



Araştırma Makalesi

Frost-Musulin Potansiyelinin Varlığında (1+3) Boyutta Duffin-Kemmer-Petiau Denkleminin l-Dalga Çözümleri

Ahmet TAŞ^{*1}

¹Harran Üniversitesi, Sağlık Hizmetleri Meslek Yüksekokulu, Optisyenlik Programı, 63300, Şanlıurfa, Türkiye

*yazışılan yazar e-posta: ahmettas@harran.edu.tr

(Alınış: 08.05.2021, Kabul: 27.09.2021, Yayımlanma: 25.11.2021)

Öz: Bu çalışmada, spin-1 parçacıklar için Frost-Musulin potansiyelinin varlığında (1+3) boyutta Duffin-Kemmer-Petiau denkleminin analitik çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümleri elde edebilmek için standart yöntem kullanılmış ve merkezci terime bir yaklaşım uygulanmıştır. Elde edilen bağıntılar kullanılarak bağlı durum çözümleri Gauss hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiştir. Dalga fonksiyonların sınır koşulları kullanılarak herhangi bir l-durumu için bağlı durum enerji özdeğerlerini veren bağıntı türetilmiştir. Mathematica yazılım paketi kullanılarak herhangi bir l-durumu için bağlı durum enerji değerleri nümerik olarak belirlenmiştir. Ayrıca potansiyel parametrelerinin enerji özdeğerlerine olan etkileri grafiksel ve sayısal olarak incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Duffin-Kemmer-Petiau denklemi, Frost-Musulin potansiyeli, Bağlı durum enerji özdeğerleri, Enerji özfonksiyonları

l-Wave Solutions of Duffin-Kemmer-Petiau Equation in (1 + 3) Dimension in the Presence of Frost-Musulin Potential

Abstract: In this study, the analytical solutions of Duffin-Kemmer-Petiau equation in (1+3) Dimensions for spin-1 particles in the presence of Frost-Musulin potential were obtained. The standard method was used to obtain these solutions and an approach to the centripetal term was applied. Using the equations obtained, the bound state solutions are expressed in terms of Gaussian hypergeometric functions. Using the boundary conditions of wave functions, the equation giving the bound state energy eigenvalues for any l-state is derived. The bound state energy values for any l-state were determined numerically using the Mathematica software package. In addition, the effects of potential parameters on energy eigenvalues were examined graphically and numerically.

Key words: Duffin-Kemmer-Petiau equation, Frost-Musulin potential, Bound state energy eigenvalues, Energy eigenfunctions

1. Giriş

Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi, spin-0 ve spin-1 bozonlarını (alternatif olarak sırasıyla skaler ve vektör bozonlar olarak adlandırılır) birleşik bir temelde tanımlayan göreceli bir denklemdir [1,3]. Bu denklemin çözümleri büyük bir önem taşımaktadır. Kozmoloji ve nükleer fizik alanlarında geniş bir uygulama alanına sahip olan DKP denklemi, parçacık fiziğinde kuantum kromodinamiği (QCD) teorisinde, döteron-çekirdek saçılması ve kuark hapsedme problemlerini incelemek için kullanılabilir [4,5]. Bu göreceli denklem, Dirac tipi bir denklemdir (doğrusal) ve farklı komütasyon kurallarına uyan çeşitli matrisler cinsinden ifade edilebilir. DKP denklemi, sırasıyla spin-0 ve spin-1 bozonları için çalışan beş ve on bileşenli gösterimlerle temsil edilir. Bir vektör potansiyeli altında Duffin-Kemmer-Petiau denkleminin spin-0 temsili Klein-Gordon (KG) denklemi ile, spin-1 temsili ise Proca denklemiyle aynı matematiksel yapıya sahiptir. Fakat DKP denklemi, daha karmaşık yapısı nedeniyle, Klein-Gordon ve Proca denklemlerinden daha geneldir [6,8]. Son yıllarda, DKP denkleminin spin-0 ve spin-1 temsili için farklı etkileşim türlerini ele alan birçok çalışma yapılmıştır [9,19]. Bununla birlikte, mevcut literatür incelendiğinde araştırmaların çoğunun DKP denkleminin spin-0 temsili üzerine olduğu görülmektedir. Bunun temel nedeni, DKP denkleminin bir vektör potansiyeli altında Klein-Gordon denklemi ile matematiksel benzerliğinden kaynaklanmaktadır. Spin-1 bozonlar için denklem daha karmaşık bir yapıya sahip olduğundan çözmek oldukça zordur. Bu sebeple kapsamlı olarak tartışılmamıştır [20].

Fizikte araştırma alanı geniş ve güncel olan diğer önemli bir konu ise atom altı parçacıkların saçılma ve bağlı durum problemleridir. Çekirdek içi etkileşimleri, iki veya daha çok atomlu moleküler yapıları ve temel parçacıkların yapısını anlamak için saçılma ve bağlı durum problemleri incelenmektedir. Parçacıkların saçılması veya bir arada bir bağlı durum oluşturması potansiyel kavramı kullanılarak açıklanabilmektedir. Bu durumlarda birden fazla süreci açıklayabilmek için potansiyel modelleri oluşturulmaktadır. Fiziğin araştırma nesnesi olan çekirdek içi etkileşimler ve temel parçacıklar, potansiyel kavramı ve fiziğin dili olan matematik kullanılarak açıklanmaya çalışıldığında ikinci dereceden differansiyel denklemlerle karşılaşılır. Bu fiziksel sistemleri anlayabilmek için karşılaşılan ikinci dereceden differansiyel denklemlerin çözülmesi gerekmektedir. Bu tür differansiyel denklemlerin birçok çözüm tekniği bulunmaktadır. Standart Teknik [21,22], Nikiforov-Uvarov Tekniği [23,24], Asimptotik İterasyon Tekniği [25,26], ve Süpersimetrik Potansiyel Tekniği [27,28], bu tekniklerden birkaçıdır.

