarıçap uzunluğuna eşit yayın uzunluğunu ..." ifadesine yer verilerek, yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğunun eşitlik durumuna atıf yapılmış, içinde açı ölçüsünün bir radyan olduğunun açıkça belirtildiği bir radyan tanımına yer verilmiştir. Tanıma "Bir çemberde ..." şeklinde başlandığı için tanım birim çember anlamına gelmemektedir. Bununla birlikte tanımda yarıçapın 1 uzunluğunda olduğuyla ilgili bilgi de yoktur. Benzer şekilde açının konumuyla ilgili bir bilgiye de tanımda yer verilmemiştir. Açının kollarından herhangi birinin yatay konumda olduğu belirtilmemiştir yani standart konuma yer verilmemiştir.

K2'de ise radyan tanımı "Herhangi bir çemberde, yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsüne **bir radyan** denir ve **1 rad** ile gösterilir" (Ulualan, 2019, s. 18) şeklinde verilmiştir. Bu tanımda da K1'deki tanıma benzer şekilde açı ölçüsüne, ölçülebilir niteliklere ve bir radyan tanımına yer verilmiştir.

K1 kitabının sözlük kısmında radyan "Bir çemberde, uzunluğu yarıçapa eşit olan bir yayın belirlediği açının ölçüsü" (Akbaş, 2019, s. 285) şeklinde karşılık bulmuştur. Yine K2 kitabının sözlük kısmında radyan "Birim çemberde, yarıçap uzunluğundaki yayın ölçüsünü bir birim varsayan açı (yay) ölçü birimi" (Ulualan, 2019, s. 285) şeklinde karşılık bulmuştur. Bu iki tanımda yukarıda verilen tanımların özelliklerini birebir taşımaktadır. Buradan söylenebilir ki açıklayıcı metinlerdeki radyan tanımları ile sözlükteki radyan tanımları birbirleriyle uyumludur ve 1 radyana yoğunlaşmaktadır.

K3'de ise radyan tanımları aşağıdaki şekliyle verilmiştir. K1 ve K2'den farklı olarak K3'de hem radyan hem de 1 radyan olmak üzere iki tanım yapılmıştır.

Radyan, merkez açının gördüğü yay uzunluğunun çemberin yarıçap uzunluğuna oranıdır. Bir çemberde yarıçap uzunluğuna eşit uzunluktaki yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 **radyan** denir ve bu, 1 **R** ile gösterilir. Radyan, iki uzunluğun

oranını verir. Bu yüzden radyan açı ölçü birimi, bir gerçek sayı ile ifade edilir (Erduran ve Özdemir, 2019, s. 17).

Radyan tanımında "... yay uzunluğunun yarıçap uzunluğuna oranıdır" ifadesine yer verilerek açının ölçülebilir niteliklerine ve yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğunun ilişkisel özelliklerine yer verilmiştir. Yay uzunluğu ve yarıçap uzunluğu arasındaki eşitlik dışındaki orantısal ilişkiye yer veren tek tanım da budur. Ayrıca bu tanımda radyan açıkça bir açı ölçüsü olarak belirtilmemiş, çemberin yarıçapının 1 olduğu belirtilmeyip birim çembere atıfta bulunulmamış ve açının ışınlarının standart veya diğer konumlarına da yer verilmemiştir. 1 radyan tanımında ise K1 ve K2'deki tanımlara benzer şekilde açı ölçüsüne, ölçülebilir niteliklere ve bir radyan tanımına yer verilmiş olup, ilişkisel tanım, birim çember ve standart konuma yer verilmemiştir. Radyan ve 1 radyan tanımlarından sonra radyan cinsinden açılarla reel sayılar da ilişkilendirilmiştir. Ayrıca K3 kitabının sözlük kısmında radyan "Trigonometride kullanılan açı ölçü birimi" (Erduran ve Özdemir, 2019, s. 348) şeklinde karşılık bulmuştur. Burada radyan sadece açı ölçüsü olarak ifade edilmiştir.

Radyan tanımlarına ilişkin bulgulardan sonra radyan şekil temsilleri ile ilgili bulgulara aşağıda yer verilmiştir. K1, K2 ve K3 kitaplarında radyan tanımlarını açıklayan birer şekle yer verilmişken, K4 ve K5 kitaplarında radyan şekil temsillerine yer verilmemiştir. Yani temel düzey ders kitaplarında radyan şekil temsillerine yer verilmediği görülmüştür. Ayrıca K2 kitabında bir örnek soru ve bir alıştırma sorusunda, K3 kitabında da altı uygulama sorusunda radyan şekil temsillerine yer verilmiştir. Bu yüzden üçü tanımları açıklayan şekil temsili, sekizi soru olmak üzere toplamda 11 radyan şekil temsili çözümlenmiştir. K1, K2 ve K3 kitaplarındaki radyan şekil temsillerinin Alyami'nin (2020) Tablo 4'deki kodlama çerçevesine göre çözümlene bulguları Tablo 6'da sunulmuştur.

