DOI: 10.5961/jhes.2019.320

Üniversite Öğrencilerinin Öklid-Dışı Geometrilere Yönelik Algılarının ve Tasarlanan Öğrenme Ortamlarından Yansımaların İncelenmesi

Examination of Perceptions of University Students on Non-Euclidean Geometries and Reflections from Designed Learning Environments

Timur KOPARAN

ÖZ

Bu araştırma ile üniversite öğrencilerinin Öklid-dışı geometrilere yönelik algılarının ortaya çıkarılması ve Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik oluşturulan öğrenme ortamının etkililiğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda iki uzman görüşü çerçevesinde bir veri toplama aracı geliştirilmiştir. Araştırma verileri Öklid geometrisi, eliptik geometri ve hiperbolik geometri ile ilgili 18 açık uçlu sorudan oluşan veri toplama aracı ve gözlemler yoluyla toplanmıştır. Araştırmanın ilk aşamasında 10 farklı bölümden 37 kadın 29 erkek olmak üzere toplam 66 üniversite son sınıf öğrencisinin Öklid-dışı geometriler hakkındaki bilgileri veri toplama aracı yoluyla toplanmıştır. Elde edilen veriler analiz edilmiş, üniversite öğrencilerinin genel olarak bu konuda bilgi sahibi olmadıkları veya yanlış bilgilere sahip oldukları görülmüştür. İlk aşamada üniversite öğrencilerinin sorularla ilgili düşünme biçimleri ve ne tür öğretim materyallerinin kullanılması gerektiği konusunda bilgi edinilmesi amaçlanmıştır. İkinci aşamada Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik üç haftalık bir program 25'si kadın ve 17'i erkek olmak üzere toplam 42 öğretmen adayına uygulanmıştır. Uygulama sonrasında test yeniden uygulanmıştır. Daha derin bilgiler edinilmesi amacıyla beş öğretmen adayı ile yarı-yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Elde edilen bulgularda öğretmen adaylarının uygulama öncesinde soruları cevaplayamadıkları veya yanlış cevapladığını, uygulama sonrasında ise soruları rahatlıkla cevaplayabildikleri görülmüştür. Bu bulgulardan Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik oluşturulan öğrenme ortamının etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Elde edilen bulgular öğretmen adaylarının ön-test son test cevapları, web destekli çizimlerden alınan anlık görüntüler, somut materyallerin kullanımı ve mülakat kesitleri ile desteklenmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgular doğrultusunda öğretim programlarında Öklid-dışı geometrilere ve öğretimine daha fazla önem verilmesi önerilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Geometri öğretimi, Öklid-dışı geometriler, Öğretmen adayları, Öğrenme ortamı

ABSTRACT

The aim of this study is to investigate the perceptions of university students towards non-Euclidean geometries and to investigate the effectiveness of the learning environment created for the teaching of non-Euclidean geometries. For this purpose, a data collection tool has been developed within the framework of two expert opinions. Research data were collected observations and through a data collection tool consisting of 18 open-ended questions on Euclidean geometry, elliptic geometry, and hyperbolic geometry. In the first phase of the study, information about the non-Euclidean geometries of university students was collected through data collection tool. The students are 66 senior students in 10 different departments (37 females and 29 males). The data obtained were analyzed and it was seen that university students generally did not have any information about this subject or they had incorrect information. In the first stage, it is aimed to get information about the ways of thinking about the questions of university students and what kind of teaching materials should be

Koparan T., (2019). Üniversite öğrencilerinin öklid-dışı geometrilere yönelik algılarının ve tasarlanan öğrenme ortamlarından yansımaların incelenmesi. *Yükseköğretim ve Bilim Dergisi/Journal of Higher Education and Science, 9*(1), 180-191. https://doi.org/10.5961/jhes.2019.320

Timur KOPARAN (✉)
ORCID ID: 0000-0002-3174-2387

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Ereğli Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Zonguldak, Türkiye
Zonguldak Bulent Ecevit University, Eregli Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education, Zonguldak, Turkey
timurkoparan@gmail.com

Geliş Tarihi/*Received* : 30.10.2018
Kabul Tarihi/*Accepted* : 03.01.2019

used. In the second phase, a three-week program for teaching non-Euclidean geometries was applied to a total of 42 (25 females and 17 males) prospective teachers. After the course, the test was re-applied. In order to obtain deeper information, semi-structured interviews were conducted with five prospective teachers. In the findings, it was seen that the prospective teachers could not answer the questions or answer them wrongly before the application and they could answer the questions easily after the application. It was concluded that the learning environment created for teaching non-Euclidean geometries was effective. The findings were supported by pre-test post-test responses of prospective teachers, snapshots from web-supported drawings, use of concrete materials and interview sections. In the light of the findings obtained from the research, it was suggested to give more importance to the non-Euclidean geometries and teaching in the curriculum.

Keywords: Geometry teaching, Non-Euclidean geometries, Prospective teachers, Learning environment

GİRİŞ

Geometri günlük hayatta, diğer bilim dallarında, matematiksel modeller oluşturmada ve problem çözmede yaygın olarak kullanılan bir disiplindir (Aksu, 2005). Geometri, öğretim programlarında bir öğrenme alanı olarak yer almakta ve içerdiği konular ile öğrencilere nesnel ve eleştirel düşünme becerisi, neden-sonuç ilişkilerini ortaya koyabilme becerisi ve sayısal düşünme becerisi geliştirmeyi, öğrencilerin yaşadığı dünyayı daha yakından anlamalarına yardımcı olmayı amaçlamaktadır (Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu, & Akpınar, 2004). Bununla birlikte pek çok öğrenci geometri dersinde zorlanmakta ve başarılı olamamaktadır (Çelebi-Akkaya, 2006).

Hiele ve Hiele (1957) öğrencilerin geometri dersinde zorlanmalarının en önemli nedenlerinden birini, geometri öğretiminde öğrencilerin mevcut geometrik düşünme düzeylerinin dikkate alınmaması olarak ifade etmişler ve Van Hiele geometrik düşünme teorisini geliştirmişlerdir (Usiskin, 1982). Bu teori, bireydeki geometrik düşünmenin gelişiminin hiyerarşik olduğunu ve beş evreden (görsel düzey, analitik düzey, informal tümdengelim, formal tümdengelim ve en ileri düzey) oluştuğunu öne sürmektedir (Altun, 2008; Baki, 2006; Pesen, 2008). Geometrik düşünmenin ilk basamağında, öğrenenler şekilleri görünüşleri itibariyle belirler ve bir bütün olarak tanırlar (Clements & Battista, 1990; Usiskin, 1982). Geometrik şekilleri tanıma bağlı olarak kavrayamazlar (Pesen, 2008). İkinci basamakta öğrenenler, geometrik şekillerin özelliklerini analiz etmeye başlarlar (Clements & Battista, 1990; Crowley, 1987). Bu düzeyde, geometrik cisimleri ve şekilleri özelliklerine göre adlandırma, karşılaştırma ve sınıflama çalışmaları ön plana çıkar (Pesen, 2008). Öğrenciler bu düzeyde, bir şeklin özelliklerini ait olduğu sınıfa genelleyebilirler (Baykul, 2009). Fakat sınıflar arasındaki ilişkileri göremezler (Crowley, 1987). Üçüncü basamak, şekillerin sınıfları arasında ilişki kurmanın mümkün olduğu informal tümdengelim düzeyidir. Bu basamakta öğrenciler bir ispatı izleyebilirler, fakat kendileri ispat yazamazlar (Pesen, 2008; Usiskin, 1982). Öğrencinin aldığı eğitime göre değişmekle birlikte, ilköğretimin ikinci kademesi çoğunlukla bu basamağa denk gelmektedir (Olkun & Toluk, 2007). Dördüncü basamak, formal tümdengelim düzeyidir. Bu düzeydeki öğrenciler aksiyom, teorem ve tanımlara dayalı olarak yapılan bir ispatın anlam ve önemini kavrayabilir (Crowley, 1987; Usiskin, 1982); daha önce tanımlanmış teorem ve aksiyomlardan yararlanarak tümdengelimle başka teoremleri ispatlayabilirler (Olkun & Toluk, 2007). Tümevarım yoluyla akıl yürütme süreçlerini başarabilirler (Pesen, 2008). Geometrik şekillerin özellikleriyle ilgili soyut ilişkiler kurabilirler, sezgiden öteye akıl yürütmeye dayalı sonuç çıkarabilirler (Baykul, 2009). Son basamak en ileri düzeydir; *rigor* (kesinlik) olarak da adlandırılan bu düzeyde öğrenciler değişik aksiyomatik sistemlerin ayrımlarını ve aralarındaki ilişkileri fark edebilirler (Altun, 2008; Baykul, 2009). Değişik aksiyomatik sistemler içerisinde teoremler ortaya atar ve bu sistemler arasında analiz ve karşılaştırma yapabilirler (Olkun & Toluk, 2007). Hiperbolik ve eliptik geometriyi konu edinen Öklid-dışı geometriyi çalışabilirler (Usiskin, 1982). Geometrik düşünme açısından en ileri düzeyde bulunan ve geometriye karşı ilgisi bulunan bir öğrenci geometriyi çalışabileceği bir matematik alanı olarak görebilir (Baykul, 2009; Crowley, 1987). Bu düzey lisans ve lisansüstü yıllarına karşılık gelmektedir (Pesen, 2008). Van Hiele geometrik düşünme teorisine göre bu düzeyler hiyerarşiktir ve öğrenenler bu düzeylerden sıra ile geçerler.