Bu çalışmanın amacı, spin-1 parçacıklar için standart yöntem kullanılarak Frost-Musulin potansiyelinin varlığında (1+3) boyutta Duffin-Kemmer-Petiau denkleminin bağlı durum çözümleri elde etmektir. Bağlı durum çözümlerini kullanarak herhangi bir kuantum durumuna karşılık gelen enerji özdeğerleri veren bağıntıyı türetmektir. Ayrıca Mathematica yazılım programı kullanarak enerji değerlerini nümerik olarak hesaplamaktır. Son olarak potansiyel parametrelerinin enerji değerlerine olan etkilerini çizimlerle ortaya koymaktır.

2. Materyal ve Metot

2.1 Duffin-Kemmer-Petiau Denklemi

Bir \mathcal{U} etkileşme alanı için DKP denklemi aşağıdaki biçimde verilir ($\hbar = c = 1$) [1,3].

$$(i\beta^\mu \delta_\mu - m_0 - \mathcal{U})\Psi = 0 \quad (1)$$

Denklemden yer alan β^μ , DKP matrisleridir ve aşağıdaki koşulu sağlarlar:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\lambda\nu} \beta^\mu \quad (2)$$

burada $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ve $(g^{\mu\nu})^2 = 1$, Minkowski uzay-zamanının metrik tensörüdür. Spin-1 için β^μ matrisleri

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0 & I & 0 \\ \bar{0}^T & I & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0 & 0 & -iS_i \\ -e_i^T & 0 & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & -iS_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

olarak verilir. Burada S_i , 3x3 lük spin-1 matrisleridir. I ve O ise sırasıyla birim ve sıfır matrisleridir. $\bar{0}$ ve e_i matrisleri aşağıdaki biçimde verilir:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1), \quad \bar{0} = (0, 0, 0) \quad (4)$$

Denklemin (1) de yer alan etkileşme potansiyelinin genel biçimi:

$$\mathcal{U} = S(r) + PS_\mu(r) + \beta^\mu V_\mu(r) + \beta^\mu PV_{P\mu}(r) \quad (5)$$

olarak tanımlanır [4]. Elastik bir saçılma için rotasyonel invaryant ve parite korunumu altında etkileşme potansiyeli

$$\mathcal{U} = S(r) + PS_\mu(r) + \beta^0 V(r) + \beta^0 PV_P(r) \quad (6)$$

olarak elde edilir. Bu ifade de her bir terim Lorentz karakterindedir. Rotasyonel invaryant ve parite korunumu altında iki Lorentz vektörü β^μ ve $P\beta^\mu$ olarak yazılabilir böylelikle izdüşüm işlemcisi $P = (\beta^\mu \beta_\mu - 2) = \text{diag}(1,1,1,1,0,0,0,0,0)$ olur. Böylece, etkileşme potansiyelinin aşağıdaki gibi ifade edilen dört kabul edilebilir biçimi bulunur:

$$\mathcal{U} = PS(r) + \beta^0 PV(r) \quad (7)$$

$$\mathcal{U} = S(r) + \beta^0 V(r) \quad (8)$$

$$\mathcal{U} = PS(r) + \beta^0 V(r) \quad (9)$$

$$\mathcal{U} = S(r) + \beta^0 PV(r) \quad (10)$$

Bu dört farklı etkileşim durumu, farklı fiziksel sistemlerin araştırılması için uyarlanmaktadır. Örneğin, Denklem (8) döteron-çekirdek saçılmasının incelenmesi ile ilgilidir [4]. Bu çalışmada etkileşme potansiyeli olarak Denklem (7) kullanılacaktır.

DKP matrislerinin indirgenemez üç temsili vardır: tek boyutlu temsil, spin-0 parçacıkları betimleyen beş boyutlu bir gösterim ve spin-1 parçacıkları betimleyen on boyutlu bir gösterim [29,30]. DKP denklemi (7) nolu ifade de tanımlanan etkileşme potansiyelinin varlığında aşağıdaki biçimde yazılır:

$$[i\beta^\mu \delta_\mu - m_0 - \beta^0 PV(r)]\Psi = 0 \quad (11)$$

Burada Ψ , spin-1 parçacıkların dinamiğini betimleyen on bileşenli bir spinördür. Zamandan bağımsız çözümleri elde etmek amacıyla (11) nolu denklemin çözümü aşağıdaki biçimde önerilir:

$$\Psi_{n,l}^T(x, y, z, t) = e^{(-iE_{n,l}t)}\psi_{n,l}(x, y, z). \quad (12)$$

Spin-1 gösteriminde on bileşenli DKP dalga fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\psi_{n,l}^T(x, y, z) = \left(\varphi_{n,l}^{(1)}, \varphi_{n,l}^{(2)}, \varphi_{n,l}^{(3)}, \varphi_{n,l}^{(4)}, \varphi_{n,l}^{(5)}, \varphi_{n,l}^{(6)}, \varphi_{n,l}^{(7)}, \varphi_{n,l}^{(8)}, \varphi_{n,l}^{(9)}, \varphi_{n,l}^{(10)} \right)^T. \quad (13)$$

