

SERİ B

CİLT XIV

SAYI 1

1965

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
ORMAN FAKÜLTESİ
DERGİSİ



TARTMA METODU İLE ALAN ÖLÇME

Yazan :
Tahsin TOKMANOĞLU

Ormancılık çalışmalarının bir çok kısımlarında şekillerin alanını ölçmeye ihtiyaç duyulmaktadır. Meselâ hava fotoğraflarına dayanılarak Amenajman haritalarının yapılmasında fotoğraflar üzerinde meşcere tiplerinin sınırları tesbit edilir sonra alanları ölçülür¹. Yol inşaatında çizilen enine kesitlerin alanları ölçülür. Çeşitli ağaç türlerinin yapraklarının büyüklüğünü tesbit etmek için alanları ölçülür.

Alan ölçmek için muhtelif metodlar kullanılmaktadır, bunlardan birisi de tartma metodudur. Bu metodda alanı bulunacak şekiller kesilir, ayrı ayrı tartılarak her bir şeklin ağırlığı bulunur. Kâğıdın birim alanının ağırlığı tesbit edilir, ağırlıklar birim alan ağırlığına bölünerek her şeklin alanı elde edilir. Bu metodun sıhhatli bir sonuç verebilmesi için birim alan ağırlığının kâğıdın her tarafında aynı olması lâzımdır. Diğer bir söyleyişle kâğıdın uniform olması şarttır.

Ormancılık ve ölçme işlerinde ozalit kâğıdı kullanılarak tartma metodu uygulandığı takdirde elde edilecek sonucun sıhhat derecesini tesbit etmek gayesiyle tarafımızdan aşağıdaki araştırma tertiplenmiştir². Bir çok ölçmelerde ve hatta araştırmalarda ozalit kâğıtlarına çizilmiş şekillerin alanları tartma metodu ile bulunmaktadır.

En küçüğünün yarıçapı 0,3 sm, en büyüğünün yarıçapı 3,2 sm ve yarıçaplar arasındaki fark 0,1 sm olmak üzere 30 adet daire ozalit kâğıdı

1) Prof. Dr. İsmail Eraslan (Umumi ve Türkiye Orman Amenajman Bilgisi) sayfa 146.

2) Ozalit kâğıtları özel şahıslar tarafından piyasaya çıkarıldığından bu araştırmada kullanılan kâğıdın ismi açıklanmamıştır.

üzerine çizilmiş ve kesilmiştir. 1 numaralı cetvelin birinci sütununda kesilen dairelerin numaraları, 2 ci sütununda yarıçapları, 3. cü sütununda da alanları görülmektedir. Hazırlanan daireler miligramın ondabirini ölçebilecek bir hassas terazi ile üçer defa tartılmış ve ortalaması alınmıştır. 1 numaralı cetvelin 4 üncü sütununda ortalama ağırlıklar görülmektedir.

Ozalit kâğıdının bir sm^2 sinin ağırlığı d mg ile gösterilirse alanı S sm^2 olan bir şeklin ağırlığı $S.d = G$ mg olacaktır. Ağırlık alanın bir fonksiyonudur ve bu fonksiyon tek dereceli bir denklemdir. Alan sıfır olduğu takdirde ağırlıkta sıfır olur, yani grafik doğrusu apsis ve ordinat eksenlerinin kesim noktasından geçer.

1 nolu daire için	$S_1 \cdot d = G_1$
2 " " "	$S_2 \cdot d = G_2$
.	.
.	.
.	.
.	.
30 " " "	$S_{30} \cdot d = G_{30}$ yazılabilir.

Bunlar gerçekleşmesi gereken şart denklemleri'dir. 1 numaralı cetvelin 3 ve 4 üncü sütunundaki değerler bu denklemlerde yerlerine konulunca d için çok çeşitli değerler elde edilmektedir. Bütün denklemleri gerçekleyecek tek bir d değeri mevcut değildir.

Bu durumda d için en muhtemel değer araştırılması yolu kalmaktadır. Bilindiği üzere hataların karelerinin en küçük olmasını sağlayan değer, ihtimali en fazla olan değerdir. Bu prensibe göre dairelerin ağırlıklarındaki hatalar tesbit edilirse,

1 nolu daire için	$S_1 \cdot d - G_1 = V_1$
2 " " "	$S_2 \cdot d - G_2 = V_2$
.	.
.	.
.	.
.	.
30 " " "	$S_{30} \cdot d - G_{30} = V_{30}$ dir.

