

SERİ  
SERIE B

CİLT  
TOME XXII

SAYI  
FASCICULE I

1972

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
ORMAN FAKÜLTESİ  
DERGİSİ

REVUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES FORESTIÈRES  
DE L'UNIVERSITÉ D'ISTANBUL



## BEŞ DEĞİŞGENLİ FONKSİYON VE ORMANCILIKTA SAĞLADIĞI FAYDALAR

Yazan :

Doç. Dr. Tahsin TOKMANOĞLU

### GİRİŞ

Bir veya birden fazla değişgene (Parametre'ye) bağlı olarak değişen sayıya, o değişgenin veya değişgenlerin fonksiyon'u denilmektedir. Değişgenlerden biri veya birkaçı değiştikçe fonksiyon da değişir. Yazımızda 5 değişgenli bir fonksiyon incelenmiş ve bunun ormancılıkta sağladığı faydalar üzerinde durulmuştur.

Değişgenlerden bir kısmının değişmesi fonksiyonu büyük çapta etkilediği halde, diğerlerinin değişmesi fonksiyonu çok az etkiler. Bu sebeple her fonksiyonda evvelâ değişgenlerin neler olduğunu saptamak, daha sonra da değişgenlerin fonksiyonu ne derecede etkilediğini ortaya çıkartmak gerekir. Diğer bir deyişle değişgenlerin kat sayılarını bulmak gerekir.

Ormancılıkta karşılaşılan problemlerin daima 5 değişgenli bir fonksiyona indirgenebileceğini iddia etmeye imkân yoktur. Değişgen sayısı 5 ten az olabileceği gibi fazla da olabilir. Konuyu daha kolay anlaşılabilir bir hale getirmek gayesile, 5 değişgenli fonksiyon misâl olarak alınmıştır. Değişgen sayısının 5 ten fazla olduğu durumlar çok azdır. Aşağıda yazılan fonksiyonlarda, 5 inci değişgenin kat sayısı sıfır alındığı takdirde 4 değişgenli fonksiyon elde edilir. Bu sebeple 5 değişgenli fonksiyon için ileri sürülen düşünceleri 4, 3, 2 ve 1 değişgenli fonksiyonlara da uygulamak mümkündür (5, 9).

#### *Beş değişgenli fonksiyon ve özellikleri*

5 değişgenli bir fonksiyon şu şekilde gösterilir.

$$L = K_1a + K_2b + K_3c + K_4d + K_5e + K_6 \quad (1)$$

Burada a, b, c, d, e değerleri değişgenleri göstermektedir.  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$ ,  $K_5$  değerleri ise değişgenlerin kat sayılarıdır.

$K_6$  terimi bilinen bir değeri belirtmektedir.  $L$  değeri 5 değişgene bağlı olarak değişen bir sayıyı göstermektedir. Diğer bir söyleyişle,  $L$  değeri 5 değişgenli bir fonksiyondur.

Değişgenlerin her biri sıfıra eşit olduğu zaman, fonksiyonun değeri de sıfır oluyorsa  $K_6 = 0$  dır. Bu durumda (1) nolu fonksiyon

$$L = K_1a + K_2b + K_3c + K_4d + K_5e \quad (2)$$

şeklini alır.

$K_6$  i sol tarafa atıp  $L$  ile birleştirmek de mümkündür.

5 değişgene bağlı olarak cereyan eden bir olayda, değişgenleri ve olayın sonucunu ölçtüğümüzü, değişgenler için sırasile  $a_1, b_1, c_1, d_1$  ve  $e_1$  değerlerini bulduğumuzu, olayın sonucu için de  $L_1$  değerini elde ettiğimizi düşünelim.  $K_6 = 0$  olduğu biliniyorsa (2) nolu fonksiyon bu olaya uygulanarak

$$L_1 = K_1a_1 + K_2b_1 + K_3c_1 + K_4d_1 + K_5e_1 \quad (3)$$

yazılabilir.

$K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  katsayıları evvelden biliniyorsa yukarıda yerlerine konulur. Sağ taraf hesaplandığında sol taraftaki  $L_1$  değerinin aynen elde edilmesi gerekir. Şayet bulunmazsa ya ölçülerde ya hesaplarda ve yahut da evvelce hesaplanmış katsayılarda hatâ vardır.