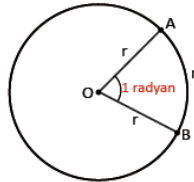
Tablo 6'da görüldüğü gibi tanımları açıklayan radyan şekil temsillerinin tümünde açı ölçüsü bir radyan olarak verilmiştir. Yine tüm tanımlarda ölçülebilir özelliklerden olan yay ve yarıçap uzunlukları sembolik yay uzunluğu ve sembolik yarıçap uzunluğu şeklinde ifade edilmiştir. Tüm tanımlarda açının yerleşimi çember içinde olup, açının ışınlarından herhangi biri yatay konumda verilmemiştir. Yani açıların yerleşimi standart konumda değil diğer yönlendirmeler şeklinde yönlendirilmiştir. Sorulardaki şekillere ait frekanslar incelendiğinde açı ölçüsü büyük çoğunlukla (sekiz şekilden yedisinde) irrasyonel radyan ölçüsü olarak verilmiştir. Bir soruda da açı ölçüsü sembolik açı ölçüsüdür ki bu soruda da bu sembolik açı ölçüsü sorulmaktadır. Sorulardaki açının ölçülebilir özellikleri olan yay ve yarıçap uzunlukları yine büyük çoğunlukla sayısal yay uzunluğu ve sayısal yarıçap şeklinde verilmiştir. Tanımları açıklayan şekil temsillerinin aksine sorulardaki şekil temsillerinin büyük çoğunluğunda (sekiz şekil sorusundan yedisinde) açının ışınlarından en az biri yatay konumda verilmiştir. Yani sorulardaki şekil temsillerinde açıların yönlendirmesi çoğunlukla standart konumda verilmiştir. Tanımları açıklayan şekillerin temsillerine benzer şekilde sorulardaki şekil temsillerindeki tüm açıların yerleşimi de çember içindedir. Hem tanımları açıklayan şekil temsillerinde hem de sorulardaki şekil temsillerinde açıların hiçbir çember parçası içine yerleştirilmemiştir. Farklı olarak sorulardaki şekil temsillerinde açının yerleştirildiği çember çoğunlukla birim çemberdir.

Tanımı açıklayan şekillerin yerleşiminde kartezyen-koordinat düzlemi kullanılmazken sorulardaki şekillerin yerleşimi çoğunlukla (sekiz şekilden altısında) kartezyen-koordinat düzleminde dir.

Tablo 6*Ders Kitaplarındaki Radyan Şekil Temsillerine Ait Frekans Tablosu*

Kategori: Açıklama	Kod	Tanımı açıklayan şekiller Frekans	Sorulardaki şekiller Frekans	Toplam Frekans
Açı ölçüsü: Şekildeki açının ölçüsü	Derece cinsinden sayı	0	0	0
	Bir radyan	3	0	3
	Rasyonel radyan ölçüsü	0	0	0
	İrrasyonel radyan ölçüsü	0	7	7
	Sembolik açı ölçüsü	0	1	1
Ölçülebilir özellikler: Şekildeki radyan açı ölçüsünün yayı ve yarıçapı	Sayısal yay uzunluğu	0	7	7
	Sayısal yarıçap	0	7	7
	Sembolik yay uzunluğu	3	0	3
	Sembolik yarıçap	3	0	3
	Yay uzunluğu yok	0	1	1
Yarıçap yok	0	1	1	
Yönlendirme: Açının konumu	Standart konum	0	7	7
	Diğer yönlendirmeler	3	1	4
Yerleşim: Açıyı çevreleyen elemanlar	Kartezyen-koordinat düzlemi	0	6	6
	Çember	3	8	11
	Çember parçası	0	0	0

K1'deki radyan tanımını açıklayan radyan şekil temsili Şekil 4'de (Akbaş, 2019, s. 15) verilmiştir.

Şekil 4*K1'deki Radyan Tanımını Açıklayan Radyan Şekil Temsili (Akbaş, 2019, s. 15)*

Şekil 4'de görüldüğü gibi açı ölçüsü bir radyan olarak verilmiştir ve yay uzunluğu yarıçap uzunluğuna eşittir. Ölçülebilir özellikler incelendiğinde yay ve yarıçap uzunluğunun sembolik olduğu görülmektedir. Her iki uzunluk da r ile ifade edilmiştir. Açının konumu, ışıklardan en az biri yatay konumda olmadığı için standart konumda değildir. Açının

ışınlarının yönlendirilmesinde diğer yönlendirmeler kullanılmıştır. Aynı zamanda açığı çevreleyen eleman çemberdir. Yani açının yerleşimi çember içindedir. K1'deki iki tanım (açıklayıcı metindeki ve sözlükteki) ile tanımı açıklayan şekil de uyumludur. Tanımdaki açı ölçüsü, ölçülebilir nitelikler ve bir radyan tanımı radyan şekil temsiline yansıtılmıştır. İlişkisel tanım, birim çember ve standart konum ise tanımla uyumlu olarak şekle yansıtılmamıştır. Bu şekilde açı ölçüsü bir *rad* ile sınırlı kalmıştır ve yay uzunluğu ile yarıçapın eşit olduğu sembolik olarak belirtilmiştir. Aynı zamanda bu şekilde yay bir etiket işaretçisi olarak sunulduğu için, bu şekil hem nitel hem nicel unsurlar içerir.

K2'deki radyan tanımını açıklayan radyan şekil temsili de (Ulualan, 2019, s. 18) Şekil 4'deki radyan şekil temsili ile aynıdır. Bu yüzden Şekil 4 için tüm söylenenler K2'deki tanımı açıklayan radyan şekil temsili için de geçerlidir. Ayrıca K2'deki iki tanımla yine tanımı açıklayan şekil temsili de birbiri ile uyumludur. K2'deki şekilde hem nitel hem nicel unsurlar içermektedir.

