Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi, 12(1), 43-50, 2022. DOI: 10.31466/kfbd.929302

KFBD

Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi
The Black Sea Journal of Sciences
ISSN (Online): 2564-7377

Araştırma Makalesi / Research Article

Pseudo-Hiperbolik Telegraf Kısmi Diferansiyel Denklemin Modifiye Çift Laplace Metodu ile Çözümü

Mahmut MODANLI[1*], Fatma ŞİMŞEK[2]

Öz

Bu araştırmada, başlangıç değer koşullarına bağlı pseudo-hiperbolik telegraf kısmi diferansiyel denklemi incelendi. Bu problemin tam çözümü için modifiye çift Laplace metodu verildi. Bu metot örnek problemlere uygulanarak tam çözüm elde edildi. Elde edilen bu çözüm simülasyonlarla gösterildi. Böylece modifiye çift Laplace metodunun bu problemin çözümü için elverişli ve uygun olduğu görüldü.

Anahtar Kelimeler: Başlangıç değer problemi, Tam çözüm, Modifiye çift Laplace metodu, Pseudo-hiperbolik telegraf denklemi, Simülasyon.

The Solution of Pseudo-hyperbolic Telegraph Partial Differential Equation by Modified Double Laplace Method

Abstract

In this study, the pseudo-hyperbolic telegraph partial differential equation depend on initial value conditions are investigated. For the exact solution of this equation, Modified double Laplace method is presented. This method is applied to the sample problem to obtain exact solution. The obtained this solution is showed by simulation. Thus, it was seen that the modified double Laplace method is convenient and suitable for the solution of this problem.

Keywords: Initial value problem, Exact solution, Modifiye double Laplace method, Pseudo-hyperbolic telegraph equation, Simulation.

[1]Harran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Şanlıurfa, Türkiye, mmodanli@harran.edu.tr
[2]Harran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Şanlıurfa, Türkiye, fatma.simsek.2994@gmail.com

[1]https://orcid.org/0000-0002-7743-3512 [2]https://orcid.org/0000-0002-0573-2820

[*]**Sorumlu Yazar/Corresponding Author**

Geliş/Received: 28.04.2021 **Kabul/Accepted:** 07.03.2022

1. Giriş

Kesirli diferansiyel denklemler fizik, finans, mühendislik, ve sismoloji gibi bilim dallarında pek çok uygulamalara sahiptir. Bu diferansiyel denklemler zaman ve uzay değişkenlerine göre çözülebilir. Kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için farklı metotlar vardır. Bu metotlar; sonlu fark metotları, Cubic B-spline kolokasyon metodu, Sinc-kolokasyon metodu, theta metodu, Laplace transform lolokasyon metodu, Fibonacci Polinomları yaklaşım metodu, sumudu metodu gibi metotlardır. Pseudo-Hiperbolik denklemler de tıp, havacılık, matematik, fizik, mühendislik gibi birçok alanda kullanılmıştır. Çubukların boylamasına titreşimi, genel olarak matematiksel fizikte, çubuğun nispeten ince ve uzun olduğu varsayılarak dalga denklemi ile tanımlanan klasik olarak kabul edilir. Nispeten kalın bir çubuğun (kirişin) yanal hareketinin etkisi, daha genel teorileri formüle etmek için incelenmiştir. Bu modellerin matematiksel formu, hareket denkleminin yüksek dereceli türevlerinden oluşur. Bu modeller Rayleigh, Bishop, Mindlin ve Herrmann gibi birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Telegraf denkleminin yaklaşık çözümünü hesaplamak için koşulsuz kararlı paralel fark şemasını metodu geliştirildi (Borhanifar ve Abazari, 2009). İkinci mertebeden tek boyutlu doğrusal hiperbolik denklemin çözümü için sayısal bir teknik verildi (Lakestani ve Saray, 2010). (Latifizadeh, 2013) de, telegraf denkleminin sayısal çözümü için Sinc-colocation metodunu yaklaşık olarak uygulandı. Telegraf denkleminin sayısal çözümlerine yaklaşmak için Cubic B-spline Collocation Metodu kullanıldı (Arora ve Singh, 2020). Telegraf denklemlerinin yaklaşık çözümü için Fibonacci Polinomları yaklaşımı çalışıldı (Kurt ve Yalçınbaş, 2016). Sonlu fark metodu kullanılarak telegraf denklemin nümerik çözümü elde edildi (Modanli, ve Akgül, 2017; Ozbağ ve Modanli 2021; Modanli ve ark., 2022). Pseudo-hiperbolik denklemlerin yaklaşık çözümü için kuvvet serisi çözüm metodu çalışıldı (Modanli ve ark., 2022).