Hataların karelerinin toplamı $(V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_{30}^2)$ dir.

V değerlerinin eşitleri yerlerine konulunca

$\frac{1}{n} [(S_1 \cdot d - G_1)^2 + (S_2 \cdot d - G_2)^2 + \dots + (S_{30} \cdot d - G_{30})^2]$ bulunur.

d nin hangi değerinin bu toplamı minimum yapacağını bulmak için türevinin alınması ve türevin köklerinin bulunması gerekir.

Türev

$$[2(S_1 \cdot d - G_1)S_1 + 2(S_2 \cdot d - G_2)S_2 + \dots + 2(S_{30} \cdot d - G_{30})S_{30}] \text{ dir.}$$

CETVEL NO: I

Ozalit Kâğıdından Kesilen 30 Adet Dairenin

Numarası	Yarıçapı sm	A'arı (S) sm ²	Ağırlığı (G) mg	S. G	S ²
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	0,3	0,28	1,90	0,5320	0,0784
2	0,4	0,50	3,63	1,8150	0,0250
3	0,5	0,79	6,37	5,0323	0,6241
4	0,6	1,13	8,17	9,2321	1,2769
5	0,7	1,54	11,73	18,0342	2,3716
6	0,8	2,01	17,10	34,3710	4,0401
7	0,9	2,54	21,77	55,2958	6,4516
8	1,0	3,11	25,27	78,5897	9,6721
9	1,1	3,80	29,37	111,6060	14,4400
10	1,2	4,52	34,70	156,8440	20,4304
11	1,3	5,31	42,74	226,9494	28,1961
12	1,4	6,16	46,20	284,5920	37,9456
13	1,5	7,07	54,07	382,2749	49,9849
14	1,6	8,04	63,92	513,9168	64,6416
15	1,7	9,08	76,93	698,5244	82,4464
16	1,8	10,18	84,27	857,8686	103,6324
17	1,9	11,34	91,17	1033,8678	128,5956
18	2,0	12,57	97,53	1225,9521	158,0049
19	2,1	13,85	112,00	1551,2000	191,8225
20	2,2	15,21	118,30	1799,3430	231,3441
21	2,3	16,62	136,47	2268,1314	276,2244
22	2,4	18,10	152,64	2762,7840	327,6100
23	2,5	19,63	162,20	3185,9490	385,3369
24	2,6	21,24	169,33	3596,5692	451,1376
25	2,7	22,90	181,57	4157,9530	524,4100
26	2,8	24,63	187,93	4628,7159	606,6369
27	2,9	26,42	214,67	5671,5814	698,0164
28	3,0	28,27	236,20	6677,3740	799,1929
29	3,1	30,19	245,87	7422,8153	911,4361
30	3,2	32,17	251,97	8105,8749	1034,9089
				<u>57523,6192</u>	<u>7150,9349</u>

Bu değer sıfıra eşit yazılır, her iki taraf 2 ile bölünerek parantezler açılırsa

$$2 (S_1 \cdot d - G_1) S_1 + 2 (S_2 \cdot d - G_2) S_2 + \dots 2 (S_{30} \cdot d - G_{30}) S_{30} = 0$$

$$S_1^2 d - S_1 G_1 + S_2^2 d - S_2 G_2 + \dots S_{30}^2 d - S_{30} G_{30} = 0$$

$$(S_1^2 + S_2^2 + \dots S_{30}^2) d - (S_1 G_1 + S_2 G_2 + \dots S_{30} G_{30}) = 0$$

bulunur.

$$(S_1^2 + S_2^2 + \dots S_{30}^2) = [SS]$$

$$(S_1 G_1 + S_2 G_2 + \dots S_{30} G_{30}) = [SG] \text{ şeklinde gösterilirse}$$

denklem

$$[SS] d = [SG] \text{ şekline girer}^3$$

1 numaralı cetvelin 5 ve 6 ncı sütunlarında $[SS]$ ve $[SG]$ değerlerinin hesaplanması görülmektedir.

$$[SS] = 7150, 9349$$

$$[SG] = 57523, 6192 \text{ bulunmuştur.}$$

Bu değerler denklemdeki yerlerine konulunca

$$7150, 9349 d = 57 523, 6192 \text{ olur,}$$

buradan

$$d = \frac{57 523, 6192}{7 150, 9349} = 8, 0442 \text{ bulunur.}$$

Şu halde aranan fonksiyon $8,0442 s = G$ dir.