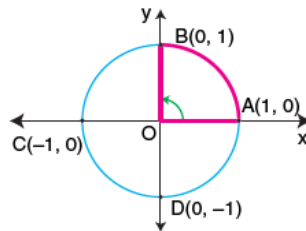
K3'deki radyan tanımını açıklayan radyan şekil temsili de (Erduran ve Özdemir, 2019, s. 17) Şekil 4'deki radyan şekil temsili ile aynıdır. K3'de bulunan iki tanımdan birincisi olan radyan tanımında “**Radyan**, merkez açının gördüğü yay uzunluğunun çemberin yarıçap uzunluğuna oranıdır” ifadesi yer almaktadır (s. 17). Bu ilişkisel tanım şekle yansıtılmamıştır. Şekil üzerinde veya şekil açıklamalarında da Merkez açının radyan ölçüsü = Yay uzunluğu / Yarıçap uzunluğu şeklinde bir açıklamaya yer verilmemiştir. Bunun yerine yine kitapta verilen tanımlardan ikincisi olan 1 radyan tanımının şekle yansıtıldığı görülmektedir ve bu tanım ile şekil uyumludur. K1 ve K2 gibi K3'de hem nitel hem nicel unsurlar içeren bir şekildir.

Yine Tablo 6'dan görüldüğü gibi kitaplardaki sorularda verilen şekillerde ise farklı olarak açı ölçüsü çoğunlukla π içeren irrasyonel açı ölçüsü olarak verilmiştir. Yay ve yarıçap uzunluklarında ise sembollerin yerini sıklıkla sayısal ifadeler almıştır. Sorulardaki şekillerde sıklıkla açılar kartezyen-koordinat düzleminde birim çember içine yerleştirilmiştir. Aşağıda böyle bir örneğe K3'ten yer verilmiştir.

K3'deki böyle bir soruya ait şekil temsili Şekil 5'te (Erduran ve Özdemir, 2019, s. 19) verilmiştir. Soruda açıkça yayın ölçüsünün radyan cinsinden $\pi/2$ olduğu da belirtilmiştir (Erduran ve Özdemir, 2019, s. 19).

Şekil 5

K3'deki Bir Soruda Radyan Şekil Temsili (Erduran ve Özdemir, 2019, s. 19)

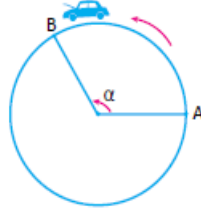


Şekil 5'den görüldüğü gibi radyan tanımını açıklayan şekillerden farklı olarak bu şekilde irrasyonel radyan açı ölçüsü, kartezyen-koordinat düzlemindeki bir birim çemberde verilmiştir. Dolayısıyla yine tanımı açıklayan şekillerden farklı olarak açı standart konumdadır. Standart konumun gereği olarak açığı oluşturan ışıklardan biri yatay konumdadır. Bu şekilde diğer ışıkta dikey konumdadır (Yine K3'te bu şekle benzer iki şekil, radyan açı ölçüsü π ve 2π olan iki açı için verilmiştir. Zihinde hemen canlanacağı gibi o şekillerde açılardan ışıklarının her ikisi de yatay konumdadır). Yine tanımı açıklayan şekillerdeki sembolik yay ve yarıçap uzunluklarından farklı olarak yay ve yarıçap uzunluklarının sayısal olarak verildiği, çemberin eksenleri kestiği noktaların koordinatlarından açıkça görülmektedir. Şekildeki açı ölçüsü de tanımı açıklayan şekil temsillerinden farklı olarak irrasyonel açı ölçüsüdür.

Sorularda verilen şekillerde açı ölçüsünün sıklıkla π içeren irrasyonel açı ölçüsü olarak verildiğini yukarıda belirtmiştik. Bunun dışında kalan farklı bir örnek açı ölçüsünün sembolik verilme durumudur. Açı ölçüsünün bulunmasına yönelik soruda açı ölçüsü sembolik verilmektedir. Bu örneğe K2'den yer verilmiştir. K2'deki bu örneğe ait şekil temsili Şekil 6'da (Ulualan, 2019, s. 19) verilmiştir. Bu şekle ait soruda çap (dolayısıyla yarıçap) ve aracın aldığı yol (dolayısıyla yay uzunluğu) verilmiştir. İstenen α 'nın radyan cinsinden değeridir (Ulualan, 2019, s. 19).

Şekil 6

K2'deki Bir Soruda Radyan Şekil Temsili (Ulualan, 2019, s. 19)



Şekil 6 öğrencilerin nicel akıl yürütmelerine önemli derecede katkı sağlayabilecek şekilde çizilmiştir. Bu tür şekiller öğrencilerin nicel açı ölçüsü geliştirmeleri açısından faydalı olabilir. Soruda aracın aldığı yol π içeren irrasyonel sayı şeklinde, çap da rasyonel sayı şeklinde verilmiştir. Dolayısıyla ölçülebilir özellikler sayısal yay uzunluğu ve sayısal yarıçap şeklinde verilmiştir. Açının yerleşimi çember içindedir. Açı ölçüsü de semboliktir ve bu açının radyan ölçüsü sorulmaktadır. Her ne kadar nicel unsurlar içeren bir şekil olsa da sorunun çözümünde açı ölçüsü yay uzunluğunun yarıçapa oranı şeklinde radyan cinsinden bulunmayıp, önce derece cinsinden bulunup sonra radyana çevrilmiştir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada Türkiye'deki matematik ders kitaplarında yer alan radyan tanım ve şekil temsillerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu kapsamda öncelikle radyan açı ölçüsünün tanımlarının nitel ve nicel açı görüşü ayırımına göre hangi özelliklere sahip olduğu

incelenmiştir. Sonrasında ise radyan açı ölçüsünün şekil temsillerinin nitel ve nicel açı görüşü ayrımına göre hangi özelliklere sahip olduğu ele alınmıştır.