Bir başka zorluk ise geometrinin, tüm teorem ve tanımların oluşturulduğu bir dizi tanımlanmamış terim ve aksiyomdan oluşmuş olmasıdır. Bu nedenle, geometrinin tam olarak anlaşılması, ispatın derinlemesine anlaşılmasını gerektirir; yine de, öğretmenler dar da olsa bir ispat anlayışına sahiptir. Yapılan çalışmalar, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin, ispatların sadece matematiksel kavramlarda kullanılan fikirleri açıklamaya yardımcı olduğuna inandıklarını ve ispat sonuçlarını sistematik hale getirmede ispatın sahip olduğu potansiyelin farkında olmadıklarını ortaya koymaktadır (Knuth, 2002b). Öğretmenler, geometri ispatları için gerekli olan geometri içerik bilgisinde yetersiz ve deneysel kanıtlarla da ikna olmuş durumdadır (Jones, 1997; Knuth 2002a). Yetersiz kanıt ve geometri anlayışı olan öğretmenlerin, öğrencilere yeterli kanıt ve geometri bilgisi vermesi beklenemez (Speer & Kung, 2016). Lisans öncesi derslerdeki öğretmen adayları, ispatlar için hangi argümanların uygun olduğunu yeterince anlayamamaktadır (Weber, 2001). İspat için gerekli olan matematiksel dil ve kavramları anlayamamaktadır ve eksik tanım ve teorem anlayışlarına sahiptirler (Selden, 2012). Alışılagelen doğrudan öğretim ile rehberlik yapılmadan öğrencilerden ispatlar geliştirmeleri beklenmektedir. Rehberlik olmadan, öğrenciler strateji geliştirmede başarısız olmakta veya etkisiz stratejiler geliştirmektedir (Weber, 2001). Bu etkisiz stratejiler tipik olarak, otoriter, ritüel ve algısal ispat şemaları gibi dışsal ve deneysel inançlara dayanan kanıtlama şemalarıdır (Harel & Sowder, 2007). Bir ispatın başarılı bir şekilde yazılabilmesi için, öğrencilerin aksiyomlara ve mantıksal kesintilere dayanan argümanlarla etkili stratejiler veya kanıtlama şemaları kullanmaları gerekir; bu da tanımların anlaşılmasını ve koşullu olarak doğru ifadeler fikrini gerektirir.

Her ne kadar üç boyutlu evrende yaşanıyor olsa da, Öklid geometrisi tüm öğrencilerin tanıdığı ve bildiği bir geometridir. Okul yılları boyunca öğrenciler Öklid geometrisini öğrenmektedir. Çünkü Öklid geometrisi matematik yapmak için kullanışlıdır ve yararlıdır. Bu geometride ortamda edinilen bilgiler öğrencilerin Öklid-dışı geometrilere bakışını etkileyebilir. Öklid-dışı geometrilerde sorgulamaya dayalı bir geometri dersi, öğrencilerin ispat becerilerini geliştirmelerine ve geometrik kavramlarla ilgili anlamalarını derinleştirmelerine yardımcı olabilir. İdeal olarak, tüm öğrenciler Öklid-dışı geometrileri inceleyerek vizyonlarını genişletmelidirler. Fakat kavramsal bilgi ve teknik özellikler, tüm öğrenciler veya geometrik düşüncenin geliştirilmesinde herhangi bir düzeydeki öğrenciler için Öklid-dışı geometrilerin çalışılmasının uygun olmadığını açıkça göstermektedir. Öklid-dışı geometrileri anlama yeteneği Van Hiele modelinde en yüksek gelişme düzeyi olarak tanımlanmıştır. Yani Van Hiele geometrik anlama düzeylerine göre lisans ve lisansüstü öğrencilerinin en üst düzey olan *rigor* düzeyinde olması beklenir. Fakat hem öğretmen, hem de öğrencilerin önceki düzeylerde geometri öğrenme ile ilgili yaşadıkları sıkıntılar son düzeye de yansımaktadır. Bununla birlikte Öklid-dışı geometrilerin öğretiminde konunun doğasından gelen zorluklar da vardır. Öklid-dışı geometrilerin soyut matematiksel yapılar olması ve görselleştirilme zorluğu (Güven & Karataş, 2009), somut materyaller veya çeşitli yazılımlara ihtiyaç duyulması, öğretim programlarında yer verilmemesi, tarihsel açıdan köklerinin eski olması ve Öklid geometrisinin daha ön planda olması, öğretmenlerin bu konuda yeterince bilgi sahibi olmaması, Öklid geometrisi ve Öklid-dışı geometriler arasındaki benzerlik, farklılık, aykırı ve zıt yönlerin yeterince ortaya konulmaması, Öklid-dışı geometrilerin en üst düzeyde düşünme becerileri gerektirmesi (Usiskin, 1982), matematik öğrenme ve aklın geliştirilmesi açısından okullarda öğretim açısından sadece Öklid geometrisinin uygun olması, Öklid-dışı geometrilerin sadece varlığından birkaç cümle ile söz edilmesi ve bu konuda yeterince açıklama yapılmaması gibi nedenlerden dolayı bu konular öğrenciler tarafından hâlâ anlaşılamayan ve merak edilen konular arasında yer almaktadır.

Bu çalışma ile üniversite son sınıf öğrencilerinin Öklid-dışı geometrilere yönelik algılarının ve Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik oluşturulan öğrenme ortamı etkinliğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla öğretmen adaylarının uygulama öncesi ve sonrasında düşünme biçimleri ile web destekli çizimler ve somut materyaller ile desteklenen öğrenme ortamlarına odaklanılmıştır.

Belirlenen araştırma problemleri şunlardır:

1. Stringer aksiyon/eylem araştırması döngüsü kullanılarak üniversite öğrencilerinin Öklid-dışı geometriler ile ilgili algıları ve Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik bir öğrenme ortamı tasarımı ortaya konulabilir mi?
2. Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik tasarlanan öğrenme ortamı, öğretmen adayları üzerinde etkili midir?

YÖNTEM

Bu çalışmada aksiyon/eylem araştırması metodolojisinden yararlanılmıştır. Eylem araştırması, öğretmenlerin kendi ve öğrencilerinin öğrenmelerini geliştirmek için öğretme ve öğrenmeyi araştırdığı bir süreçtir. Bir eleştirel düşünme ve sorgulama yoluyla yaşam kalitesini arttırmak için önceden planlanmış, düzenlenmiş ve işbirlikçi sistemlerin sistematik bir derlemesidir (Johnson, 2002; Mills, 2003). Fraenkel ve Wallen (2003), eylem araştırmasını “bir sorunu çözmek veya bir yerel uygulama hakkında bilgi sağlamak için bilgi toplamak amacıyla bir veya daha fazla kişi veya grup tarafından yürütülen araştırma” olarak tanımlamaktadır. Cohen ve Manion (1996), eylem araştırmasını “eğitim-öğretim sürecinde uygulamada belirli bir anda ortaya çıkan problemi çözmek için geliştirilen yöntemler” olarak tanımlamıştır. Kemmis ve McTagard’ın (1982) tanımında eylem araştırması, öğretmenlerin kendi uygulamalarını, meslektaşlarının uygulamalarını ve uygulamaların sonuçlandırıldığı durumları anlamalarını geliştirmek için öğretmenler tarafından yürütülen katılımcı bir “öz-yansıma çalışması” olarak tanımlanmaktadır. Loftus’a (1999) göre, eylem araştırması “yaparak öğrenmenin” en basit tanımıdır. Eylem araştırması, problem çözme yaklaşımına benzer (Robson, 1993) ve bu araştırmada, araştırmacılar şunları yaparlar: Uygulamalarında ortaya çıkan bir sorunu tanımlar; çözmek için birlikte çalışırlar ve sorunu çözmek için bir strateji geliştirir ve uygularlar. Daha sonra başarılı olup olmadığını değerlendirirler; mevcut durumu olumlu bulmazlarsa, başka bir strateji uygulayarak geliştirirler.