Denklem (14) te ifade edilen dalga fonksiyonlarının

$$\varphi_{n,l}^{(1)} = i\phi_{n,l}, \quad \vec{F} = \left(\varphi_{n,l}^{(2)}, \varphi_{n,l}^{(3)}, \varphi_{n,l}^{(4)} \right), \quad \vec{G} = \left(\varphi_{n,l}^{(5)}, \varphi_{n,l}^{(6)}, \varphi_{n,l}^{(7)} \right), \quad \vec{H} = \left(\varphi_{n,l}^{(8)}, \varphi_{n,l}^{(9)}, \varphi_{n,l}^{(10)} \right), \quad (14)$$

biçiminde tanımlanması ve (11) nolu bağıntıda yerlerine yazılması ile aşağıda verilen on çiftlenimli denklem elde edilir:

$$i \left(\frac{\partial F_{n,l}^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial F_{n,l}^{(1)}}{\partial y} \right) = m_0 H_{n,l}^{(3)}, \quad (15)$$

$$i \left(\frac{\partial F_{n,l}^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial F_{n,l}^{(3)}}{\partial x} \right) = m_0 H_{n,l}^{(2)}, \quad (16)$$

$$i \left(\frac{\partial F_{n,l}^{(3)}}{\partial y} - \frac{\partial F_{n,l}^{(2)}}{\partial z} \right) = m_0 H_{n,l}^{(1)}, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial G_{n,l}^{(3)}}{\partial z} + \frac{\partial G_{n,l}^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial G_{n,l}^{(1)}}{\partial x} \right) = m_0 \phi_{n,l}, \quad (18)$$

$$E_{n,l} G_{n,l}^{(1)} + i \left(\frac{\partial H_{n,l}^{(3)}}{\partial z} - \frac{\partial H_{n,l}^{(2)}}{\partial y} \right) = m_0 F_{n,l}^{(1)}, \quad (19)$$

$$E_{n,l}G_{n,l}^{(2)} + i \left(\frac{\partial H_{n,l}^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial H_{n,l}^{(3)}}{\partial x} \right) = m_0 F_{n,l}^{(2)}, \quad (20)$$

$$E_{n,l}G_{n,l}^{(3)} + i \left(\frac{\partial H_{n,l}^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial H_{n,l}^{(1)}}{\partial y} \right) = m_0 F_{n,l}^{(3)}, \quad (21)$$

$$[E_{n,l} - V(r)]F_{n,l}^{(1)} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = m_0 G_{n,l}^{(1)}, \quad (22)$$

$$[E_{n,l} - V(r)]F_{n,l}^{(2)} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = m_0 G_{n,l}^{(2)}, \quad (23)$$

$$[E_{n,l} - V(r)]F_{n,l}^{(3)} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = m_0 G_{n,l}^{(3)}. \quad (24)$$

Yukarıdaki denklemlerin birleştirilmesiyle,

$$i\vec{\nabla} \times \vec{F} = m_0 \vec{H}, \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = m_0 \phi_{n,l}, \quad (26)$$

$$E_{n,l} \vec{G} + i\vec{\nabla} \times \vec{H} = m_0 \vec{F}, \quad (27)$$

$$[E_{n,l} - V(r)]\vec{F} + \vec{\nabla} \phi_{n,l} = m_0 \vec{G}, \quad (28)$$

elde edilir ve böylece bu ifadelerin kullanılmasıyla

$$\{E_{n,l}[E_{n,l} - V(r)] - m_0^2\}\vec{F} - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = 0 \quad (29)$$

denklemini bulunur. Bu ifade de yer alan $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$ terimi için

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{r^2} \right) \vec{F} \quad (30)$$

özdeşliğinin kullanılması ile

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + E_{n,l}^2 - E_{n,l} V(r) - m_0^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \vec{F} = 0 \quad (31)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem biçimsel olarak Proca denklemiyle aynı yapıya sahiptir [31].

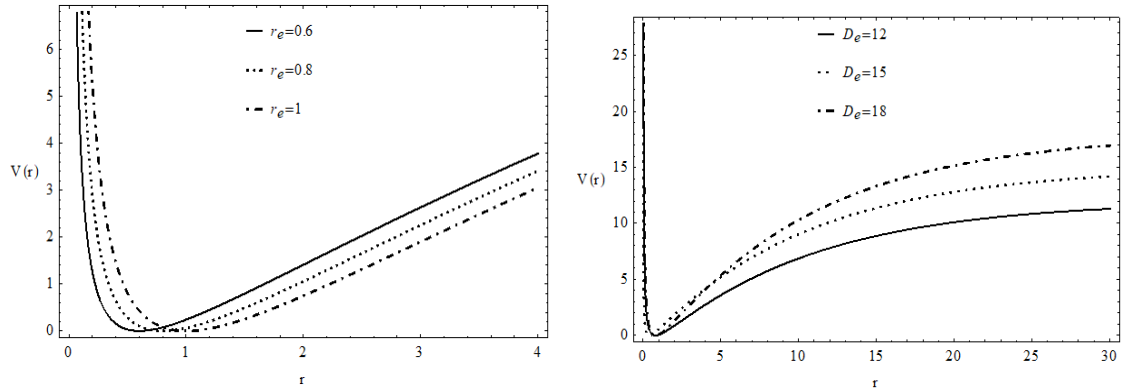
3. Bulgular

3.1 Spin-1 parçacıkları için Frost-Musulün potansiyelinin varlığında DKP denkleminin Bağlı Durum Çözümleri

Diatomik yapıları betimleyen Frost-Musulün potansiyeli aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır [32]:

$$V_{FM}(r) = D_e \left(1 - e^{-\lambda(r-r_e)} - \lambda r_e e^{-\lambda(r-r_e)} + \frac{\lambda r_e^2}{r} e^{-\lambda(r-r_e)} \right) \quad (32)$$

Burada $r \in (0, \infty)$. D_e , λ ve r_e pozitif parametrelerdir ve sırasıyla ayrışma enerjisini, potansiyel kuyusunun aralığını ve denge bağ uzunluğunu temsil ederler. Bu parametrelerin potansiyele olan etkileri Şekil 1 de gösterilmektedir.