Ders kitaplarında radyan kavramıyla ilgili olarak verilen ilk bilgi radyanın, derece gibi bir açı ölçme birimi olduğudur. Radyan tanımı ve radyanı temsil eden şekilden sonra ders kitapları radyanı derece ölçüsüne dönüştüren formüle odaklanmaktadır. Ancak radyan kavramına niye ihtiyaç duyulduğu, neden iki farklı açı ölçü birimi olduğu gibi bilgiler verilmemiştir. Bu sonuçlarla uyumlu olarak Martinez-Sierra'nın (2008) Meksika'daki ders kitaplarını incelediği çalışmasının sonuçlarına göre de radyan kavramının bir açı ölçü birimi olarak aniden ortaya çıkması derece ve radyan kavramlarının kavramsal olarak ilişkilendirilmesinde zorluklara neden olmaktadır. Maknun, Rosjanuardi ve Jupri'ye (2018) göre öğrenciler trigonometride neden iki açı ölçüsünün olduğunu anlamakta güçlük yaşamakta ve radyanı kullanmaktan kaçınmaktadırlar. Ancak matematiksel titizlik, zarafet ve kolaylık sağlaması gereği radyanı kullanmak bazı durumlarda zorunlu hale gelebilir. Radyan trigonometrik fonksiyonların türev ve integrallerini almada önemli derecede kolaylık sağlamaktadır. Örneğin $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının türev formüllerinin çıkarımı x 'in derece cinsinden değil radyan cinsinden ölçüldüğü kabul edilerek yapılır (Thomas vd., 2009). Radyanın trigonometrideki bu önemine istinaden ders kitaplarında radyanın tanıtılmasıyla ilgili soruna odaklanan Lindkvist (2019) denklemlerin daha basit, daha estetik ve daha anlaşılır olması ve yanlış anlamaların önlenmesi için 2π 'ye eşit olan tau (τ) sabitinin kullanımını önermiştir.

Bu araştırmanın sonuçlarına göre ders kitaplarındaki radyan tanımları radyanın bir açı ölçüsü olduğunu açıkça ifade etmiştir. Ancak Erdem ve Man'a (2018) göre ortaöğretim öğrencileri açı ölçülerini radyan türünden düşünmekte güçlük yaşamaktadırlar. Ayrıca öğrencilerin radyan kavram imgelerine derece kavram imgeleri hâkimdir (Akkoç, 2008). Öğrencilerin açı kavram haritalarında da açı ölçüsünü radyan olarak belirtenlerin sayısı dereceye göre daha azdır (Tuluk, 2015). Derecenin öğrencilerin öğrenim ve günlük hayatlarında daha fazla karşılaştıkları bir açı ölçüsü olması, radyanın daha soyut bir kavram olması bunun sebepleri olabilir ve daha fazla görselleştirmeye bunun üstesinden gelinebilir (Kamber ve Takaci, 2018). Bu bağlamda ders kitaplarında dinamik geometri yazılımlarının kullanıldığı radyan etkinlikleri öğrenciler için faydalı olabilir. Dinamik geometri yazılımlarının trigonometri öğretiminde olumlu sonuçlar verdiğini rapor eden çalışmalar mevcuttur (Yıldırım ve Demir, 2014; Yılmaz vd., 2010). Ayrıca ders kitaplarında 1 radyanın yaklaşık $57,2957^\circ$ olduğu görsel olarak vurgulanırsa öğrenciler tarafından radyanın açı ölçüsü olarak düşünülmesine katkı sağlayabilir. 360° 'nin 2π *rad* olduğu ders kitaplarında vurgulanmasına rağmen yaklaşık 6,28 radyan olduğu da açıkça vurgulanmalıdır. Hatta görsel olarak şekilde çember çevresinde 0 *rad*, 1 *rad*, ..., 6 *rad* işaretlendikten sonra 0 radyanın yaklaşık 6,28 radyana denk düştüğü gösterilirse öğrencilerin radyan kavram imgeleri için faydalı olabilir. Böylelikle öğrencilerde π nin hem bir reel sayı hem de bir açı değeri gibi iki farklı kavram imgesinin (Akkoç, 2008) ortaya çıkmasına engel olunabilir.

Bu araştırma ders kitaplarındaki radyan tanımlarının bir radyan tanımına ve tanımını açıklayan radyan şekil temsillerinin açı ölçüsünün de tanımla uyumlu olacak

şekilde bir radyana odaklandığı sonucunu açıkça ortaya koymaktadır. Benzer şekilde Alyami'nin (2020) çalışmasında da radyan şekil temsillerinin bir radyana odaklandığı sonucuna ulaşılmıştır. Yine radyan tanımlarında ilişkisel tanımın göz ardı edildiği araştırmanın sonuçları arasındadır. Yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğu arasındaki eşitlik dışındaki orantısal ilişkiye yeterince ağırlık verilmemesi öğrencilerin trigonometri öğrenimlerinde nicel akıl yürütmelerini sınırlayan bir etki yaratabilir. Öncelikle bir radyan tanımının verilmesi radyan kavramının öğrenciler tarafından yeterli derecede anlaşılmasına neden olabilir. Literatürdeki çalışmalar öğrencilerin radyan kavramını yeterince anlamadığını ortaya koymaktadır (Güntekin ve Akgün, 2011; Kamber ve Takaci, 2018; Maknun vd., 2018; Orhun, 2004; Steckroth, 2007). Ders kitaplarında öncelikle yay uzunluğu ve yarıçap uzunluğunun eşit olmadığı genel durum için radyan tanımı ve bu tanımı ifade eden radyan şekil temsili verilip, şekil açıklamalarında da nicelik ilişkisinin matematiksel olarak ifade edilmesi öğrenciler için daha faydalı olabilir. Daha sonra eşit olma durumu için bir radyan tanımı ve bir radyan şekil temsili verilmesi, yine şekil açıklamalarında matematiksel ifadelerle radyan tanımından bir radyan tanımına ulaşılması öğrencilerin radyan kavram imgelerini güçlendirebilir. Tüm bunları birim çemberde merkez açı ölçüsünün yay uzunluğuna eşit olması durumunun gösterilmesi takip edebilir. Hem radyan tanımlarındaki hem de radyan şekil temsillerindeki bu genelden özele gidiş öğrenciler tarafından radyan kavramının anlaşılmasına katkı sağlayabileceği gibi onların nicel akıl yürütmeleri üzerindeki sınırlayıcı etkiyi de ortadan kaldırabilir.