Bu araştırma ile yükseköğretim öğrencilerinin Öklid-dışı geometrilere yönelik algılarının ortaya çıkarılması ve Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik oluşturulan öğrenme ortamının etkinliğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmacı rolü de dikkate alınarak seçilen araştırma yönteminin bu amaca daha iyi hizmet edeceği düşünülmüştür.

Örneklem

Çalışma 2017-2018 Akademik Yılı Bahar Döneminde Batı Karadeniz’de bulunan bir devlet üniversitesinde farklı bölümlerde öğrenim gören son sınıf öğretmen adayları ile yürütülmüştür. Çalışmada iki tür örneklem kullanılmıştır. İlk örneklem veri toplama aracının uygulandığı farklı bölümlerde öğrenim gören 66 son sınıf öğrencisinden oluşmaktadır. Katılımcılarla ilgili bilgiler Tablo 1’de görülmektedir.

Katılımcılar formasyon eğitimi kapsamında ‘öğretim teknolojileri ve materyal geliştirme’ dersini alan Tablo 1’de görülen bölümlerde okuyan öğretmen adaylarından oluşmaktadır. Çalışmanın yazarı aynı zamanda bu dersin yürütücüsüdür. İkinci örneklem ise ön test-müdahale-son test tasarımının uygulandığı 25’si kadın ve 17’i erkek olmak üzere toplam 42 ilköğretim matematik öğretmen adayından oluşmaktadır.

Öklid-Dışı Geometrilerin Öğretimine Yönelik Öğrenme Ortamı

Stringer (2007), aksiyon/eylem araştırmasının her zaman tüm sorunları çözmediğini, ancak bireylerin durumlarına “müdahale edebilecekleri” ve mesleki yaşamlarında karşılaştıkları sorunlara etkili çözümler üretebilmeleri için bir araç sağladığını iddia etmektedir. Stringer, aksiyon araştırması için basit bir

Tablo 1: Araştırmanın İlk Aşamasına Katılan Katılımcılar

Bölüm	Kız	Erkek	Toplam
Moleküler Biyoloji ve Genetik	4	3	7
Bilgisayar Mühendisliği	4	2	6
Harita Mühendisliği	2	4	6
Fizik	4	2	6
Kimya	4	3	7
Matematik	9	5	14
Biyomedikal Mühendisliği	2	2	4
Elektrik- Elektronik Mühendisliği	1	4	5
İnşaat Mühendisliği	1	2	3
Matematik Öğretmenliği	6	2	8
Toplam	**37**	**29**	**66**

güçlü çerçeve oluşturmuştur. Bu çerçeve, insanların sorularına açık bir şekilde başlamasını ve sorunların karmaşıklığı arttıkça prosedürler halinde detaylar oluşturmasını sağlayan temel bir aksiyon araştırması rutini sağlar. Üç adımdan oluşmaktadır. Bu adımlar bak, düşün ve harekete geç şeklindedir. Her bir adımda yapılan eylemler Tablo 2'de görülmektedir.

Tablo 2: Stringer (2007) Geleneksel Araştırma Uygulamaları ile İlgili Rutin Aşamalar

Temel aksiyon/eylem araştırması rutini
Bak • İlgili bilgileri toplama (Veri toplama) • Bir resim çekme: Durumu tanımlama (Belirleme ve tanımlama)
Düşün • Araştır ve analiz et: Ne oluyor? (Analiz) • Yorum ve açıklama: Nasıl ve neden oldukları? (Kuramsallaştırma)
Harekete geç • Plan • Uygulama • Değerlendirme

Bu çalışma ile Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik oluşturulan öğrenme ortamının incelenmesi amaçlanmıştır. Aksiyon araştırması kapsamında yürütülen çalışmada "bak düşün harekete geç" döngüsünden yararlanılmıştır. İlk aşama olan "bak" aşamasında öğretmen adaylarının Öklid-dışı geometriler ile ilgili algılarını ortaya çıkarmak amacıyla veri toplama aracındaki sorulara cevap vermeleri istenmiştir. İkinci aşama olan "düşün" aşamasında elde edilen veriler analiz edilerek öğretmen adaylarının eksik, yanlış bilgileri tespit edilmiş; bunun yanında bu konunun öğretilmesindeki zorluklar belirlenmiştir. Bu zorlukların giderilmesine yönelik öğrenme ortamı tasarımı yapılmıştır. Son aşama olan "harekete geç" aşamasında ise oluşturulan öğrenme ortamı haftada iki ders saati olmak üzere üç hafta uygulamaya konulmuştur.

Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik üç haftalık bir program 42 matematik öğretmeni adayına uygulanmıştır. Bu süreç araştırmacı tarafından gözlemlenmiş ve gözlem notları alınmıştır. Uygulama öncesi ve sonrasında veri toplama aracı ön test ve son test olarak uygulanmıştır. Daha ayrıntılı bilgiler edinilmesi amacıyla beş öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Tablo 3'te üç hafta boyunca derste yapılan etkinlik programı görülmektedir. Tablo 3'te görülen program 'matematik felsefesi' dersinde yürütülmüştür. Dersi alan öğrenciler dört yıllık lisans programının ilk yılında 'geometri' dersi, ikinci yılında 'öğretim teknolojileri ve materyal tasarımı dersi' ve dördüncü yılında 'bilgisayar destekli matematik öğretimi' derslerini almışlardır. Bu derslerde geometri ile ilgili teoremler ve ispatları üzerine çalışmalar yapıp, çeşitli materyaller hazırlamışlardır.

Tablo 3: Öklid-Dışı Geometrilerin Öğretimine Yönelik Ders Programı

Haftalar	Ders içeriği
1. hafta	Yunan matematiği, Öklid geometrisinin temel özellikleri, aksiyom, Öklid'in aksiyomları, postulat, Öklid'in postulatları, Öklid-dışı geometriler üzerine çalışan bazı matematikçiler (Giovanni Gerolamo Saccheri, Ömer Hayyam, Nasireddin Tusi, Carl Friedrich Gauss, Janos Bolyai, Nicolai Lobachevsky, John Wallis, Johann Heinrich Lambert, Adrien-Marie Legendre, Bernhard Riemann)
2. hafta	Hiperbolik geometri ve özellikleri http://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html web sitesindeki bazı etkinliklerin yapılması.
3. hafta	Eliptik geometri ve özellikleri, somut materyaller kullanılarak eliptik geometri ve özelliklerinin incelenmesi.

Veri toplama araçları

Katılımcıların Öklid-dışı geometriler hakkındaki düşünceleri araştırmacılar tarafından hazırlanan 18 maddelik açık uçlu veri toplama aracı ile toplanmıştır. Araştırmacılar tarafından uzman görüşleri alınarak geliştirilen veri toplama aracında iki aşamalı 18 açık uçlu soru bulunmaktadır. Her bir madde Öklid geometrisi veya Öklid-dışı geometriler ile ilgili önermelerden oluşmaktadır. İlk aşamada önermenin doğru ya da yanlış olduğunun belirlenmesi, ikinci aşamada ise önermenin neden doğru veya neden yanlış olduğuna dair açıklama yapılması istenmiştir. İlk aşamada öğretmen adaylarının konu ile ilgili bilgisinin doğru olup olmadığı, ikinci aşamada ise doğru ya da yanlış verilen cevabın ne şekilde gerekçelendirildiğinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca daha ayrıntılı veriler elde etmek amacıyla altı öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Mülakat yapılan öğretmen adayları K1, K2, …, K6 şeklinde kodlanmıştır. Mülakatlarda ses kaydı alınmış ve her bir mülakat 30-35 dakika sürmüştür. Mülakatlarda Tablo 4'te görülen veri toplama aracındaki açık uçlu soruların aynısı sorulmuş, gerektiğinde biraz daha açıklama istenmiştir.