Şekil 1. Frost-Musulün potansiyelinin D_e ve r_e parametrelerine göre değişimi. Sol çizim için; $D_e = 15 \text{ fm}^{-1}$ ve $\lambda = 0.1$ dir. Sağ çizim için ise; $r_e = 0.8 \text{ fm}$ ve $\lambda = 0.1$ dir.

Denklem (32)'nin Denklem (31) de yerine yazılmasıyla

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + E_{n,l}^2 - E_{n,l} D_e \left(1 - e^{-\lambda(r-r_e)} - \lambda r_e e^{-\lambda(r-r_e)} + \frac{\lambda r_e^2}{r} e^{-\lambda(r-r_e)} \right) - m_0^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \vec{F} = 0 \quad (33)$$

elde edilir. Bu ifadede birinci türevi kaldırmak amacıyla

$$\vec{F} = r^{-1}\vec{Y}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{n,l}^{(2)} \\ \varphi_{n,l}^{(3)} \\ \varphi_{n,l}^{(4)} \end{pmatrix} = r^{-1} \begin{pmatrix} Y_{n,l}^{(2)} \\ Y_{n,l}^{(3)} \\ Y_{n,l}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (Y_{n,l}^{(2)} = Y_{n,l}^{(3)} = Y_{n,l}^{(4)} = Y) \quad (34)$$

biçiminde yazılır ve Denklem (33) yeniden düzenlenirse,;

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + E_{n,l}^2 - E_{n,l} D_e \left(1 - e^{-\lambda(r-r_e)} - \lambda r_e e^{-\lambda(r-r_e)} + \frac{\lambda r_e^2}{r} e^{-\lambda(r-r_e)} \right) - m_0^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} Y = 0 \quad (35)$$

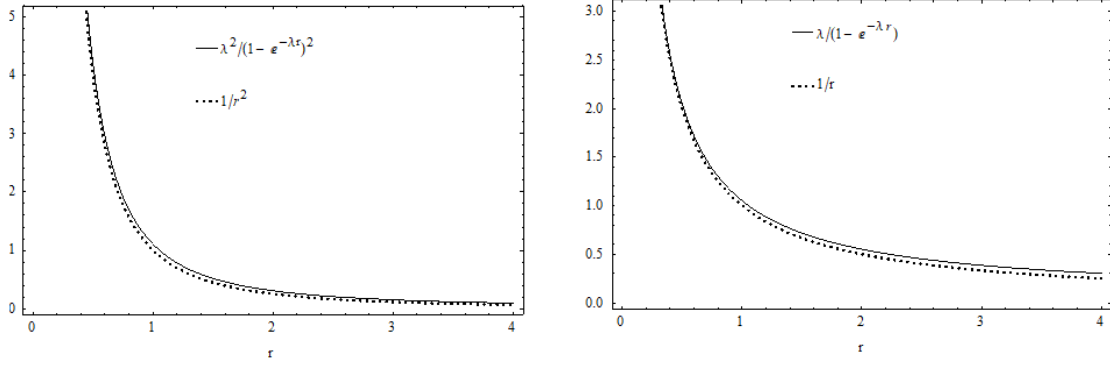
elde edilir. Bu ifade de yer alan $1/r$ ve $1/r^2$ terimleri için $\delta r \ll 1$ koşulu altında [33]

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &\approx \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda r}}, \\ \frac{1}{r^2} &\approx \frac{\lambda^2}{(1-e^{-\lambda r})^2} \end{aligned} \quad (36)$$

yaklaşımları kullanılırsa

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \eta_1 + \eta_2 e^{-\lambda r} + \eta_3 \frac{e^{-\lambda r}}{(1-e^{-\lambda r})} + \eta_4 \frac{1}{(1-e^{-\lambda r})^2} \right\} Y = 0 \quad (37)$$

bulunur. $\lambda = 0.1$ değeri için bu yaklaşımların uygunluğu Şekil 2 de görülmektedir.



Şekil 2. $1/r$ ve $1/r^2$ terimleri için kullanılan yaklaşımlar. Her iki çizim için; $\lambda = 0.1$ dir.

Denklem (37) de yer alan η_1, η_2, η_3 ve η_4 parametreleri aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= E_{n,l}^2 - E_{n,l} D_e - m_0^2, & \eta_2 &= E_{n,l} D_e (\lambda r_e + 1) e^{\lambda r_e}, \\ \eta_3 &= -E_{n,l} D_e \lambda^2 r_e^2 e^{\lambda r_e}, & \eta_4 &= -\lambda^2 l(l+1).\end{aligned}\quad (38)$$

Denklem (37) için $x = e^{-\lambda r}$ biçiminde yeni bir değişken tanımlanırsa

$$\begin{aligned}x(1-x) \frac{d^2 Y}{dx^2} + (1-x) \frac{dY}{dx} + \frac{1}{x(1-x)\lambda^2} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_4) \\ + (\eta_3 - 2\eta_2 - 2\eta_1)x + (\eta_1 + \eta_2 - \eta_3)x^2 + \eta_2(x-1)^3] Y = 0\end{aligned}\quad (39)$$

ifadesi elde edilir. $\lambda r \ll 1$ olduğundan $(x-1)^3 \approx 0$ olur [32]. Böylece denklem (39) aşağıdaki biçimi alır:

$$x(1-x) \frac{d^2 Y}{dx^2} + (1-x) \frac{dY}{dx} + \frac{1}{x(1-x)} [-\alpha_1 - \alpha_2 x + \alpha_3 x^2] Y = 0\quad (40)$$