Pseudu-parabolik denklemin tam çözümü modifiye çift Laplace metodu kullanılarak bulundu (Gadain, 2018). Çift Laplace decomposition metot yardımıyla pseudo-hiperbolik denklemin yaklaşık çözümü verildi (Eltayeb ve ark., 2017).

Bu çalışmada pseudo-hiperbolik telegraf kısmi diferansiyel denklemini

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x) = \beta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x), \\ 0 \le x \le L, 0 \le t \le T \\ u(0,x) = \varphi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases} \tag{1}$$

ele alacağız. Bu denklemin başlangıç değer koşullarına bağlı tam çözümünü modifiye çift Laplace metodunu kullanarak elde edeceğiz. Burada $\beta > 0$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ bilinen fonksiyonlar ve $u(t,x)$ bilinmeyen fonksiyondur.

Laplace dönüşüm metodu, Fourier serisi dönüşüm metodu ve diğer bazı metotlar kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümünü bulmak için uygun metotlar olmakla beraber $\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t}$ gibi karışık türevler içeren denklemlere uygulanamamaktadır. Bu denklemlere uygulanabilmesi için daha fazla başlangıç değer koşuluna ihtiyaç vardır. Modifiye çift Laplace metodu bu tür problemlerin tam çözümünü bulmak için bazen iyi bir yöntem olabilir.

2. Modifiye Çift Laplace Ayrıştırma Yöntemi

Bu bölümde pseudo-hiperbolik telegraf kısmi diferansiyel denkleminin çözümünü bulmak için modifiye çift Laplace ayrışma yöntemini kullanacağız.

Bunun için

$$L_t L_x[f(t,x)] = F(s,p),\ L_t L_x\,[\varphi(x)] = G(p) \tag{2}$$

olduğunu kabul edelim. Buradan

$$L_t L_x\left[\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right] = s^2 u(s,p) - s u(0,p) - u_t(0,p) \tag{3}$$

yazılabilir. (1) denkleminin her iki tarafının çift Laplace dönüşümü alınıp (2) ve (3) formülleri kullanılırsa,

$$u(s,p) = \frac{1}{s^2} L_t L_x\left[\beta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - u(t,x)\right] + \frac{1}{s^2} L_t L_x[f(t,x)] + \frac{1}{s} u(0,p) + \frac{1}{s^2} u_t(0,p) \tag{4}$$

elde edilir. (4) formülünde başlangıç değerleri yerine yazılırsa,

$$u(s,p) = \frac{1}{s^2} L_t L_x\left[\beta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - u(t,x)\right] + \frac{1}{s^2}\ F(s,p) + \frac{1}{s} G(p) + \frac{1}{s^2} u_t(0,p) \tag{5}$$

bulunur. (1) probleminin çözümü için

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) \tag{6}$$

formülünü kullanalım. (6) formülü (1) denkleminde yazılırsa

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(t,x) = \varphi(x) + L_s^{-1} L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\ F(s,p)\right] + L_s^{-1} L_p^{-1}[\frac{1}{s^2} L_t L_x\left[\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(t,x)\right] \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(t,x) - \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(t,x)] + L_s^{-1} L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2} u_t(0,p)\right] \end{cases} \tag{7}$$

yazılır. Özel olarak

$$u_0 = \varphi(x) + L_s^{-1} L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\ F(s,p)\right] + L_s^{-1} L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2} u_t(0,p)\right] \tag{8}$$

alınırsa geriye kalan terimler

$$u_{n+1}(t,x) = L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}u_n(t,x)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(t,x)-\frac{\partial}{\partial t}u_n(t,x)-u_n(t,x)\right] \quad (9)$$

şeklinde olur. Burada $L_s^{-1}L_p^{-1}$ terimine sırasıyla s ve p değerlerinin çift katlı ters Laplace dönüşümü denir. Bu (8) ve (9) formüllerine modifiye çift Laplace ayrışma yöntemi denir.