Aşağıdaki grafikde, Apsis ekseninde Sm^2 cinsinden alanlar, ordinat ekseninde ise mg cinsinden ağırlıklar gösterilmiştir. Ozalit kâğıdından kesilen dairelerin her biri bir nokta ile gösterilmiş ve üzerlerine numaraları yazılmıştır. $8,0442 s = G$ fonksiyonunun grafiği de çizilmiştir. Noktaların grafiğe nazaran durumları görülmektedir. Noktaların grafikden ayrışık miktarı, alanlar $8,0442 s = G$ fonksiyonu kullanılarak hesaplandığı takdirde husule gelen hatayı göstermektedir. Tarılan 30 dairenin her biri için hatalar hesaplanmıştır. II numaralı cetvelin 2 inci sütununda dairele-

3) Matematik istatistikte, en küçük kareler metodunun uygulandığı işlerde (Normal denklemler) ismi verilen denklem.

rin alanları 3 üncü sütununda 8,0442 s = G fonksiyonuna göre olması gereken ağırlık, 4 üncü sütunda tartılan ağırlık, 5 inci sütunda ise 4 üncü sütundaki değerlerle 3 üncü sütundaki değerlerin farkı, yani her dairenin ağırlığının tartılmasındaki hata miktarı görülmektedir. Teorik olarak (+) işaretli hataların toplamının (-) işaretli hataların toplamına eşit olması gerekir, fakat 5 inci sütunun alt kısmında görüldüğü üzere 0,09 kadar bir fark bulunmaktadır, bu fark (S. d) çarpımı hesaplanırken virgülden sonra sadece 2 hanenin alınmasından ileri gelmiştir.

Tartılan ağırlıkların orta hatası (grafikteki apsis eksenin orta hatası)

$$m = \sqrt{\frac{[VV]}{n-1}}$$

formülü ile hesaplanır.

II nolu cetvelin 6 inci sütununda hataların karelerinin toplamının hesaplanması görülmektedir. $[VV] = 406,3675$ bulunmuştur $n = 30$ olduğuna göre orta hata

$$m = \sqrt{\frac{406,3675}{29}} = \pm 3,743 \text{ mg dır.}$$

Demekki tartmaların

% 33 ünde	$m = 3,743 \text{ mg}$ dan daha fazla
% 67 sinden	$3,743 \text{ mg}$ dan daha az
% 5 inde	$2m = 7,486 \text{ mg}$ dan daha fazla
% 95 inde	$7,486 \text{ mg}$ dan daha az
% 0,3 inde	$3m = 11,229 \text{ mg}$ dan daha fazla
% 99,7 inde	$11,229 \text{ mg}$ dan daha az

hata bulunmaktadır.

Bu miktarların alan üzerindeki tesirleri

$$\frac{\mp 3,743}{8,0442} = \mp 0,465 \text{ sm}^2, \quad \frac{\mp 7,486}{8,0442} = \mp 0,923 \text{ sm}^2, \quad \frac{\mp 11,229}{8,0442} = \mp 1,396 \text{ sm}^2$$

olacaktır.