Bu bağıntıda yer alan $\alpha_1, \alpha_2,$ ve α_3 parametreleri aşağıdaki biçimdedir:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\lambda^2} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_4), \quad \alpha_2 = \frac{1}{\lambda^2} (2\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3), \quad \alpha_3 = \frac{1}{\lambda^2} (\eta_1 + \eta_2 - \eta_3)\quad (41)$$

Denklem (40)'ı çözmek amacıyla dalga fonksiyonu $Y(x) = x^\sigma (1-x)^\epsilon \zeta(x)$ olarak yeniden tanımlanır ve gerekli işlemler yapılırsa Denklem (41) aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$x(1-x) \frac{d^2\zeta(x)}{dx^2} + [(2\sigma+1) - (2\sigma+2\varepsilon+1)x] \frac{d\zeta(x)}{dx} + (\sigma+\varepsilon+\gamma)(\sigma+\varepsilon+\gamma)\zeta(x) = 0 \quad (42)$$

Bu ifadede yer alan parametreler aşağıda verilmiştir:

$$\sigma = \pm\sqrt{\alpha_1}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4(\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1)}), \quad \gamma = \pm\sqrt{-\alpha_3}. \quad (43)$$

Denklem (42) Gauss Hipergeometrik diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü doğrudan aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\zeta(x) = A_1 {}_2F_1(\sigma + \varepsilon + \gamma, \sigma + \varepsilon - \gamma; 1 + 2\sigma; x) + A_2 x^{-2\sigma} {}_2F_1(-\sigma + \varepsilon + \gamma, -\sigma + \varepsilon - \gamma; 1 - 2\sigma; x) \quad (44)$$

böylece genel çözüm:

$$Y(x) = A_1 x^\sigma (1-x)^\varepsilon {}_2F_1(\sigma + \varepsilon + \gamma, \sigma + \varepsilon - \gamma; 1 + 2\sigma; x) + A_2 x^{-\sigma} (1-x)^\varepsilon {}_2F_1(-\sigma + \varepsilon + \gamma, -\sigma + \varepsilon - \gamma; 1 - 2\sigma; x) \quad (45)$$

olarak elde edilir. Düzenli çözümleri elde etmek amacıyla dalga fonksiyonlarının sınır koşullarını uygulamamız gerekmektedir. Bu koşullar [34];

i) Birinci sınır koşulu: $r \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow 0$) iken dalga fonksiyonu sıfır olmalıdır. $x \rightarrow 0$ durumunda hipergeometrik fonksiyonlar 1'e eşit olur. Dolayısıyla Denklem (44) aşağıdaki biçimde olur:

$$Y(x) = A_1 x^\sigma + A_2 x^{-\sigma} \quad (46)$$

$\sigma = \sqrt{\alpha_1}$ için Denklem (45)'in birinci sınır koşulunu sağlaması gerektiğinden $A_2 = 0$ olmalıdır. Bu durumda dalga fonksiyonu

$$Y(x) = A_1 x^\sigma (1-x)^\varepsilon {}_2F_1(\sigma + \varepsilon + \gamma, \sigma + \varepsilon - \gamma; 1 + 2\sigma; x) \quad (47)$$

biçiminde olur.

İi) İkinci sınır koşulu: $r \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 1$) iken dalga fonksiyonu sıfır olmalıdır. $x \rightarrow 1$ durumunda hipergeometrik fonksiyonların özelliği de kullanılarak;

$$\sigma + \varepsilon + \gamma = -n \quad (48)$$

kuantizasyon koşulu elde edilir. Bu bağıntının kullanılması ve Denklem (38), Denklem (41) ve Denklem (43) te yer alan tanımlamaların yerine yazılmasıyla bağlı durum enerji özdeğerlerini veren bağıntı aşağıdaki biçimde bulunur:

$$E_{n,l}^2 - l(1+l)\lambda^2 - E_{n,l}D_e - m_0^2 + E_{n,l}D_e(1 + \lambda r_e)e^{\lambda r_e} + \frac{\lambda^2}{4} \left[2 + 2l + 2n - 2\sqrt{\frac{-E_{n,l}^2 + m_0^2 + E_{n,l}D_e[1 - e^{\lambda r_e}(1 + \lambda r_e)]}{\lambda^2}} \right]^2 = 0 \quad (49)$$

Denklem (49)'un analitik çözümü mümkün değildir. Ancak Mathematica yazılım programının kullanılması ve potansiyelde yer alan parametrelere belirli değerlerin verilmesi halinde nümerik sonuçlar kolayca hesaplanabilir. Bütün bu işlemlerin yapılmasıyla farklı kuantum durumlarına karşılık gelen bağlı durum enerji özdeğerleri Tablo 1. verilmektedir. Potansiyel parametrelerinin enerji değerlerine etkileri ise Şekil 3. ve Şekil 4. de verilmiştir.

4. Sonuç ve Yorum

Frost-Musulın potansiyelinin varlığında DKP denklemi ilk kez bu çalışmada ele alınmıştır. Standart yöntem kullanılarak merkezci terime uygun bir yaklaşımın getirilmesiyle spin-1 parçacıklarının bağlı durum çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümler kullanılarak bağlı durumlar için enerji özdeğerlerini veren bağıntı türetilmiştir. Mathematica yazılım programının kullanılması ve potansiyelde yer alan parametrelere belirli değerlerin verilmesi ile farklı kuantum durumlarına karşılık gelen nümerik sonuçlar Tablo 1. verilmektedir.