Verilerin analizi

Araştırmanın ilk aşamasında farklı bölümlerden 37 kadın 29 erkek olmak üzere toplam 66 üniversite son sınıf öğrencisinin Öklid-dışı geometriler ile ilgili düşüncelerinin belirlenebilmesi için 18 açık uçlu sorunun bulunduğu veri toplama aracı kullanılmıştır. Elde edilen veriler analiz edilerek aynı zamanda son sınıf öğrencilerinin sorularla ilgili düşünme biçimleri hakkında bilgi sahibi olunmuş, ne tür öğretim materyallerinin kullanılacağı hakkında hazırlıklar bu safhada planlanmıştır. Katılımcıların veri toplama aracındaki her bir soruya vermiş oldukları cevaplar 'doğru', 'yanlış' ve 'cevap yok' şeklinde kategorilendirilmiş, frekans ve yüzde hesaplaması yapılmıştır. Araştırmanın ikinci aşamasında Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik olarak 42 öğretmen adayına üç haftalık bir program uygulanmıştır. Bu süreç, araştırmacı tarafından gözlemlenmiş ve gözlem notları alınmıştır. Uygulama öncesi ve sonrasında veri toplama aracı ön test ve son test olarak uygulanmıştır. Daha ayrıntılı bilgiler edinilmesi amacıyla beş öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yürütülmüştür. Mülakatlarda sorulan sorular, veri toplama aracındaki soruların aynısı olarak belirlenmiştir. Bu mülakatlar kaydedilerek transkripte edilmiş, benzer ve farklı düşünme biçimleri gruplandırılarak katılımcılardan doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Bu şekilde daha ayrıntılı bilgiler sunulması ve nicel verilerin desteklenmesi hedeflenmiştir.

BULGULAR

Bu araştırmadan elde edilen bulgular Stringer (2007) aksiyon araştırması döngüsü ("bak, düşün, harekete geç") bağlamında sunulmuştur.

"Bak" Aşaması

Veri toplama aracındaki 18 açık uçlu sorudan elde edilen veriler, analiz edilerek Tablo 4'te sunulmuştur. Bu aşama aksiyon/eylem araştırmasının ilk aşaması olan "Bak" aşamasıdır. Bu aşa-

Tablo 4: Katılımcıların Açık Uçlu Sorulara Verdikleri Cevapların Sınıflandırılması

	Sorular	D (%)	Y (%)	Cevap Yok (%)
1	"Öklid'in üçgen postulatı diğer matematikçiler tarafından kabul edilmedi ve sonunda Öklid olmayan geometrilerin ortaya çıkmasına yol açtı"	6 (9)	**47 (71)**	13 (20)
2	"Bir doğru ve doğru-dışında bir nokta verildiğinde bu noktadan geçen ve doğruya paralel olan bir tek doğru mevcuttur"	3 (4)	**62 (94)**	1 (2)
3	"Pisagor teoremi tüm geometrilerde geçerli olan bir teoremdir"	9 (14)	**47 (71)**	10 (15)
4	"Bir üçgenin iç açıları toplamı her zaman 180 derecedir. Bu değerden büyük ya da küçük olamaz"	12 (18)	**54 (82)**	-
5	"İki nokta arasındaki en kısa mesafe her zaman bir doğru parçasıdır"	6 (9)	**59 (89)**	1 (2)
6	"Üç dik açıdan oluşan bir üçgen çizilebilir"	5 (8)	**61 (92)**	-
7	"Öklid'in beşinci postulatı yanlıştır"	14 (21)	**26 (39.5)**	**26 (39.5)**
8	"Genel olarak üç tür Öklid-dışı geometri vardır"	4 (6)	30 (45.5)	**32 (48.5)**
9	"Öklid-dışı geometrilerin ortaya çıkmasına Öklid'in beşinci postulatı neden olmuştur"	**28 (42)**	11 (17)	27 (41)
10	"Eliptik geometride iki noktayı birleştiren birden fazla doğru olabilir"	12 (18)	25 (38)	**29 (44)**
11	"Eliptik geometride paralel doğrular yoktur"	11 (17)	24 (36)	**31 (47)**
12	"Eliptik geometride bir doğru sınırlıdır"	8 (12)	26 (39.5)	**32 (48.5)**
13	"Eliptik geometride bir üçgenin iç açıları toplamı 540 dereceye yaklaşır"	8 (12)	23 (35)	**35 (53)**
14	"Hiperbolik geometride üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden büyüktür"	8 (12)	26 (39.5)	**32 (48.5)**
15	"Hiperbolik geometride maksimum bir üçgen alanı vardır"	9 (14)	21 (32)	**36 (54)**
16	"Hiperbolik geometride benzer üçgenler yoktur"	5 (8)	27 (41)	**34 (51)**
17	"Hiperbolik geometride bir doğrunun maksimum uzunluğu vardır"	5 (8)	28 (42)	**33 (50)**
18	"Çok küçük ölçeklerde Öklid-dışı geometri, Öklid geometrisi ile aynıdır"	17 (26)	11 (17)	**38 (57)**

mada son sınıf üniversite öğrencilerinin Öklid-dışı geometriler hakkındaki mevcut bilgilerinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Aynı zamanda bu aşamada öğrencilerin sorularla ilgili düşünme biçimleri hakkında bilgi sahibi olunmuş; ne tür öğretim materyallerinin kullanılacağı hakkında hazırlıklar bu safhada planlanmaya başlamıştır.

Tablo 4'ten de görüldüğü gibi veri toplama aracındaki ilk yedi soruya katılımcıların çoğunluğunun yanlış cevap verdiği, dokuzuncu soru dışındaki diğer sorularda da çoğunluğun soruları cevapsız bıraktığı veya soru hakkında bilgi sahibi olmadıklarını ifade ettikleri görülmüştür. Dokuzuncu soruda katılımcıların bir kısmı (%42), Öklid-dışı geometrilerin ortaya çıkmasında Öklid'in beşinci postulatının etkisi olduğunu ifade etmiş olsa da, genel olarak bu konuda yeterli bilgilere sahip olmadıkları söylenebilir. Tablodaki dağılımlar katılımcıların Öklid-dışı geometrilere yönelik algılarının oldukça düşük olduğunu, Öklid-dışı geometrilerin özellikleri, benzer ve farklı yönleri hakkında bilgi sahibi olmadıklarını göstermektedir.

"Düşün" Aşaması

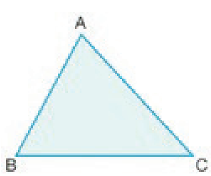
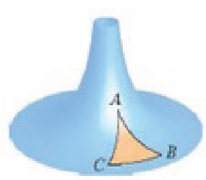
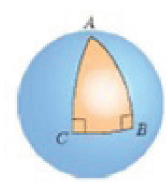
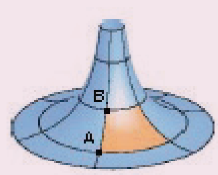
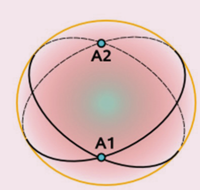
İlk aşama olan "bak" aşamasında elde edilen verilerin analiz edilmesi sonucu katılımcıların Öklid-dışı geometriler hakkında yeterince bilgi sahibi olmadığı ve Öklid geometrisi ile Öklid-dışı geometrilerin benzer ve farklı yönlerinin incelenmesi gerektiği ortaya çıkmıştır. İkinci aşama olan "düşün" aşamasında öğrenme ortamına taşınması gereken durumlara odaklanılmıştır. Bu amaçla Tablo 5'te görülen temel özelliklerin öğrenme ortamına mutlaka taşınması gerektiği, görülen bu teorik bilgilere katılımcıların kendilerinin ulaşması için planlama ve uygulamalar yapılması gerektiği düşünülmüştür.

"Harekete Geç" Aşaması

Plan: Harekete geç aşamasının plan bölümünde Tablo 5'te görülen bilgilere ek olarak hiperbolik geometri ve özellikleri ile ilgili çalışmalarda web destekli öğrenme (http://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html) ortamından yararlanılması, eliptik geometri ve özellikleri ile ilgili etkinlerde de bazı somut materyaller tasarlanması planlanmıştır.