Bu çalışmanın başka bir sonucu da radyan tanımı ve tanımı açıklayan şekil temsillerindeki açı ölçüsünün bir radyan, kitaplardaki soruların şekil temsillerindeki açı ölçüsünün de π içeren irrasyonel sayılar (irrasyonel radyan ölçüsü) olduğudur. Öğrencilerin soru çözümlerinde açı ölçüsü olarak π içeren irrasyonel sayılar kullanmaları radyan kavramını π ile ilişkilendirmelerine ve π 'yi radyan ölçü birimi olarak görmelerine sebep olabilmektedir (Akkoc, 2008; Fi, 2003; Topçu vd., 2006). Yine bu tür gösterimler öğrencilerin radyan kavramı ile π içermeyen reel sayıları ilişkilendirememelerine sebep olabilir (Akkoc, 2008; Topçu vd., 2006). Nitekim Alyami (2020) de bu tarz kavram imgelerine nitel radyan temsillerinin sebep olabileceğini belirtmektedir. Ders kitaplarında rasyonel sayılarla ve π içermeyen irrasyonel sayılarla radyanın ilişkilendirilmesi öğrenciler için faydalı olabilir. Ders kitaplarında yay uzunluğu ve yarıçap arasındaki nicel ilişkiyi bu tür sayılarla da çalışmak öğrencilerin bu tür yanılgılarının önüne geçilebilir.

Alyami'nin (2020) çalışmasının sonuçlarından farklı olarak Türkiye'deki ders kitaplarında radyan tanımı ve radyan tanımını açıklayan şekiller birbirleriyle uyumlu olarak standart konumda verilmemiştir. Bu öğrencilerin radyan kavram imgeleri için faydalı olabilir. Vinner ve Hershkowitz'e (1980) göre ders kitapları ve öğretmenler açığı çizerken, bir ışını yatay konumda çizme eğilimindedirler. Dolayısıyla öğrencilerin açı kavramına ilişkin kavram imgeleri de açının kollarından birinin yatay konumda olduğu standart konumdur (Vinner ve Hershkowitz, 1980). Türkiye'deki ders kitaplarındaki radyan tanımlarında ve radyan tanımını açıklayan radyan temsili şekillerde standart konumun kullanılmaması öğrencilerin hem radyan hem de derece cinsinden açı kavram imgeleri açısından olumludur. Öğrencilerin radyan kavram imgeleri, trigonometrik fonksiyonlarla ilgili bilişsel yapılarını oluşturmada bağlantı sağladığından dolayı

trigonometri eğitiminde radyanın önemli bir yere sahip olduğu söylenebilir. Yine Martinez-Sierra'nın (2008) çalışmasının sonuçlarına göre radyanın anlamlandırılmaması trigonometrik fonksiyonların kavramsal inşasında sorunlara neden olmaktadır. Ancak ders kitaplarındaki tüm radyan şekil temsillerinde radyan açı ölçüsünün çember içinde verilmesi, çember parçalarının hiç kullanılmaması öğrencilerin radyan kavram imgelerinin yetersiz kalmasına sebep olabilir. Böyle temsillerin tekrarlı seçilmesi öğrencilerde radyan açı ölçü biriminin sadece çemberde tanımlanabileceği yanılgısını doğurabilir. Yanlış kavram imgeleri biçimsel (formal) tanımların öğrenilmesinde de bir engeldir (Tall ve Vinner, 1981). Dolayısıyla ders kitaplarında radyan şekil temsillerindeki sık tekrar eden özel durumlar (açının çember içinde gösterilmesi gibi) öğrenciler tarafından genel olarak algılanabilir ve onların radyan tanımlarını öğrenmelerinin önünde engel olabilir. Bu doğrultuda ders kitaplarında, öğrencilerin radyan kavram imgelerini güçlendirecek nicel unsurları barındıran radyan şekil temsillerine yer verilmesi tavsiye edilebilir. Sorulardaki şekillerde ise açılar sıklıkla kartezyen-koordinat düzleminde ve birim çember içine yerleştirilmiştir. Bu tercihin sebebi birim çember ve koordinat düzleminin hem akıl yürütmede hem de problem çözmeye iyi birer araç olması olabilir. Öğrencilerin yanlış radyan kavram imgelerine sahip olmaları için tanımları açıklayan şekiller ile sorulardaki şekillerin yönlendirmelerinin standart konum ve diğer yönlendirmelerle farklılaştırılması faydalı olabilir. Yine benzer şekilde ders kitaplarındaki şekillerde verilen açının kartezyen-koordinat düzlemine, çember içine veya çember parçası içine yerleştirilmesi sayesinde farklılığı sağlanması öğrencilerin radyan kavram imgelerine katkı sağlayabilir.