CETVEL NO: II

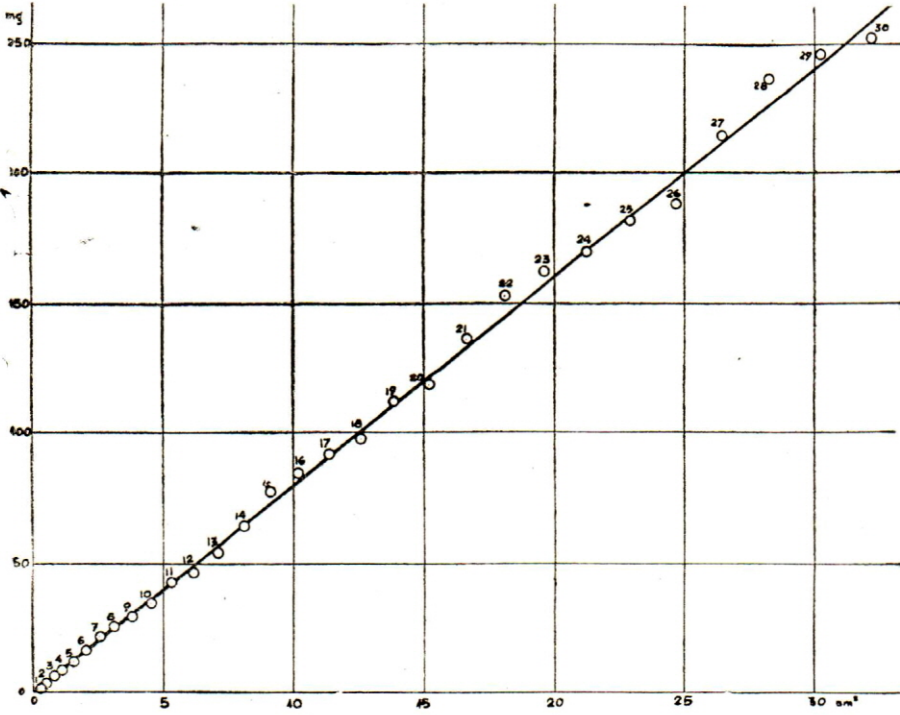
Orta Hatanın Hesabı

No	S	S.d	G	V	V ²
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	0,28	2,25	1,90	-0,35	0,1225
2	0,50	4,02	3,63	-0,39	0,1521
3	0,79	6,35	6,37	+0,02	0,0004
4	1,13	9,08	8,17	-0,91	0,8281
5	1,54	12,37	11,73	-0,64	0,4096
6	2,01	16,15	17,10	+0,95	0,9025
7	2,54	20,41	21,77	+1,36	1,8496
8	3,11	24,99	25,27	+0,28	0,0784
9	3,80	30,53	29,37	-1,16	1,3456
10	4,52	36,32	34,70	-1,62	2,6244
11	5,31	42,67	42,74	+0,07	0,0049
12	6,16	49,50	46,20	-3,30	10,8900
13	7,07	56,81	54,07	-2,74	7,5076
14	8,04	64,60	63,92	-0,08	0,4624
15	9,08	72,96	76,93	+3,97	15,7609
16	10,18	81,80	84,27	+2,47	6,1009
17	11,34	91,12	91,17	+0,05	0,0025
18	12,57	101,00	97,53	-3,47	12,0409
19	13,85	111,28	112,00	+0,72	0,5184
20	15,21	122,21	118,30	-3,91	15,2881
21	16,62	133,54	136,47	+2,93	8,5849
22	18,10	145,43	152,64	+7,21	51,9841
23	19,63	157,73	162,30	+4,57	20,8849
24	21,24	170,66	169,33	-1,33	1,7689
25	22,90	184,00	181,57	-2,43	5,9049
26	24,63	197,90	187,93	-9,97	99,4009
27	26,42	212,28	214,67	+2,39	5,7121
28	28,27	227,15	236,20	+9,05	81,9025
29	30,19	242,58	245,87	+3,29	10,8241
30	32,17	258,49	251,97	-6,52	42,5104
				-39,42	406,3675
				+39,33	
				- 0,09	

Kullanılan haritanın ölçeği 1/10 000 ise bu değerlerin arazideki karşılıkları sıra ile

$$0,465 \times 10\ 000 = 4650 \text{ m}^2, \quad 0,923 \times 10\ 000 = 9230 \text{ m}^2 \text{ ve} \\ 1,396 \times 10\ 000 = 13960 \text{ m}^2 \text{ olur.}$$

Ağırlığa dayanılarak hesaplanan alanların orta hatası (grafikteki ordinat ekseninin orta hatası) yukardaki formülle hesaplanmış ve $m = \pm 1,280 \text{ sm}^2$ bulunmuştur.



Grafik : 1 — Tartılan 30 dairenin alanları ile ağırlıkları arasındaki bağıntıyı ve $G = 8,0442 S$ fonksiyonunu gösterir grafik. Apsis ekseninde sm^2 cinsinden alanlar, ordinat ekseninde de mg cinsinden ağırlıkları gösterilmiştir.

Görüldüğü üzere hata miktarının arazideki karşılıkları oldukça büyüktür. 30 deneme dairesi yerine daha azı alınsaydı tabiiyle daha düşük sıhatli bir fonksiyon elde edilecekti, bu takdirde de orta hata daha büyük olacaktı. 2-3 deneme dairesi veya diğer herhangi bir geometrik şekil

yardımı ile ozalit kâğıdının birim alanının ağırlığı tesbit edilirse çok düşük sıhhatli bir fonksiyon elde edilmiş olur.

Tartma metodu ile alan ölçülecekse, kullanılacak kâğıt veya kartonun bu iş için sağlayacağı sıhhat derecesi (orta hata) evvelâ hesaplanmalı ondan sonra karara varmalıdır.