Uygulama: Harekete geç aşamasının uygulama bölümünde, plan aşamasında kullanılması tasarlanan materyallerin öğrenme ortamına taşınması ve öğretmen adayları tarafından kullanılması sağlanmıştır. Bu materyallerden bazıları ve kullanımı ile

Tablo 5: Öklid ve Öklid-Dışı Geometrilerin Benzer ve Farklı Özellikleri

Öklid Geometrisi **Euclid (M. Ö. 300)**	**Hiperbolik Geometri** **Lobachevsky, Bolyai (1830)**	**Eliptik Geometri** **Riemann (1850)**
Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir paralel doğru çizilebilir	Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel doğru çizilebilir	Paralel doğrular yoktur
Geometri bir düzlem üzerindedir	Geometri aykırı küre üzerindedir	Geometri bir küre üzerindedir
Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 derecedir  	Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden daha küçüktür  	Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden daha büyüktür 
İki noktadan yalnız bir doğru geçer  	İki noktadan yalnız bir doğru geçer  	İki farklı nokta en az bir doğru belirler 
Birbirine paralel iki doğru eşit uzaklıktadır	Hiçbir zaman eşit uzaklıkta değildir	Paralel doğrular yoktur
Karşılıklı açıları eşit olan iki üçgen benzerdir	Karşılıklı açıları eşit olan iki üçgen eştir	Karşılıklı açıları eşit olan iki üçgen eştir
Aynı doğruya paralel olan iki doğru paraleldir	Aynı doğruya paralel olan iki doğru paraleldir	Paralel doğrular yoktur
Eğer bir doğru birbirine paralel olan iki doğrudan birini kesiyorsa, mutlaka diğerini de keser	Eğer bir doğru birbirine paralel olan iki doğrudan birini kesiyorsa, diğerini kesebilir veya kesmeyebilir	Paralel doğrular yoktur

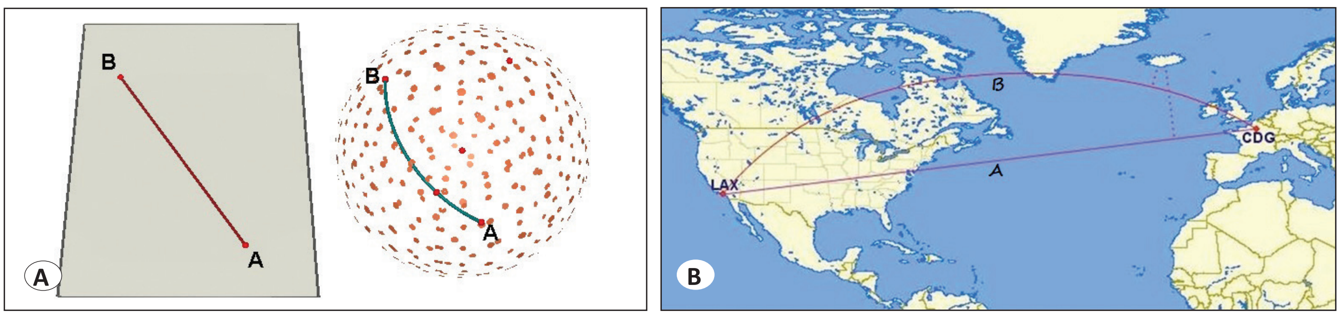
ilgili açıklamalar Şekil 1, Şekil 2, Şekil 3, Şekil 4, Şekil 5 ve Tablo 6'da sunulmuştur.

Şekil 1A'da da görüldüğü gibi Öklid geometrisinde iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bir doğru parçası iken, eliptik geometride ise iki nokta arasındaki uzaklık bir eğridir. Bu durum gerçek dünya ile şu şekilde ilişkilendirilmiştir. Şekil 1B'de Newyork- Madrid arası (A yolu) harita üzerinde 3707 mil, Newyork- Madrid arası küre yüzeyi üzerinde (B yolu) 3605 mil mesafededir.

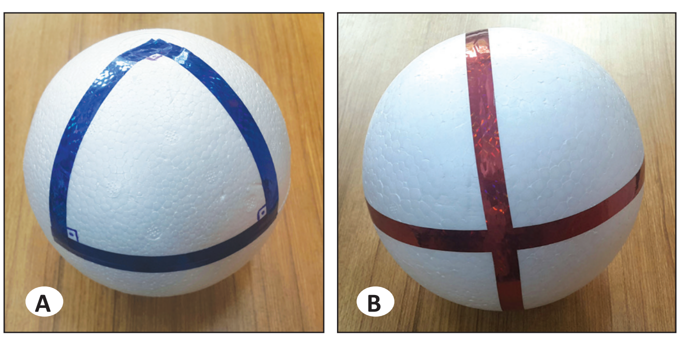
Üç iç açısı 90 derece olan bir üçgen olup olamayacağı sorulmuştur. Katılımcıların %92'si bu soruya 'yanlış' cevap vermiştir. Bu soruya yanlış cevap verenlerin büyük bir çoğunluğunun bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir, dolayısıyla üç açısı da dik olan bir üçgen çizilemeyeceğini ifade ettikleri görülmüştür. Üç iç açısı 90 derece olan üçgenin varlığına yönelik Şekil 2A'da görülen küre yüzeyi üzerinde oluşturulan üçgen modeli kullanılmıştır. Yani üçgen küre yüzeyine çizilirse bu durum gerçekleşebilir. Şekil 2B modeli ise eliptik geometride iki noktayı birleştiren birden fazla doğru olabileceğinin farkına varılması için kullanılmıştır.

Şekil 3A ve Şekil 3B eliptik geometride bir doğrunun sınırlı olduğunu anlaşılmasına yönelik bir modeldir. Bu durum ekvator çizgisi ile ilişkilendirilmiştir. Ekvator çizgisi küre yüzeyinde bir doğru olarak düşünülebilir. Dünyanın çevresi yaklaşık 40000 km'dir. Yani küre üzerinde bir doğru sınırlıdır. Modelde de küre üzerindeki doğrunun (büyük çember) 44 cm olduğu görülmektedir.

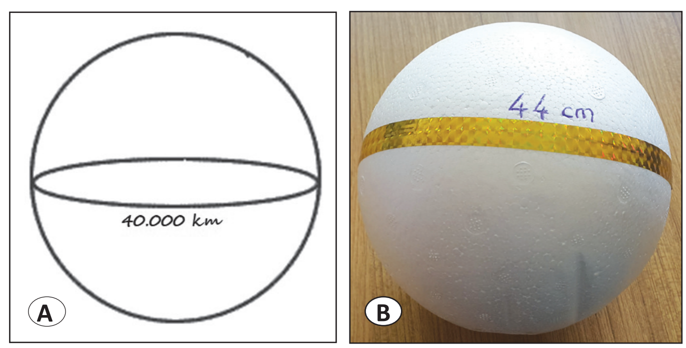
Şekil 4'ten de görüldüğü gibi eliptik geometride bir üçgenin bir iç açısının yaklaştığı değer 180 derecedir. Dolayısıyla iç açıların toplamı da 540 dereceye yaklaşmaktadır. Şekil 4B'de iç açıları 150-150-145 derece olan bir model oluşturulmuş, böylece iç açıların 180 derece olması durumunda ne olacağına ilişkin bir fikir oluşması sağlanmaya çalışılmıştır.



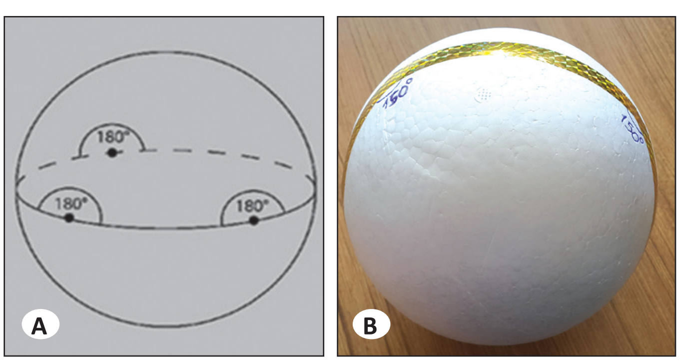
Şekil 1: Öklid ve eliptik geometride doğrular.



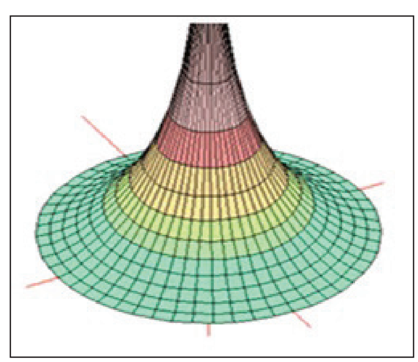
Şekil 2A, B: Eliptik geometride üçgen ve doğrular.



Şekil 3A, B: Öklid ve eliptik geometride doğrular.



Şekil 4A, B: Öklid ve eliptik geometride doğrular.



Şekil 5: Hiperbolik geometride bir doğrunun uzunluğu.