Türkiye'deki ders kitaplarında radyan tanımını açıklayan radyan temsili şekiller hem nitel hem nicel açı ölçüsü görüşüne uygun olarak verilmiştir. Tanımların ve şekillerin bu noktada da birbirini desteklediği söylenebilir. Hem tanımlar hem de tanımları açıklayan şekiller bir radyana odaklandığı için şekiller hem nitel hem nicel unsurlar taşımaktadır. Bu sonuçlar Alyami'nin (2020) sonuçlarıyla uyumludur. Alyami'nin (2020) çalışması da ortaöğretim ders kitaplarındaki radyan açı ölçüsü temsillerinin hem nitel hem de nicel açı görüşünün karışımı olduğunu ortaya koymuştur. Ancak bu çalışmada açının nitel yönlerine yapılan vurgunun daha ağırlıkta olduğu görülmüştür. Thompson'a (2011) göre "nicel akıl yürütme bir durumu nicel olarak hayal etmek için araçlar sağlamaktadır" (s. 43). Bu yönüyle bir radyana odaklanan radyan şekil temsillerinin nicel unsurları yetersizdir ve nicel akıl yürütme için de sınırlı bir imgeye sahiptir. Ders kitaplarındaki radyan temsili şekiller ve radyan tanımlarında yine birbirleri ile uyumlu olacak şekilde yay uzunluğu ile yarıçap uzunluğu arasındaki eşitlik dışındaki orantısal ilişkinin (nicel unsurların) daha ön plana çıkarılması önerilebilir. Bu ilişkinin ön plana çıkarılması trigonometrinin temel taşları olan trigonometrik fonksiyonları öğrencilerin içselleştirmelerine yardımcı olabilir. Öğrenciler bu orantısal ilişkiden elde edilen reel sayılar üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımlayabilirler (Akkoç, 2008) ve grafiklerini çizebilirler. Bu bağlamda teorik çerçevede başlığında verilen nicel şekilde (bkz. Tablo 1, Şekil 2) görüldüğü gibi radyan cinsinden merkez açığı gören yay üzerinde, yarıçap uzunluğu kadar uzunluklar işaretlemek faydalı olabilir. Bunun dışında yine bu bağlamda Moore'nin (2013, s. 228) çalışmasındaki gibi farklı yay ve yarıçap uzunluklarının iç içe verilmesi de fayda sağlayabilir. Bu iç içe yay ve yarıçapların uzunlukları orantılı biçimde arttığı için yay uzunluğunun yarıçap uzunluğuna oranı

değişmez. Diğer bir deyişle yayları gören radyan açı ölçüsü sabittir. Çünkü orantısal bir ilişkide her iki nicelik de aynı sayı ile (sıfırdan farklı) çarpılıp bölündüğünden dolayı bu iki nicelik aynı oranda artar veya azalır (Lobato ve Ellis, 2010). Bu orantısal akıl yürütme büyük yayı gören açı daha büyüktür yanılığını da ortadan kaldırabilir. Bunun dışında tanımı açıklayan metinlerin de matematiksel-geometrik ifadelerle bu nicel ilişkileri göz önüne sermesi önerilebilir. Alyami'nin (2020) çalışmasındaki önerilere paralel şekilde bu araştırmanın sonuçları doğrultusunda da Türkiye'deki ders kitaplarında nicel akıl yürütmeye dayalı trigonometri yaklaşımlarına ağırlık verilmesi tavsiye edilebilir. Moore'nin (2014) çalışmasının sonuçları da nicel akıl yürütmenin trigonometrinin hem öğretiminde hem de öğrenilmesinde önemli bir rol oynadığını açıkça ortaya koymuştur. Ayrıca Moore ve LaForest'e (2014) göre nicel akıl yürütmeye dayalı trigonometri yaklaşımı, açı ölçüleri ve açıyı gören yay ve yarıçap arasındaki nicel ilişkilerin anlaşılması ile başlamaktadır. Bu doğrultuda radyan kavramı özelinde Türkiye'deki matematik ders kitaplarında öğrencilerin açı kavramını bir etiketin daha ötesinde nicelik ilişkileriyle düşünebilecekleri radyan tanım ve şekillerine yer verilmesi tavsiye edilebilir.

Bu çalışmanın verileri sadece 2019-2020 eğitim-öğretim yılında 11. sınıf ortaöğretim matematik derslerinde okutulması kararlaştırılan beş ders kitabından toplanmıştır. Bu çalışmanın bulgularının ötesinde, araştırmacılara gelecekte, öğretmenlerin matematik ders kitaplarını ve diğer öğretim materyallerini kullanarak radyan öğretimlerinde nitel ve nicel açı görüşlerinden hangisinin baskın olduğunu araştırmaları tavsiye edilebilir.

Not

Etik Kurul Onayı: Kırklareli Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar ve Yayın Etiği Kurulu'nun 22.03.2021 tarih ve E-35523585-199-7126 sayılı kararıyla bu çalışmanın yapılmasında etik açıdan sakınca görülmemiştir.

Kaynakça

- Abramson, J. P. (2018). *Precalculus* [eKitap]. OpenStax. <https://shareok.org/handle/11244/301394>
- Akbaş, M. (Haz.). (2019). *Ortaöğretim matematik 11 ders kitabı* (2. Baskı). Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Akkoç, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 857-878. <https://dx.doi.org/10.1080/0020739080 2054458>
- Akkoç, H., ve Akbaş-Gül, N. (2010). Analysis of a teaching approach aiming at eliminating student difficulties with radian. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences (JFES)*, 43(1), 97-129. <https://dx.doi.org/10.1501/Egifak 0000001192>