Şimdi pseudo-hiperbolik telegraf kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için çift Laplace ayrışma yöntemi kullanarak aşağıdaki problemin tam çözümünü bulalım.

3. Modifiye çift Laplace Ayrışma Metodunun Uygulaması

Bu bölümde, bir örnek problem üzerinde pseudo-hiperbolik telegraf kısmi diferansiyel denklemin tam çözümünü bulmaya çalışacağız.

Örnek 1 Modifiye çift Laplace ayrışma metodunu kullanarak pseudo-hiperbolik telegraf denklemini

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+u(t,x)=\frac{2}{3}\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+\frac{4}{3}e^{-t}sinx\\ u(0,x)=sinx,\;\; u_t(0,x)=-sinx\end{cases} \quad (10)$$

çözelim**.**

Bu problemin çözümü için modifiye çift Laplace ayrışma yöntemini kullanalım. Bunun için (10) formülünün çift Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L_tL_x[f(t,x)] = L_tL_x\left[\frac{4}{3}e^{-t}sinx\right] = \left(\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$$

elde edilir. (2) formülünden $\varphi(x)=\sin x$ dır. (8) formülü kullanılırsa,

$$u_0 = sinx + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right] + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}(-sinx)\right]$$

$$= sinx + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\left(\frac{4}{3}\frac{1}{s^2(s+1)}\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right] + L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}(-sinx)\right]$$

$$= sinx + \left(\frac{4}{3}(t-1+e^{-t})\right)sinx - tsinx$$

$$= \left(1+\frac{4}{3}(t-1+e^{-t})-t\right)sinx = \left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)sinx$$

elde edilir. (9) formülü kullanılırsa,

$$u_1 = L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u_0(t,x)\big)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u_0(t,x)\big)-\frac{\partial}{\partial t}\big(u_0(t,x)\big)-\big(u_0(t,x)\big)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}e^{-t}\right)sinx\right]+\left(-\left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)sinx\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}e^{-t}\right)sinx\right.$$

$$\left.-\left(\left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)sinx\right)\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}e^{-t}\right)sinx\right]+\left(\left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)sinx\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}e^{-t}\right)sinx\right.$$

$$\left.+\left(\left(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)sinx\right)\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\left(\frac{4}{9}e^{-t}+\frac{2}{3}t-\frac{1}{9}\right)sinx\right]\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{s^2}+\frac{4}{9}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{9}\frac{1}{s}\right)\frac{1}{p^2+1}\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\left(\frac{2}{3}\frac{1}{s^4}+\frac{4}{9}\frac{1}{s^2(s+1)}-\frac{1}{9}\frac{1}{s^3}\right)\frac{1}{p^2+1}\right]$$

bulunur. Son denklemin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$u_1 = -\left[\left(\frac{1}{9}t^3+\frac{4}{9}(t-1+e^{-t})-\frac{1}{18}t^2\right)sinx\right]$$

olarak yazılır. Aynı yöntemle (9) formülü kullanılırsa,

$$u_2(t,x) = L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u_1(t,x)\big)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u_1(t,x)\big)-\frac{\partial}{\partial t}\big(u_1(t,x)\big)-\big(u_1(t,x)\big)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{9}t^2+\frac{4}{9}(1-e^{-t})-\frac{1}{9}t\right)sinx\right]+\left[\left(\frac{1}{9}t^3+\frac{4}{9}(t-1+e^{-t})-\frac{1}{18}t^2\right)sinx\right]\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{9}t^2+\frac{4}{9}(1-e^{-t})-\frac{1}{9}t\right)sinx+\left[\left(\frac{1}{9}t^3+\frac{4}{9}(t-1+e^{-t})-\frac{1}{18}t^2\right)sinx\right]\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{9}t^2+\frac{4}{9}(1-e^{-t})-\frac{1}{9}t\right)+\left(\frac{1}{9}t^3+\frac{4}{9}(t-1+e^{-t})-\frac{1}{18}t^2\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{3}{9}t^2+\frac{4}{9}(1-e^{-t})-\frac{1}{9}t\right)+\left(\frac{1}{9}t^3+\frac{4}{9}(t-1+e^{-t})-\frac{1}{18}t^2\right)\right)sinx\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{18}\frac{2}{s^3}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{9}\frac{1}{s^2}\right)+\left(\frac{1}{54}\frac{6}{s^4}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{36}\frac{2}{s^3}\right)\right.\right.$$