Tablo 6'dan da görüldüğü gibi web destekli öğrenme ortamında öğretmen adayları hiperbolik geometride farklı üçgenler oluşturmuş ve kenar uzunlukları, iç açıları, iç açılar toplamı ve alanları hesaplamışlardır. Böylece tablodaki verilerden yola çıkarak hiperbolik üçgende iç açılar toplamının 180 dereceden küçük olduğu, maksimum bir üçgen alanı olduğu, hiperbolik geometride üçgenin iç açıları toplamı küçüldükçe kenar uzunluklarının büyüdüğü, bu sebepten dolayı da hiperbolik geometride benzer üçgenler kavramının olamayacağı gibi bir takım genellemelere ulaşılması hedeflenmiştir.

Hiperbolik geometride bir doğrunun maksimum uzunluğunun olmadığı ise Şekil 5'te görülen model ile ifade edilmeye çalışılmıştır.

Değerlendirme

Bu bölümde matematik öğretmeni adaylarının veri toplama aracındaki açık uçlu sorulara uygulama öncesinde ve uygulama sonrasında verdikleri cevaplar incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 6'da sunulmuştur. Şekil 6'dan da görüldüğü gibi uygulama sonrasında doğru cevapların sayısında belirgin bir artış görülmektedir. Bu durumun öğretmen adaylarının uygulama öncesinde Öklid-dışı geometriler hakkında çok az bilgiye sahip olmasından ve tasarlanan öğrenme ortamı sayesinde öğretmen adaylarının bu konuda temel bilgileri edinmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

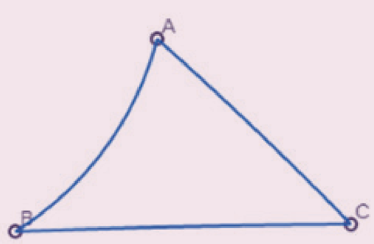
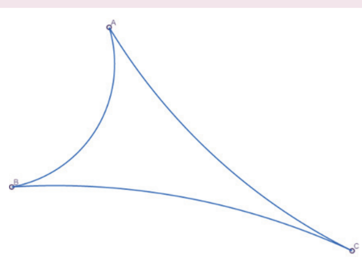
Öğretmen adaylarının uygulama süreci ile değişen düşüncelerini daha ayrıntılı yansıtmak amacıyla mülakatlardan elde edilen kesitlere yer verilmiştir. Mülakata katılan öğretmen adaylarının veri toplama aracındaki sorulara uygulama öncesi ve uygulama sonrası vermiş oldukları cevaplar Tablo 7'de sunulmuştur.

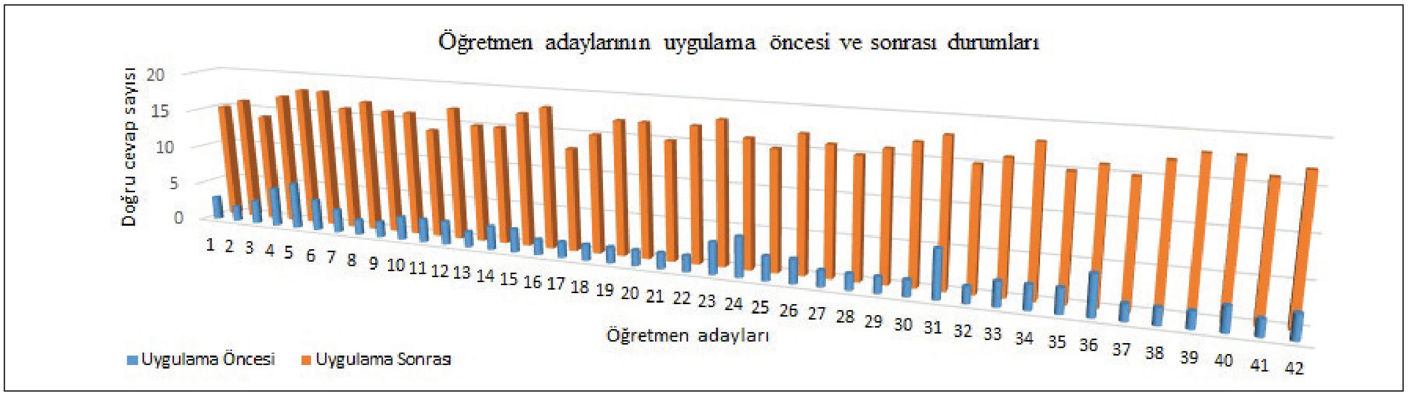
Tablo 7 incelendiğinde öğretmen adaylarının uygulama öncesi görüşleri ile uygulama sonrası görüşlerinde farklılıklar olduğu görülmektedir. Bu durum ön mülakatta yanılgıya düşen öğretmen adaylarının son mülakatta aynı hataları yapmadığını göstermektedir. Bu değişikliklerin gerçekleşmesinde tasarlanan öğrenme ortamının ve öğretmen adaylarının öğretim materyalleri ile etkileşiminin etkisinin olduğu söylenebilir.

TARTIŞMA

Bu çalışmada katılımcıların Öklid geometrisi ile ilgili sorulara kısmen doğru cevaplar verdiği fakat Öklid-dışı geometrilerde başarılı olamadıkları görülmüştür. Katılımcıların önceden Öklid geometrisi ile edinmiş oldukları bilgileri daha tanıdık bir probleme uygulamaktan ziyade her yeni durumu anlamaya çalıştıkları ve çok zorlandıkları dikkati çekmiştir. Bazı öğretmen adaylarının ise birden fazla geometri söz konusu olunca, bunlardan birinin doğru, diğerlerinin yanlış olduğu düşüncesine sahip olduğu görülmüştür. Bu durum katılımcıların tamamına yakınının geometrik düşünme düzeylerinden beşinci düzeye ulaşamadıklarını göstermektedir. Bu çalışmada elde edilen bu bulgu, öğretmen adaylarının yalnızca %1'inin beşinci düzey seviyesine ulaşabildiğini ortaya koyan araştırmalar (Pesen, 2008; Toluk, Olkun ve Durmuş, 2002) ile benzerlik gösterirken, Üzel ve Özdemir (2009) tarafından yapılan araştırma ile farklılık

Tablo 6: Hiperbolik Geometri İle Etkinlik Örnekleri

Durum	Hiperbolik Geometride Üçgenler	Kenar Uzunlukları ve Açılar	İç Açılar Toplamı	Alan
1. durum		$\|BC\| = 1.74$ $\|AC\| = 0.66$ $\|AB\| = 1.09$ $A = 161.2$ $B = 4.8$ $C = 8.9$	174.9	5.1
2. durum		$\|BC\| = 1.74$ $\|AC\| = 1.22$ $\|AB\| = 1.55$ $A = 62.6$ $B = 30$ $C = 46.3$	139	41
3. durum		$\|BC\| = 7.15$ $\|AC\| = 6.41$ $\|AB\| = 4.96$ $A = 14.1$ $B = 6.6$ $C = 1.5$	22.3	157.7



Şekil 6: Uygulama öncesi ve uygulama sonrası öğretmen adaylarının doğru cevap sayıları.

Tablo 7: Mülakat Yapılan Katılımcıların Uygulama Öncesi ve Sonrası Görüşlerinden Kesitler