Aynı karakterli 5 ayrı olayda serbest değişgenler ve olayların sonuçları ölçülse  $K_6 = 0$  olduğuna göre aşağıdaki 5 denklem yazılabilir.

$$\begin{aligned} L_1 &= K_1a_1 + K_2b_1 + K_3c_1 + K_4d_1 + K_5e_1 \\ L_2 &= K_1a_2 + K_2b_2 + K_3c_2 + K_4d_2 + K_5e_2 \\ L_3 &= K_1a_3 + K_2b_3 + K_3c_3 + K_4d_3 + K_5e_3 \\ L_4 &= K_1a_4 + K_2b_4 + K_3c_4 + K_4d_4 + K_5e_4 \\ L_5 &= K_1a_5 + K_2b_5 + K_3c_5 + K_4d_5 + K_5e_5 \end{aligned} \quad (4)$$

Bu denklem sisteminden faydalanarak  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  katsayılarını hesaplamak mümkündür. Katsayılar hesaplanınca fonksiyon belirli hale gelir. Katsayısı büyük olan değişgenler, fonksiyonu büyük çapta etkileyen değişgenlerdir. Küçük olanlar ise, fonksiyonu küçük çapta etkileyenlerdir.

Aynı karakterli 5 ayrı olaydan faydalanmak suretile, 5 değişgenli fonksiyonun katsayıları hesaplansa ve fonksiyon belirli hale getirilse. Sonra bu fonksiyon aynı karakterdeki 6. 7. 8. .... nolu olaylara uygulanacak olsa tam olarak gerçekleşemediği görülür.

Bu durum aşağıdaki hükmün ortaya çıkmasına sebep olmaktadır.

Tabiat olayları, matematiğin teorik hesaplarına tam olarak uymamaktadır. Ancak yaklaşık değerler verecek şekilde uymaktadır.

Şu halde 5 ayrı olaya dayanılarak elde edilen fonksiyonun, bütün olaylara tam olarak, uymasını ve kesin değerler vermesini beklemek asla doğru değildir.

Burada hatıra şu soru gelmektedir :

Aynı karakterli bütün olaylara uyabilen ve kesin sonuç veren fonksiyon elde edilemediğine göre, bu olaylara uyan ve yaklaşık sonuç veren bir fonksiyon elde edilemez mi?

Bu soruyu matematik istatistik cevaplandırmakta ve olayların sonucuna en çok yaklaşan değerleri verebilen fonksiyonu ortaya çıkarmaktadır. Diğer bir söyleyişle matematik istatistik, olayların muhtemel sonuçlarının neler olabileceğini veren fonksiyonları hesaplayabilmektedir. Bu fonksiyonların nasıl hesaplandığını açıklayabilmek için evvela (Kısmî Türev) ve Normal Denklemleri) gözden geçirmeliyiz gereklidir (1, 2, 4, 5, 8).

#### K I S M İ T Ü R E V

Birden fazla değişgeni olan bir fonksiyonda, birinci değişgenin değiştiğini, diğerlerinin sabit kaldığını düşünelim. Bu fonksiyonun birinci değişgene göre türevi alınarak bir türev denklemi elde edilebilir. Türev alınırken diğer değişgenlere birer sabit sayı gözü ile bakılır. Aynı fonksiyonun ikinci değişgene göre türevi alınırsa, ikinci bir türev denklemi ortaya çıkar. Türev denklemlerinin hepsinin ayrı ayrı sıfıra eşit olması hali, fonksiyonun maksimum veya minimum olması halini gösterir.

Kısmî Türev, yukarda açıklanan özelliğinden dolayı, matematik istatistikte büyük önemi olan bir konudur.

Kısmî türevin nasıl hesaplandığını bir misâlle açıklayalım.

$$Z = (2X^2 + 3XY - 5Y^2 - 12)^3 \quad (5)$$

fonksiyonunda Z değerinin X ve Y değişgenlerine bağlı olarak değiştiği görülmektedir.

Z nin X değişgenine göre türevi :

$$Z'_X = 3 (2X^2 + 3XY - 5Y^2 - 12)^2 (4X - 3Y) \quad (6)$$

dır.

Z nin Y değişgenine göre türevi :

$$Z'_Y = 3 (2X^2 + 3XY - 5Y^2 - 12)^2 (3X - 10Y) \quad (7)$$

dir.

(6) ve (7) nolu türev denklemleri (5) nolu fonksiyonun kısmî Türevleridir. Bunların sıfır olmasını sağlayan X ve Y değerleri, Z nin maksimum olmasını sağlayan değerlerdir.

#### N O R M A L D E N K L E M L E R

Aynı karakterdeki bütün olaylara uyabilen ve olayların sonuçlarına en çok yaklaşabilen değerler veren fonksiyonu elde ettiğimizi farzedelim. Bu fonksiyonu birinci olaya uyguladığımız takdirde elde edeceğimiz sonuç  $L_1$  olsun. Bizim tabiatta ölçtüğümüz sonuca da  $L'_1$  diyelim.