- Akkoç, H., ve Katmer, V. (2011). Pre-service mathematics teachers' concept images of π . B. Ubuz (Haz.), *Proceedings of the 35th International Conference on the Psychology of Mathematics Education, 1*, s. 243. Ankara, Türkiye. PME.
- Alyami, H. (2020). Textbook representations of radian angle measure: The need to build on the quantitative view of angle. *School Science and Mathematics, 120*(1), 15-28. <https://dx.doi.org/10.1111/ssm.12380>
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2017). *Australian curriculum: Mathematics*. <https://www.australiancurriculum.edu.au/>
- Barrera, A. (2014). Unit circles and inverse trigonometric functions. *Mathematics Teacher, 108*(2), 114-119. <https://dx.doi.org/10.5951/mathteacher.108.2.0114>
- Bowen, G. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27-40. <https://dx.doi.org/10.3316/ORJ0902027>
- Bressoud, D. M. (2010). Historical reflections on teaching trigonometry. *Mathematics Teacher, 104*(2), 106-112. <https://dx.doi.org/10.2307/20876798>
- Creswell, J. W. (2014). *Araştırma deseni: Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları*. (S. B. Demir, Çev.). (4.baskıdan çeviri). Eğiten Kitap.
- Demir, Ö. (2012). *Students' concept development and understanding of sine and cosine functions: A new theoretical and educational approach*. [Yayımlanmamış doktora tezi]. Amsterdam University.
- Eğitim Bilişim Ağı [EBA]. (t.y.). *Ders kitapları*. <https://www.eba.gov.tr/> adresinden 14.01.2020 tarihinde erişildi.
- Erdem, E. ve Man, S. (2018). Ortaokul matematik öğretmenlerinin radyan'a ve özelde π sayısına ilişkin kavramsal bilgileri. *Ege Eğitim Dergisi / Ege Journal of Education, 19*(2), 488-504. <https://dx.doi.org/10.12984/egged.401997>
- Erduran, A. ve Özdemir, M. F. (2019). *Ortaöğretim matematik 11. sınıf ders kitabı*. Top Yayıncılık.
- Euclid. (2013). *Öklid'in öğelerinin 13 kitabından birinci kitap*. (Ö. Öztürk ve D. Pierce, Çev.). California, USA. (Orijinal çalışma: Euclidis elementa, volume I of Euclidis Opera Omnia. Teubner. Edidit et Latine interpretatvs est I. L. Heiberg, 1883). Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Matematik Bölümü.
- Fan, L., Zhu, Y., ve Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM Mathematics Education, 45*(5), 633-646. <https://dx.doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>
- Fi, C. D. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. [Yayımlanmamış doktora tezi]. University of Iowa. <https://dx.doi.org/10.17077/etd.hgi8dv0k>
- Forster, N. (1995). The analysis of company documentation. C. Cassell ve G. Symon içinde, *Qualitative methods in organizational research: A practical guide*. Sage.

- Guba, E. G., ve Lincoln, Y. S. (1982). Epistemological and methodological bases of naturalistic inquiry. *Educational Communication and Technology Journal*, 30(4), 233-252.
- Gökçek, T. ve Hacısalihoğlu-Karadeniz, M. (2013). Ortaöğretimde matematik ders kitabı yerine alternatif kaynakların tercih edilme nedenleri. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 4(1), 20-31.
- Gümüşel, İ. S. ve Deviren, M. E. (2019). *Ortaöğretim matematik temel düzey ders kitabı 11*. MHG Kitap Basım Yayın Ticaret A. Ş.
- Güntekin, H. ve Akgün, L. (2011). Trigonometrik kavramlarla ilgili öğrencilerin sahip olduğu hatalar ve öğrenme güçlükleri. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 40(1), 98-113.
- Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary (Sayı 1)*. (2. baskı). Dover.
- Hertel, J., ve Cullen, C. (2011). Teaching trigonometry: A directed length approach. L. R., Wiest, ve T. Lamberg (Haz.), *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 1400-1407). University of Nevada, Reno.
- Kamber, D., ve Takaci, D. (2018). On problematic aspects in learning trigonometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 161-175. <https://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2017.1357846>
- Keiser, J. M. (2004). Struggles with developing the concept of angle: Comparing sixth-grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(3), 285-306. https://dx.doi.org/10.1207/s1532_7833mtl0603_2
- Kells, L. M. (2014). Radian measure. *AccessScience*. <https://doi.org/10.1036/1097-8542.565900>
- Kupková, E. (2008). *Developing the radian concept understanding and the historical point of view*. Itália: Scienze Matematiche.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. K. Lester Jr. (Haz.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 629-667). Information Age.
- Lindkvist, J. (2019). *The circle constant remastered for less misconceptions: A textual analysis of the introduction of radians in mathematics education textbooks for the Swedish upper secondary school*. Stockholm Universitet, Sweden.
- Lobato, J., ve Ellis, A. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions & proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6–8*. National Council of Teachers of Mathematics.

- Maknun, C. L., Rosjanuardi, R., ve Jupri, A. (2018). Lesson design on the relationship between radian and degree. *AIP Conference Proceeding*. AIP Publishing. <https://dx.doi.org/10.1063/1.5054435>
- Martinez-Sierra, G. (2008, Temmuz). *On the transit from trigonometry to calculus: The case of the conceptual breaks in the construction of the trigonometric functions in school*. [Sözlü sunum] 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Meksika.
- Masal, E. (Haz.). (2019). *Ortaöğretim temel düzey matematik 11 ders kitabı*. Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator*, 1(1), 4-11.
- Mesa, V., ve Goldstein, B. (2017). Conceptions of angles, trigonometric functions, and inverse trigonometric functions in college textbooks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(2), 338-354. <https://dx.doi.org/10.1007/s40753-016-0042-1>
- Miles, M. B., ve Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2.baskı.). Sage Publications, Inc.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları. <http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=343> adresinden 27.01.2019 tarihinde erişildi.
- Ministry of Education, Singapore [MOE]. (2019). *Additional mathematics syllabuses: Secondary three to four express course normal (academic) course*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division. <https://www.moe.gov.sg/secondary/courses> adresinden 28.10.2021 tarihinde erişildi.
- Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 225-245. <https://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9450-6>
- Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 102-138. <https://dx.doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.1.0102>
- Moore, K. C., ve LaForest, K. R. (2014). The circle approach to trigonometry. *Mathematics Teacher*, 107(8), 616-623. <https://dx.doi.org/10.5951/mathteacher.107.8.0616>
- Moyer, R. E., ve Ayers, F. (2018). *Schaum's outline of trigonometry* (6. baskı). McGraw-Hill Education.
- Norum, K. E. (2008). Artifact analysis. L. M. Given (Haz.), *The Sage Encyclopedia of Qualitative Research Methods*, 1, s. 23-25. Sage Publications.