$$+\left(\frac{3}{18}\frac{2}{s^3}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{9}\frac{1}{s^2}\right)$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{54}\frac{6}{s^4}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{36}\frac{2}{s^3}\right)\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{2}{9}\frac{1}{s^4}+\frac{4}{9}\frac{1}{s^3}+\frac{19}{27}\frac{1}{s^2}-\frac{4}{27}\frac{1}{s}+\frac{4}{27}\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\left(\frac{2}{9}\frac{1}{s^6}+\frac{4}{9}\frac{1}{s^5}+\frac{19}{27}\frac{1}{s^4}-\frac{4}{27}\frac{1}{s^3}+\frac{4}{27}\frac{1}{s^2(s+1)}\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx$$

olarak bulunur. Benzer şekilde devam edilip (9) formülü kullanılırsa,

$$u_3(t,x) = L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[\frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u_2(t,x)\big)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u_2(t,x)\big)-\frac{\partial}{\partial t}\big(u_2(t,x)\big)-\big(u_2(t,x)\big)\right]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\Bigg[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)sinx\right]$$
$$+\left[\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)(-sinx)\right]$$
$$-\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)sinx$$
$$-\left[\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\right]\Bigg]$$

$$= L_s^{-1}L_p^{-1}\Bigg[\frac{1}{s^2}L_tL_x\Bigg(-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)$$
$$-\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\Bigg)\Bigg]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\Bigg[\frac{1}{s^2}L_tL_x\Bigg(\frac{2}{3}\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)$$
$$+\left(\frac{5}{540}t^4+\frac{4}{54}t^3+\frac{19.3}{162}t^2-\frac{4}{27}t+\frac{4}{27}-\frac{4}{27}e^{-t}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{540}t^5+\frac{1}{54}t^4+\frac{19}{162}t^3-\frac{2}{27}t^2+\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\Bigg)\Bigg]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L_tL_x\left(\left(\frac{1}{270}t^5+\frac{17}{324}t^4+\frac{29}{81}t^3+\frac{71}{162}t^2-\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx\right)\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{4}{9}\frac{1}{s^6}+\frac{34}{27}\frac{1}{s^5}+\frac{58}{27}\frac{1}{s^4}+\frac{71}{81}\frac{1}{s^3}-\frac{4}{27}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right]$$

$$= -L_s^{-1}L_p^{-1}\left[\left(\left(\frac{4}{9}\frac{1}{s^8}+\frac{34}{27}\frac{1}{s^7}+\frac{58}{27}\frac{1}{s^6}+\frac{71}{81}\frac{1}{s^5}-\frac{4}{27}\left(\frac{1}{s^4}-\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2(s+1)}\right)\right)\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{11340}t^7+\frac{17}{9720}t^6+\frac{29}{1620}t^5+\frac{71}{1944}t^4-\frac{2}{81}t^3+\frac{2}{27}t^2-\frac{4}{27}(t-1+e^{-t})\right)sinx$$

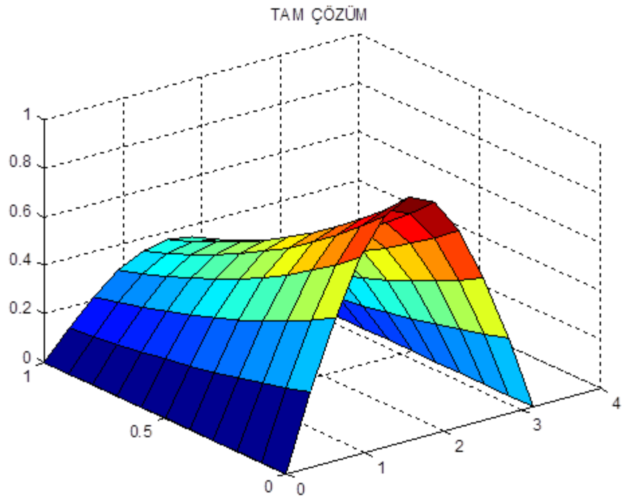
olarak bulunur. Benzer şekilde devam edilip gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$u_n(t,x) = \left[\left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{t^n}{n!}-\cdots\right)-\frac{8}{27}\left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{t^n}{n!}-\cdots\right)\right]sinx + \frac{8}{27}e^{-t}sinx$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$u(t,x) = \left(e^{-t}-\frac{8}{27}e^{-t}+\frac{8}{27}e^{-t}\right)sinx = e^{-t}\,sinx$$