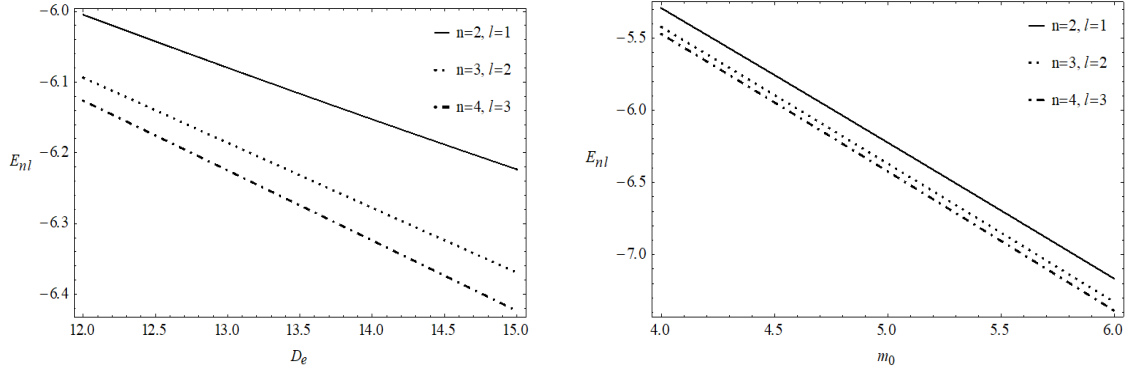
Potansiyel parametrelerinin enerji değerlerine etkileri Şekil 3. ve Şekil 4. de verilmektedir. D_e ve m_0 parametrelerinin bağlı durum enerji değerlerini nasıl etkiledikleri farklı n ve l sayıları için Şekil 1'de gösterilmektedir. Şekil 1 sol çizimde görüldüğü biçimde; D_e parametresinin sayısal değerinin artması durumunda enerji değerleri azalmaktadır. Şekil 1 sağ çizim incelendiğinde; m_0 parametresinin sayısal değerinin artması sonucunda bağlı durum enerji değerlerinin arttığı görülür. Şekil 4'de ise potansiyelin biçimini betimleyen r_e ve λ parametrelerinin bağlı durum enerji

değerlerine olan etkileri gösterilmektedir. Şekil 4. sol çizimde görüldüğü biçimde; $n = 2, l = 1$ için $0 < r_e < 0.9387 \text{ fm}$ aralığında enerji değerleri azalırken, $0.9387 \text{ fm} < r_e$ için enerji değerleri artmaktadır. $n = 3, l = 2$ için bu aralık; $0 < r_e < 1.176 \text{ fm}$, $1.176 \text{ fm} < r_e$ olmakta, $n = 4, l = 3$ için ise bu aralık; $0 < r_e < 1.413 \text{ fm}$, $1.413 \text{ fm} < r_e$ olmaktadır. Fakat her bir kuantum durumu için $r_e \geq 7.915 \text{ fm}$ değerleri için enerji değeri sıfır olmaktadır. Şekil 4. sağ çizim incelendiğinde benzer bir etkinin λ parametresinin değişimiyle de gerçekleştiği görülür. $n = 2, l = 1$ için $0 < \lambda < 0.2555$ aralığında enerji değerleri azalırken, $0.2555 < \lambda$ için enerji değerleri artmaktadır. $n = 3, l = 2$ için bu aralık; $0 < \lambda < 4.158$, $4.158 \text{ fm} < \lambda$ olmakta, $n = 4, l = 3$ için ise bu aralık; $0 < \lambda < 5.160 \text{ fm}$, $5.160 < \lambda$ olmaktadır. Fakat her bir kuantum durumu için $\lambda \geq 4.514$ değerleri için enerji değeri sıfır olmaktadır.

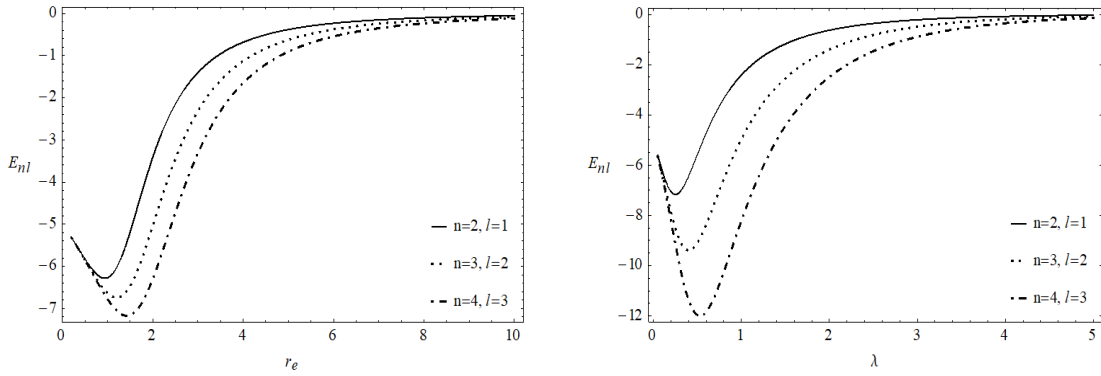
Bu çalışma, Frost-Musulin potansiyeli birçok diatomik yapıyı betimlediğinden literatürde faydalı bir referans olacaktır. Dolayısıyla, bu çalışmada elde edilen veriler fizik ve kimyadaki farklı araştırma alanlarında kullanılabilir. Örneğin, enerji özdeğer formülünü kullanarak, farklı moleküller için enerji değerleri sayısal olarak hesaplanabilir. Ayrıca saçılma durumu çözümleri elde edilerek; diferansiyel saçılma kesiti ve saçılma genliği, faz kayması ilişkisi kullanılarak hesaplanabilir.