Soru	Ön mülakat	Son mülakat
1	**K2:** *“Öklid’in üçgen postulatı diğer matematikçiler tarafından kabul edilmiştir. Kabul edilmeme durumu yok. Kabul ettiler, onlar da başka geometriler buldular”*	**K2:** *“Öklid’in üçgen postulatı yoktur”* **K5:** *“Böyle bir postulat yok”*
2	**K1:** *“Çünkü diğer geometrilerde paralel doğrular yoktur. Paralel eğriler vardır”*	**K1:** *“Bu tüm geometriler için doğru değildir. Örneğin hiperbolik geometride bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz paralel doğru çizilebilir. Eliptik geometride ise paralel doğrular yoktur”*
3	**K1:** *“Tüm geometrilerde geçerli olmaz. Farklı geometrilerde üçgenin iç açıları toplamı bile değişebildiğinden diğer geometrilerde Pisagor Teoremi geçerli olmayabilir”* **K3:** *“Pisagor bulduysa her zaman geçerlidir”* **K5:** *“Bence Pisagor teoremi tüm geometrilerde her zaman geçerlidir”*	**K1:** *“Pisagor teoremi Öklid-dışı geometrilerde geçerli olmaz”* **K5:** *“Öklid-dışı geometrinin belirleyici faktörü, paralellik postulatına uymamasıdır. Pisagor teoremini kanıtlamak için paralellik postulatı gereklidir. Bu nedenle Pisagor teoremi Öklid-dışı geometrilerde geçerli değildir”*
4	**K1:***“Düzlem geometrisinde doğru diyebiliriz. Ama yüzey düzlem değilse doğru olmayabilir”* **K2:** *“Başka geometriler de vardır. Her zaman 180 derece olmaz. Mesela küresel geometri de farklı durumlar söz konusu.”* **K4:** *“Bence üçgenin iç açıları toplamı her zaman 180 derecedir”* **K6:** *“Tüm geometrilerde geçerli olmaz diye düşünüyorum. Ama nedenini bilmiyorum.”*	**K2:** *“Eliptik ve hiperbolik geometride farklıdır”* ***K6:*** *“Üçgenin iç açıları toplamı Öklid geometrisinde 180 derecedir. Hiperbolik geometride 180 dereceden az, eliptik geometride 180 dereceden büyüktür”*
5	**K2:** *“Noktalar çakışık ise tek nokta olur ve mesafe söz konusu olmaz”* **K4:***“Noktalar nasıl olursa olsun iki nokta arasındaki uzaklık bir doğru parçası olur”* **K6:** *“Sonsuzda iki nokta alırsak aralarındaki mesafe sonsuz olur”*	**K4:** *“Öklid geometrisinde iki nokta arasındaki mesafe doğru parçasıdır. Eliptik geometride en kısa mesafe doğru değil eğri olur”*
6	**K1:** *“Üçgenin iç açıları toplamı 180 derece olduğundan üçgenin üç dik açısı olamaz”* **K2:** *“Bir üçgenin en fazla bir dik açısı olabilir”* **K5:** *“Üç dik açının toplamı 90+90+90=270 derecedir fakat bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir bu nedenle üç dik açılı üçgen olamaz”* **K6:** *“Üç dik açının toplamı 180 olmadığı için böyle bir üçgen çizilemez”*	**K1:** *“Küre üzerinde çizersek olabilir”* **K5:** *“Eliptik geometride üçgenin iç açıları toplamı 270 derece olabilir. Çünkü iç açılar toplamı 540 dereceye kadar yaklaşır”*

Tablo 7: Devam

Soru	Ön mülakat	Son mülakat
7	**K2:** *"Öklid'in çalışmalarının yanlış olacağını düşünmüyorum"* **K3:** *"Postulat kesin olan demektir"* **K4:** *"Yanlış değildir sadece bazı geometriciler tarafından kabul edilmiyor"* **K5:** *"Bunu yanlışlayanlardan biri Reimann'dır. Reimann geometrisi ortaya çıkmıştır."*	**K2:** *"Öklid'in beşinci postulatı her zaman doğru değildir sadece Öklid geometrisinde geçerlidir. Öklid-dışı geometrilerde geçerli değildir"* **K4:** *"Bir postulatın doğru olup olmamasından ziyade hangi geometrilerde geçerli olup olmadığı ile ilgilenmeliyiz"*
8	**K3:** *"Bence doğrudur. Üç tür Öklid-dışı geometri vardır. Bunlar; hiperbolik, küresel ve eliptik geometridir"* **K4:** *"Bilmiyorum"*	**K3**: *"Öklid-dışı geometriler genel olarak iki türdür. Hiperbolik geometri ve Eliptik geometri"*
9	**K2:** *"Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir paralel doğru çizilebilir"* **K6:** *"Öklid'in beşinci postulatı yoktur"*	**K6:** *"Doğru üzerinde olmayan bir noktadan doğruya yalnız bir paralel çizilebilir (Euclid geometrisi), birden fazla paralel çizilebilir (Hiperbolik geometri-Lobachesky), hiç paralel çizilemez (Eliptik geometri- Reimann)"*
10	**K1:** *"Bu konuda bilgim yok"*	**K1:** *" Küre üzerinden gidersek, iki noktadan geçen birden fazla doğru olabilir. Bu doğruların hepsi büyük çemberlerdir"*
11	**K5:** *"Dünya üzerinde paraleller vardır"*	**K5:** *"Küre üzerinde büyük çemberler birbirini mutlaka keser. Bu nedenle eliptik geometride paralel doğrular yoktur"*
12	**K1:** *"Öklid geometrisinde doğru sınırsızdır. Eliptik geometride de doğru sınırsızdır diye düşünüyorum"* **K2:** *"Doğru sınırlı olmaz diye düşünüyorum. Sınırsızdır her zaman"*	**K2:** *"Küre üzerinde doğrular sınırlıdır"* **K5:** *"Ekvator çizgisini düşünelim. Uzunluğu bellidir yani sınırlıdır"*
13	**K3:** *"Bilmiyorum"*	**K3:** *Eliptik geometride bir üçgenin her bir açısı maksimum 180° yaklaşabileceğinden açılarının maksimum toplamı 540 ° ye yaklaşır*
14	**K1:** *"Doğrudur"*	**K1:** *"Yanlıştır. Hiperbolik geometride iç açılar toplamı 180 dereceden küçüktür. Eliptik geometride 180 dereceden büyüktür"*
15	**K5:***"Bence yoktur. Minimum üçgen alanı vardır.".*	**K5:** *"Vardır. Açılar küçüldükçe üçgenin alanı büyür"*
16	**K6:** *"Benzer üçgenler olmalıdır. Benzer özellikleri vardır ama birebir aynı değildir"*	**K6:** *"Benzer üçgenler yoktur. Çünkü üçgenin kenarları değiştikçe açıları da değişir. Hiperbolik geometride benzerlik yoktur eşlik vardır"*
17	**K3:** *"Doğru olabilir. Cevabını bilmiyorum"*	**K3:** *"Doğrular sonsuzda bulunan tek bir sınır noktasından geçen paralel doğrulardır. Dolayısıyla doğrular sınırsızdır"* **K4:** *"Yanlıştır. Çünkü doğrular sınırlı değildir"*
18	**K6:** *"Ölçekler küçülse bile geometriler farklı geometrilerde işler farklıdır aynı olamaz"*	**K6:** *"Öklid geometrisi düzlemlerde ve Dünya yüzeyi gibi eğik olmakla birlikte eğikliğin göz ardı edilebileceği küçük ölçeklerde doğru işlemektedir"*

göstermektedir. Üzel ve Özdemir (2009), matematik öğretmeni adaylarının yaklaşık yarısının beşinci düzeye ulaşabildiğini saptamışlardır.

Okullardaki geometrik aktivitelerin çoğunun dördüncü düzeyde yoğunlaşmasından dolayı ne yazık ki çoğu araştırmacı beşinci düzeyi ihmal etmiştir. Bununla birlikte uygulanan içerik ve öğretim yöntemleri, bir seviyeden diğerine ilerlemedeki karar verici faktörler olduğundan, dördüncü düzeyde etkin bir şekilde çalışan öğrencileri, beşinci düzeye uygun içerik ve etkinliklere maruz bırakmayarak, öğretmenler öğrencilerinin geometrik potansiyellerini geliştirme ve tamamlama fırsatından mahrum etmektedirler. Öklid-dışı geometrileri inceleyerek, bir öğrencinin dördüncü düzeyden beşinci düzeye ilerlemesi kolaylaştırılabilir. Nitekim öğrencilerin yer aldığı geometrik düşünme düzeyine uygun bir öğrenme ortamı oluşturulması oldukça önem arz etmektedir (Olkun & Toluk, 2007). Böyle bir öğrenme ortamının oluşturulması öğretmenlerin sorumluluğundadır (Özden, 2008; 2010).

Bu araştırmada elde edilen bulgular sonucunda, öğretmen adaylarının uygulama öncesinde Öklid-dışı geometriler hakkında eksik ve yanlış bilgilere sahip oldukları, uygulama sonrasında öğretmen adaylarının verilen önermelerle ilgili doğru ve yeterli açıklamalar yapabildikleri görülmüştür. Bu değişimin oluşturulan öğrenme ortamından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu çalışma aynı zamanda şu soruya rehberlik etmiştir: Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik oluşturulan öğrenme ortamı, öğretmen adaylarının daha iyi anlamalarına nasıl yardımcı oldu?