$L_1 - L'_1$  farkına  $V_1$  dersek

$$V_1 = L_1 - L'_1 = K_1a_1 + K_2b_1 + K_3c_1 + K_4d_1 + K_5e_1 - L'_1$$

yazılabilir.

Aynı fonksiyonun tabiattaki n tane olaya uygulanması halinde elde edilen sonuçlar sırasile  $L_1, L_2, \dots, L_n$  olsun. Tabiatta bizim ölçtüğümüz sonuçlar sırasile  $L'_1, L'_2, \dots, L'_n$  ise, farklara da  $V_1, V_2, \dots, V_n$  denirse

$$V_1 = L_1 - L'_1 = K_1a_1 + K_2b_1 + K_3c_1 + K_4d_1 + K_5e_1 - L'_1$$

$$V_2 = L_2 - L'_2 = K_1a_2 + K_2b_2 + K_3c_2 + K_4d_2 + K_5e_2 - L'_2$$

$$\dots\dots\dots (8)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$V_n = L_n - L'_n = K_1a_n + K_2b_n + K_3c_n + K_4d_n + K_5e_n - L'_n$$

yazılabilir.

L ve L' değerlerinin farklarını gösteren V değerlerinin karelerinin toplamının asgarî olmasını sağlayan katsayılar, aranan fonksiyonun tabrikattaki olayların sonuçlarına en çok yaklaşabilmesini sağlayan katsayılardır. Diğer bir söyleyişle,  $\Sigma V^2$  nin minimum olması için (8) nolu fonksiyonlardaki  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  katsayılarının kaç olması gerektiğini arayacağız, aradığımız ana fonksiyonun katsayılarıdır.

Evvelâ  $V^2$  değerlerinin eşitlerini yazalım sonra toplayalım.

$V^2$  değerlerinin eşitleri şunlardır :

$$\begin{aligned} V_1^2 &= (K_1a_1 + K_2b_1 + K_3c_1 + K_4d_1 + K_5e_1 - L'_1)^2 \\ V_2^2 &= (K_1a_2 + K_2b_2 + K_3c_2 + K_4d_2 + K_5e_2 - L'_2)^2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$V_n^2 = (K_1a_n + K_2b_n + K_3c_n + K_4d_n + K_5e_n - L'_n)^2$$

$V^2$  değerlerinin toplamı

$$\Sigma V^2 = V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2 \quad (10)$$

dir.

$K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  katsayılarının hangi değerlerinin  $\Sigma V^2$  nin minimum olmasını sağlayacağını araştırıyoruz.

(9) ve (10) nolu denklemlerde görüldüğü üzere  $\Sigma V^2$ , 5 değişgene bağlı olarak değişen bir fonksiyondur. Değişkenler  $K_1, K_2, K_3, K_4$  ve  $K_5$  dir.

Kısmî Türev bahsinde görüldüğü üzere,  $\Sigma V^2$  nin minimum olmasını sağlayan  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$ , değerlerini elde edebilmek için,  $\Sigma V^2$  nin kısmî türevlerini almak ve bunların sıfır olmasını sağlayan değerleri araştırmak gerekir.

$\Sigma V^2$  nin  $K_1$  değişgenine göre türevi;

$$\begin{aligned} \sum_{K_1} V^2 &= 2 (K_1a_1 + K_2b_1 + K_3c_1 + K_4d_1 + K_5e_1 - L'_1) a_1 + \\ &2 (K_1a_2 + K_2b_2 + K_3c_2 + K_4d_2 + K_5e_2 - L'_2) a_2 + \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ &2 (K_1a_n + K_2b_n + K_3c_n + K_4d_n + K_5e_n - L'_n) a_n \end{aligned} \quad (11)$$

dir.



$\Sigma V^2$  nin  $K_3$  değişgenine göre türevi :

$$\sum_{K_3} V^2 = 2(K_1a_1 + K_2b_1 + K_3c_1 + K_4d_1 + K_5e_1 - L'_1) e_1 +$$

$$2(K_1a_2 + K_2b_2 + K_3c_2 + K_4d_2 + K_5e_2 - L'_2) e_2 +$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$2(K_1a_n + K_2b_n + K_3c_n + K_4d_n + K_5e_n - L'_n) e_n$$
(15)

dir.

$\Sigma V^2$  nin kısmi türevlerini elde etmiş bulunuyoruz, bunlar (11), (12), (13), (14) ve (15) no ile gösterilen 5 denklemdir.

Bu denklemlerin sonuçlarının sıfır olması istendiğine göre :

$$\sum_{K_1} V^2 = 0, \quad \sum_{K_2} V^2 = 0, \quad \sum_{K_3} V^2 = 0, \quad \sum_{K_4} V^2 = 0, \quad \sum_{K_5} V^2 = 0$$

yazılması gerekir.