Tablo 1. Farklı kuantum durumlarına karşılık gelen enerji özdeğerleri. Burada $D_e = 15 \text{ fm}^{-1}$, $m_0 = 5 \text{ fm}^{-1}$, $r_e = 0.8 \text{ fm}$ ve $\lambda = 0.1$ dir. ($\hbar = c = 1$)

$ n, l\rangle$	E_{nl}	$ n, l\rangle$	E_{nl}
$ 1,0\rangle$	-5.57633	$ 5,0\rangle$	-6.41762
$ 2,0\rangle$	-6.20746	$ 5,1\rangle$	-6.42112
$ 2,1\rangle$	-6.22333	$ 5,2\rangle$	-6.42789
$ 3,0\rangle$	-6.34633	$ 5,3\rangle$	-6.43747
$ 3,1\rangle$	-6.35418	$ 5,4\rangle$	-6.44918
$ 3,2\rangle$	-6.36927	$ 6,0\rangle$	-6.42813
$ 4,0\rangle$	-6.39576	$ 6,1\rangle$	-6.43086
$ 4,1\rangle$	-6.40065	$ 6,2\rangle$	-6.43617
$ 4,2\rangle$	-6.41009	$ 6,3\rangle$	-6.44372
$ 4,3\rangle$	-6.42336	$ 6,4\rangle$	-6.45305



Şekil 3. D_e ve m_0 parametrelerinin enerji değerlerine olan etkileri. Sol çizim için; $m_0 = 5 \text{ fm}^{-1}$, $r_e = 0.8 \text{ fm}$ ve $\lambda = 0.1$ dir. Sağ çizim için ise; $D_e = 15 \text{ fm}^{-1}$, $r_e = 0.8 \text{ fm}$ ve $\lambda = 0.1$ dir.



Şekil 4. r_e ve λ parametrelerinin enerji değerlerine olan etkileri. Sol çizim için; $m_0 = 5 \text{ fm}^{-1}$, $D_e = 15 \text{ fm}^{-1}$ ve $\lambda = 0.1$ dir. Sağ çizim için ise; $D_e = 15 \text{ fm}^{-1}$, $m_0 = 5 \text{ fm}^{-1}$ ve $r_e = 0.8 \text{ fm}$ dir.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyanı

Ahmet TAŞ: Araştırma, Orijinal Taslak Yazımı, İnceleme ve Düzenleme.

Destek ve Teşekkür Beyanı

Bu çalışmanın yazarı olarak herhangi bir destek ve teşekkür beyanımız bulunmadığını bildiririm.

Çatışma Beyanı

Bu çalışmanın yazarı olarak herhangi bir çatışma beyanımın bulunmadığını bildiririm.

Etik Kurul Onayı ve/veya Aydınlatılmış Onam Bilgileri

Bu çalışmanın yazarı olarak herhangi bir etik kurul onayı ve/veya aydınlatılmış onam bilgileri beyanımın bulunmadığını bildiririm.