Öklid-dışı geometriler ile ilgili sorular uygulamalar öncesinde öğretmen adaylarına sorularak soruların cevaplarına yönelik bir ihtiyaç ve merak uyandırılmıştır. Sorular mümkün olduğunca açık uçlu olarak tasarlanmaya çalışılmış, sonra da bu beklentinin sınıfta da korunmasına çalışılmıştır. Üç haftalık programın yapısı, öğretmen adaylarının tanımlar ve postulatlar hakkındaki algılarını ve bunları birbirleriyle paylaşma fırsatlarını en üst düzeye çıkarmıştır. Öklid-dışı geometrilerin öğretimine yönelik oluşturulan öğrenme ortamının, öğretmen adaylarının formal tanımları daha iyi anlamalarına yardımcı olmada anahtar rol oynamıştır. Bu çalışmada veri toplama aracındaki önermeler yüzeysel olarak değil derinlemesine irdelenmiştir. Öklid-dışı geometriler ile ilgili bir anlayış geliştirmelerine izin verecek kadar farklı önermeler sunulmuştur. Geometri, Türkiye'deki öğrencilerinin uluslararası değerlendirmelerde en zayıf olduğu konulardandır. Ortaöğretim ve üniversite düzeyinde geometrisi üzerine formal ispatlar yapılmaktadır. Öğrencilerin sadece ispatlara maruz kalmaması ortaöğretim ve üniversitede öğretim yapanların bu içerik alanında etkili bir şekilde kanıtlar yapması hayati önem taşımaktadır. Bu çalışmada öğrenme ortamı, öğretmen adaylarının Öklid-dışı geometriler ile ilgili çıkarımları kendilerinin yapmalarına fırsatlar sunmuş, somut materyaller ve bilgisayar destekli öğretim ile zenginleştirilmiştir. Nitekim Scher (1999), geometri öğretiminde herhangi bir teoremin ispatlanması veya herhangi bir problemin geleneksel kâğıt kalem yöntemleriyle çözülmesinin öğrencilerin yeni keşifler yapmasını engellediğini, fakat bu kâğıt kalem sürecinin yazılımlarla veya materyaller ile desteklenmesi halinde öğrencilerin daha iyi anladığını gözlemlemiştir. Okullarımızda da bilgisayar destekli öğrenme ortamları oluşturulması, öğrencilerin ön bilgilerinin yoklanması, yeni durumlarla yüz yüze gelmeleri sağlanmalıdır.

Bu aksiyon/eylem araştırmasında "bak, düşün ve harekete geç" döngüsü benimsenmiştir. Bu araştırma döngüsü, öğretmenlerin ve araştırmacıların kendi uygulamalarını daha iyi anlamalarına ve geliştirmelerine olanak tanıyan ve matematik öğretiminde eylem araştırmasına katkıda bulunacak bir öz-değerlendirme çalışmasıdır. En önemlisi, Öklid-dışı geometrilerin sosyal etkileşim yoluyla geometri öğretimine dâhil edilmesini iyileştirmek için değerli bilgiler sağlayabilir. Sınıflar canlı ve dinamik bir öğrenme ortamı olarak görüldüğünde, öğretmenler kaotik ya da anlamsız olan şeyleri anlamlandıramayabilir. Bu bakış açısı, sadece ortamlarda neler olup bittiğini açıklamamıza ve tanımlamamıza değil; aynı zamanda sınıflarda veya daha geniş topluluklarda ortaya çıkan sorunları ve zorlukları aşmada bulguların nasıl kullanılabileceğine de yardımcı olabilir.

SONUÇ ve ÖNERİLER

Elde edilen sonuçlara göre, uygulama öncesinde genel olarak soruların yanlış cevaplandığı veya cevapsız bırakıldığı; doğru cevaplanan sorulara yönelik ise açıklama yapılmadığı görülmüştür. Bu bulgulardan hareketle katılımcıların Öklid-dışı geometriler hakkında yeterince bilgi sahibi olmadığı sonucuna varılmıştır. Oluşturulan öğrenme ortamının, öğretmen adaylarına Öklid geometrisi ile Öklid-dışı geometrilerin benzer ve farklı yönlerini irdeleme fırsatı sunduğu ve Öklid-dışı geometriler ile ilgili anlayış geliştirmelerinde katkı sağladığı sonucuna varılmıştır.

Elde edilen bu sonuç doğrultusunda Öklid-dışı geometrilerin öğretimine önem verilmesi, bu geometrilerin öğretimine yönelik çeşitli yollar denenmesi önerilmektedir. Çalışmadan elde edilen bulguların, öğretmen adaylarının Öklid-dışı geometriler ile ilgili algılarını ortaya koyması ve bu algıların oluşma gerekçelerine ışık tutması açısından hem öğretmen, hem de araştırmacılara faydalı bilgiler sunacağı düşünülmektedir.

Gelişmiş ülkelerde orta öğretim programlarında Öklid-dışı geometriler bazı örneklemler bağlamında basitleştirilerek yer almaktadır. Lisans ve lisansüstü eğitimlerinde dönemlerde Öklid-dışı geometrilerin öğretimine önem verilmesi gerekmektedir. Özellikle öğretmen yetiştiren yükseköğretim kurumlarında Öklid geometrisi ve Öklid-dışı geometrilerin öğretim programlarında birlikte yer alması gerekmektedir. Bu sayede öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerinin gelişimi tamamlanmış olacaktır.

KAYNAKLAR

Aksu, H. H. (2005). *İlköğretimde aktif öğrenme modeli ile geometri öğretiminin başarıya, kalıcılığa, tutuma ve geometrik düşünme düzeyine etkisi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Altun, M. (2008). *Eğitim fakülteleri ve sınıf öğretmenleri için matematik öğretimi.* Bursa: Alfa Basım Yayım.

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi.* Trabzon: Derya Kitabevi.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik öğretimi: 6-8. Sınıflar.* Ankara Pegem A Yayıncılık.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1990). The effects of Logo on children's conceptuazilations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(5), 356-371.

Cohen, L., & Manion L. (1996). *Research methods in education*. (4. Ed.). NewYork: Routledge.

Crowley, M. L. (1987). *The Van Hiele model of the development of geometric thought.* In M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12 (1-16).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Çelebi-Akkaya, S. (2006). *Van Hiele düzeylerine göre hazırlanan etkinliklerin ilköğretim öğrencilerinin geometri başarısına ve tutumuna etkisi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Abant izzet Baysal Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.

Fraenkel, J. R., & Wallen, N. E. (2003). *How to design and evaluate research in education* (5th Ed.). New York: Mac Graw Hill, Inc.

Güven B., & Karataş, İ. (2009). Students discovering spherical geometry using dynamic geometry software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(3), 331-340.

Hacısalihoğlu, H. H., Mirasyedioğlu, Ş., & Akpınar, A.(2004). *İlköğretim 6-8 matematik öğretimi: Matematikte işbirliğine dayalı yapılandırıcı öğrenme ve öğretme***.** Ankara: Asil Yayın Dağıtım.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Greenwich, CT: Information Age.

Johnson, A. P. (2002). *A short guide to action research*. Boston: Allyn & Bacon.

Jones, K. (1997). Student teachers' conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review, 9,* 21–32.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1982). *The action research planner*. Victoria: Deakin University Press.

Knuth, E. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33(5),* 379–405.

Knuth, E. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61–88.

Mills, G. E (2003). *Action research: A guide for the teacher researcher* (2nd Ed.), New Jersey: Merrill Prentice Hall, 2003.

Olkun, S., & Toluk, Z. (2007). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi.* Ankara: Maya Akademi Yayın Dağıtım.

Özden, Y. (2008). *Eğitimde yeni değerler*. Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Özden, Y. (2010). *Öğrenme ve öğretme.* Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Pesen, C. (2008). *Eğitim fakülteleri ve sınıf öğretmenleri için yapılandırmacı öğrenme yaklaşımına göre matematik eğitimi.* Ankara. Pegem Akademi Yayınları.

Robson, J. (1993). *Real world research: A resource for social scientists and practitioner researchers.* Oxford: Blackwells.

Scher, D. (1999). Problem solving and proof in the age of dynamic geometry, *Micromath*, *15*(1), 24-30.

Selden, A., (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. In G. Hanna, & M. De Villier (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp: 391-420). New York, NY: Springer.

Speer, N., & Kung, D. (2016). The Complement of RUME: What's missing from our research? *RUME 2016 conference proceedings.* RUME: Pittsburgh, PA, USA.

Stringer E. T. (2007). *Action research* (3rd Ed.). London: Sage Publications.

Toluk, Z., Olkun, S., & Durmuş, S. (2002, Eylül). *Problem merkezli ve görsel modellerle destekli geometri öğretiminin sınıf öğretmenliği öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin gelişimine etkisi.* 5. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulmuş sözlü bildiri. ODTÜ, Ankara.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Chicago, IL: University of Chicago. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED220288.pdf

Üzel, D., & Özdemir, E. (2009, Ekim) *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeyleri*. XVIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı'nda sunulmuş sözlü bildiri. Ege Üniversitesi, İzmir.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101–119.