elde edilir ki bu da (10) denkleminin tam çözümüdür. Bu çözümün simülasyonu aşağıda verilmiştir. Bu eğri $0 \le x \le \pi$ ile $0 \le t \le 1$ aralığında $u(t,x) = e^{-t}\,sinx$ tam çözümü için Matlab programı kullanılarak elde edilmiştir.



Şekil 1. $u(t,x) = e^{-t}\,sinx$ fonksiyonunun grafiğinin verir.

4. Sonuçlar ve Öneriler

Bu çalışmada, pseudo-hiperbolik telegraf kısmi diferansiyel denklemi ele alındı. Bu denklem ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar incelendi. Bu denklemin başlangıç değer koşullarına bağlı çözümü modifiye çift Laplace metodu ile verildi. Modifiye çift Laplace metodunun elde edilişi açıklandı. Bu metot kullanılarak pseudo-hiperbolik telegraf kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü bir örnek problem ile gösterildi. Problem için elde edilen çözüm tam çözüme eşit olduğundan metodun uygun ve elverişli olduğu görüldü. Bu örnek problemin tam çözümünün simülasyonu Matlab programı yardımıyla gösterildi.

Yazarların Katkısı

Bu makale, birinci yazarın danışmanlığında bulunan ikinci yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

Borhanifar, A. ve Abazari, R., (2009). An unconditionally stable parallel difference scheme for telegraph equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009.

Lakestani, M. ve Saray, B. N., (2010). Numerical solution of telegraph equation using interpolating scaling functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 60(7), 1964-1972.

Latifizadeh, H., (2013). The sinc-collocation method for solving the telegraph equation. *J. Comput. Inform*, 1, 13-17. Arora, R., Singh, S., Singh, S., (2020). Numerical solution of second-order two-dimensional hyperbolic equation by bi-cubic B-spline collocation method. *Mathematical Sciences*, 14, 201-213.

Arora, R. ve Singh, S., (2020). Numerical solution of second-order two-dimensional hyperbolic equation by bi-cubic B-spline collocation method. *Mathematical Sciences*, 14, 201-213.

Kurt Bahşı, A. ve Yalçınbaş, S., (2016). A new algorithm for the numerical solution of telegraph equations by using Fibonacci polynomials. *Mathematical and Computational Applications*, 21(2), 15.

Modanli, M. ve Akgül, A., (2017). Numerical solution of fractional telegraph differential equations by theta-method. *The European Physical Journal Special Topics*, 226(16), 3693-3703.

Ozbag, F. ve Modanli, M. (2021). On the stability estimates and numerical solution of fractional order telegraph integro-differential equation. *Physica Scripta*, *96*(9), 094008.

Modanli, M., Ozbag, F. ve Akgül, A. (2022). Finite difference method for the fractional order pseudo telegraph integro-differential equation. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, *21*(1), 41-54.

Modanli, M., Abdulazeez, S. T. ve Husien, A. M., (2021). A residual power series method for solving pseudo hyperbolic partial differential equations with nonlocal conditions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, *37*(3), 2235-2243.

Gadain, H. E. (2018). Solving coupled pseudo-parabolic equation using a modified double Laplace decomposition method. *Acta Mathematica Scientia*, 38(1), 333-346.

Eltayeb, H., Mesloub, S. ve Kılıçman, A., (2017). Application of double Laplace decomposition method to solve a singular one-dimensional pseudohyperbolic equation. *Advances in Mechanical Engineering*, 9(8), 1687814017716638.