Kaynakça

- [1] N. Kemmer, "The particle aspect of meson theory," *Proc. of the Roy. Soc. of Lon.*, 173 (952), 91-116, 1939
- [2] R. J. Duffin, "On the characteristic matrices of covariant systems," *Phys. Rev.*, 54 (12), 1114, 1938
- [3] G. Petiau, "Contribution a la theorie des equations dondes corpusculaire," Ph.D. Thesis, University of Paris, Published in Acad. Roy. de Belg., Classe Sci., Mem in 8, 16 (2), 1936.
- [4] R. E. Kozack, B. C. Clark, S. Hama, V. K. Mishra, R. L. Mercer, and L. Ray, "Spin-one Kemmer-Duffin-Petiau equations and intermediate-energy deuteron-nucleus scattering," *Phys. Rev. C*, 40 (5), 2181, 1989.
- [5] V. Gribov, "QCD at large and short distances (annotated version)," *EPJC*, 10 (1), 71-90, 1999.
- [6] Y. Nedjadi and R. C. Barrett, "On the properties of the Duffin-Kemmer-Petiau equation," *J. Phys. G*, 19 (1), 87, 1993.
- [7] Y. Nedjadi and R. C. Barrett, "The Duffin-Kemmer-Petiau oscillator," *J. Phys. A*, 27 (12), 4301, 1994.
- [8] Y. Nedjadi and R. C. Barrett, "Solution of the central field problem for a Duffin-Kemmer-Petiau vector boson," *J. Math. Phys.*, 35 (9), 4517-4533, 1994.
- [9] H. Hassanabadi, S. F. Forouhandeh, H. Rahimov, S. Zarrinkamar, and B. H. Yazarloo, "Duffin-Kemmer-Petiau equation under a scalar and vector Hulthen potential; an ansatz solution to the corresponding Heun equation," *Can. J. Phys.*, 90 (3), 299-304, 2012.
- [10] M. Hamzavi and S. M. Ikhdair, "Approximate solution of the Duffin-Kemmer-Petiau equation for a vector Yukawa potential with arbitrary total angular momenta," *FBYS*, 54 (11), 1753-1763, 2013.
- [11] S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, B. H. Yazarloo, and H. Hassanabadi, "An approximate solution of the DKP equation under the Hulthén vector potential," *Chin. Phys. C*, 37 (2), 023101, 2013.
- [12] M. K. Bahar, "AIM solutions to the DKP equation for spin-1 particles in the presence of kratzer potential in (2+1) dimensions," *FBYS*, 54 (11), 2133-2142, 2013.
- [13] M. K. Bahar and F. Yasuk, "Relativistic spin-1 particles with position-dependent mass under the Coulomb interaction: Exact analytical solutions of the DKP equation," *Can. J. Phys.*, 91 (3), 191-197, 2013.
- [14] M. K. Bahar and F. Yasuk, "Ansatz approach solution of the Duffin-Kemmer-Petiau equation for spin-1 particles with position-dependent mass in the presence of Kratzer-type potential," *Can. J. Phys* 92 (12), 1565-1569, 2014.
- [15] C. A. Onate, J. O. Ojonubah, A. Adeoti, J. E. Eweh, and M. Ugboja, "Approximate eigen solutions of DKP and Klein-Gordon equations with Hellmann potential," *Afr. Rev. Phys.*, 9 (006), 497-504, 2014
- [16] A. N. Ikot, et al, "Analytical solutions of the DKP equation under Tietz-Hua potential in (1+ 3) dimensions," *Phys. Par. Nuc. Let.*, 12.2 (2015): 275-281, 2014.
- [17] S. Zarrinkamar, H. Panahi, and M. Rezaei, "The generalized Coulomb interactions for relativistic scalar bosons," *Phys. Par. Nuc. Let.*, 13 (4), 436-441, 2016.
- [18] O. J. Oluwadare and K. J. Oyewumi, "Scattering state solutions of the Duffin-Kemmer-Petiau equation with the Varshni potential model," *EPJ A*, 53 (2), 1-6, 2017.
- [19] O. J. Oluwadare. and K. J. Oyewumi, "Approximate scattering state solutions of DKPE and SSE with Hellmann Potential," *Adv. H. E. Phys.*, 2018.
- [20] H. Hassanabadi, B. Yazarloo, S. Zarrinkamar, and A. A. Rajabi, "Duffin-Kemmer-Petiau equation under a scalar Coulomb interaction," *Phys. Rev. C*, 84 (6), 064003, 2011.
- [21] A. Taş and A. Havare, "Bound and Scattering States Solution of the Relativistic Spinless Particles in View of the Multiparameter Potential," *FBYS*, 59 (4), 1-16, 2018.
- [22] H. Yanar, A. Taş, M. Salti, and O. Aydogdu, "Ro-vibrational energies of CO molecule via improved generalized Pöschl-Teller potential and Pekeris-type approximation," *EPJP*, 135 (3), 1-14, 2020.
- [23] N. Tazimi and A. Ghasempour, "Bound state solutions of three-dimensional Klein-Gordon equation for two model potentials by NU method," *Adv. H. E. Phys*, 2020, Article ID 2541837, 2020.
- [24] E. P. Inyang, E. P. Inyang, J. E. Ntibi, E. E. Ibekwe, and E. S. William, "Approximate solutions of D-dimensional Klein-Gordon equation with Yukawa potential via Nikiforov-Uvarov method," *IJP*, 1-7, 2020.
- [25] I. L. Elviyanti, B. N. Pratiwi, A. Suparmi, and C. Cari, "The application of minimal length in Klein-Gordon equation with Hulthen potential using asymptotic iteration method," *AMP*, 2018.
- [26] A. N. Ikot, U. A. T. Okorie, C. A. Ngiangia, C. O. Onate, I. O. Edet, and P. O. Amadi, "Bound state solutions of the Schrödinger equation with energy-dependent molecular Kratzer potential via asymptotic iteration method," *Ec. Q. J.*, 45 (1), 65-76, 2020.
- [27] M. Eshghi, H. Mehraban, and M. Ghafoori, "Non-relativistic Eigen spectra with q-deformed physical potentials by using the SUSY approach," *Math. Met. App. Sci.*, 40 (4), 1003-1018, 2017.

- [28] A. I. Ahmadov, S. M. Nagiyev, M. V. Qocayeva, K. Uzun, and V. A. Tarverdiyeva, “Bound state solution of the Klein–Fock–Gordon equation with the Hulthén plus a ring-shaped-like potential within SUSY quantum mechanics,” *IJMP A*, 33 (33), 1850203, 2018.
- [29] Z. Molaee, M. Ghominejad, H. Hassanabadi, and S. Zarrinkamar, “S-wave solutions of spin-one DKP equation for a deformed Hulthén potential in (1+ 3) dimensions,” *EPJP*, 127 (9), 1-8, 2012.
- [30] M. K. Bahar and F. Yasuk, “Relativistic solutions for the spin-1 particles in the two-dimensional Smorodinsky–Winternitz potential,” *Ann. Phys.*, 344, 105-117, 2014.
- [31] L. B. Castro, and A. S. De Castro, “Corroborating the equivalence between the Duffin-Kemmer-Petiau and the Klein-Gordon and Proca equations,” *Phys. Rev. A.*, 90 (2), 022101, 2014.
- [32] A. Tas, O. Aydogdu, and M. Salti, “Dirac particles interacting with the improved Frost–Musulin potential within the effective mass formalism,” *Ann. Phys.*, 379, 67-82, 2017.
- [33] A. Tas, O. Aydogdu, and M. Salti, “Relativistic spinless particles with position dependent mass: Bound states and scattering phase shifts,” *J. Kor. Phy. Soc.*, 70 (10), 896-904, 2018.
- [34] S. Flugge, *Practical Quantum Mechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 189s., 1994.