- Orhun, N. (2004). Students' mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 797-820.
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (3. Baskıdan çeviri) (M. Bütün ve S. B. Demir, Çev. Haz.) Pegem Akademi.
- Sampaio, H. R., ve Batista, I. L. (2018). Mathematics history and cognitive values on a didactic sequence: Teaching trigonometry. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 7(3), 311-332. <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.2727>
- Spangenberg, E. D. (2021). Manifesting of pedagogical content knowledge on trigonometry in teachers' practice. *Journal of Pedagogical Research*, 5(3), 135-163. <https://dx.doi.org/10.33902/JPR.2021371325>
- Steckroth, J. J. (2007). *Technology-enhanced mathematics instruction: Effects of visualization on student understanding of trigonometry*. [Yayımlanmamış doktora tezi]. University of Virginia.
- Stitz, C., ve Zeager, J. (2013). *Precalculus* (3. baskı). <https://www.stitz-zeager.com/szprecalculus07042013.pdf>
- Sundstrom, T., ve Schlicker, S. (2020). *Trigonometry*. ScholarWorks@GVSU <https://scholarworks.gvsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1012&context=books>
- Tall, D., ve Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies of Mathematics*, 12(2), 151-169. <https://dx.doi.org/10.1007/BF00305619>
- Tanguay, D., & Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 48(6), 875-894. <https://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5>
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., ve Giordano, F. R. (2009). *Thomas' Calculus*. (11. Baskıdan çeviri). (R. Korkmaz, Çev.). Beta Basım.
- Thompson, P. W. (1990). *A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic*. [Yayımlanmamış taslak]. Center for Research in Mathematics & Science Education, San Diego State University. <http://pat-thompson.net/PDFversions/ATheoryofQuant.pdf>
- Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, ve A. S epulveda (Haz.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Sayı 1, s. 45-64). Mor elia: PME.
- Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. L. L. Hatfield, S. Chamberlain ve S. Belbase (Haz.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*. WISDOMe Monographs (Sayı 1, s. 33- 57). University of Wyoming.

- Topçu, T., Kertil, M., Akkoç, H., Yılmaz, K., ve Önder, O. (2006, Temmuz). Pre-service and in-service mathematics teachers' concept images of radian. J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, ve N. Stehliková (Haz.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Sayı. 5, s. 281-288). Prague, Czech Republic: PME.
- Touval, A. (2009). Walking a radian. *The Mathematics Teacher*, 102(9), 692-696.
- Tuluk, G. (2015). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının açı kavramına ilişkin oluşturdukları kavram haritalarının değerlendirilmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 6(2), 323-337. <http://dx.doi.org/10.16949/turcomat.36234>
- Tuna, A. (2013). A conceptual analysis of the knowledge of prospective mathematics teachers about degree and radian. *World Journal of Education*, 3(4), 1-9. <http://dx.doi.org/10.5430/wje.v3n4p1>
- Ulualan, E. (Haz.). (2019). *Ortaöğretim fen lisesi matematik 11 ders kitabı* (2. Baskı). Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Van Brummelen, G. (2009). *The mathematics of the heavens and the Earth: The early history of trigonometry*. Princeton University Press.
- Vinner, S., ve Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (s. 177-184). Berkeley, California.
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112. <https://dx.doi.org/10.1007/BF03217423>
- Wolbert, R. S., ve Moss, E. R. (2018). Developing the concept of a radian. *The Mathematics Teacher*, 111(4), 272-278. <https://dx.doi.org/10.5951/mathteacher.111.4.0272>
- Yavuz-Mumcu, H., ve Aktürk, T. (2020). Mathematics teachers' understanding of the concept of radian. *Hacettepe University Journal of Education*, 35(2), 320-337. <https://dx.doi.org/10.16986/HUJE.2019053683>
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10. Baskı). Seçkin Yayınevi.
- Yıldırım, İ., ve Demir, S. (2014). Use of technology assisted mathematics education and alternative measurement together. *Cukurova University Faculty of Education Journal*, 42(1), 65-73. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/cuefd/issue/4135/54281>
- Yılmaz, G., Ertem, E. ve Güven, B. (2010). Dinamik geometri yazılımı Cabri'nin 11. sınıf öğrencilerinin trigonometri konusundaki öğrenmelerine etkisi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 1(2), 200-216. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/turkbilmat/issue/21561/231427> adresinden 24.03.2021 tarihinde erişildi.

Investigation of the Definitions of Radian and its Visual Representations in 11th Grade Mathematics Textbooks in Turkey: Qualitative and Quantitative Views of Angle

Abstract

This study aims to examine the definitions of radian and its visual representations in mathematics textbooks in Turkey. The data of this qualitative research consist of five 11th grade upper secondary mathematics textbooks used during the 2019-2020 academic year. Definitions and visual representations of radian angle measurement were analyzed descriptively using Alyami's (2020) framework based on qualitative and quantitative views of angle. According to the findings, the definitions and representations of radian focus on one radian rather than the proportional relationships except the case of equality of arc length and radius. Considering the findings, we propose that the textbooks definitions and visual representations should highlight the quantitative relationships in addition to the case of equality of arc length and radius.

Keywords: Mathematics textbook, qualitative view of angle, quantitative view of angle, radian, teaching of trigonometry