(11), (12), (13), (14), (15) nolu denklemlerde eşit işaretlerinin sol taraflarına sıfır yazılır, her iki taraf 2 ile bölünür ve parantezler açılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(11) nolu denklemden :

$$a_1a_1K_1 + a_1b_1K_2 + a_1c_1K_3 + a_1d_1K_4 + a_1e_1K_5 - a_1L'_1 +$$

$$a_2a_2K_1 + a_2b_2K_2 + a_2c_2K_3 + a_2d_2K_4 + a_2e_2K_5 - a_2L'_2 +$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_na_nK_1 + a_nb_nK_2 + a_nc_nK_3 + a_nd_nK_4 + a_ne_nK_5 - a_nL'_n = 0$$
(16)

(12) nolu denklemden :

$$a_1b_1K_1 + b_1b_1K_2 + b_1c_1K_3 + b_1d_1K_4 + b_1e_1K_5 + b_1L'_1 +$$



$$a_2 b_2 K_1 + b_2 b_2 K_2 + b_2 c_2 K_3 + b_2 d_2 K_4 + b_2 e_2 K_5 - b_2 L'_2 + \dots \quad (17)$$

$$a_n b_n K_1 + b_n b_n K_2 + b_n c_n K_3 + b_n d_n K_4 + b_n e_n K_5 - b_n L'_n = 0$$

(13) nolu denklemden :

$$a_1 c_1 K_1 + b_1 c_1 K_2 + c_1 c_1 K_3 + c_1 d_1 K_4 + c_1 e_1 K_5 - c_1 L'_1 + a_2 c_2 K_1 + b_2 c_2 K_2 + c_2 c_2 K_3 + c_2 d_2 K_4 + c_2 e_2 K_5 - c_2 L'_2 + \dots \quad (18)$$

$$a_n c_n K_1 + b_n c_n K_2 + c_n c_n K_3 + c_n d_n K_4 + c_n e_n K_5 - c_n L'_n = 0$$

(14) nolu denklemden :

$$a_1 d_1 K_1 + b_1 d_1 K_2 + c_1 d_1 K_3 + d_1 d_1 K_4 + d_1 e_1 K_5 - d_1 L'_1 + a_2 d_2 K_1 + b_2 d_2 K_2 + c_2 d_2 K_3 + d_2 d_2 K_4 + d_2 e_2 K_5 - d_2 L'_2 + \dots \quad (19)$$

$$a_n d_n K_1 + b_n d_n K_2 + c_n d_n K_3 + d_n d_n K_4 + d_n e_n K_5 - d_n L'_n = 0$$

(15) nolu denklemden :

$$a_1 e_1 K_1 + b_1 e_1 K_2 + c_1 e_1 K_3 + d_1 e_1 K_4 + e_1 e_1 K_5 - e_1 L'_1 + a_2 e_2 K_1 + b_2 e_2 K_2 + c_2 e_2 K_3 + d_2 e_2 K_4 + e_2 e_2 K_5 - e_2 L'_2 + \dots \quad (20)$$

$$a_n e_n K_1 + b_n e_n K_2 + c_n e_n K_3 + d_n e_n K_4 + e_n e_n K_5 - e_n L'_n = 0$$

bulunur.

(16), (17), (18), (19) ve (20) nolu denklemleri sırasile aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$\begin{aligned}
 [aa] K_1 + [ab] K_2 + [ac] K_3 + [ad] K_4 + [ae] K_5 - [aL'] &= 0 \\
 [ab] K_1 + [bb] K_2 + [bc] K_3 + [bd] K_4 + [be] K_5 - [bL'] &= 0 \\
 [ac] K_1 + [bc] K_2 + [cc] K_3 + [cd] K_4 + [ce] K_5 - [cL'] &= 0 \quad (21) \\
 [ad] K_1 + [bd] K_2 + [cd] K_3 + [dd] K_4 + [de] K_5 - [dL'] &= 0 \\
 [ae] K_1 + [be] K_2 + [ce] K_3 + [de] K_4 + [ee] K_5 - [eL'] &= 0
 \end{aligned}$$

Bu denklemlere (Normal denklemler) denilir.

#### NORMAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Normal denklemlerin çözümü denilince  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  değerlerinin hesaplanması anlaşılmaktadır. Aşağıda bu hesabın pratik şekilde nasıl yapıldığı açıklanmıştır (1, 5, 8).

(21) nolu denklem sisteminde birinci terimlerde  $K_1$ , ikinci terimlerde  $K_2, \dots$ , kat sayılarının bulunduğu görülmektedir. Bunlar kaldıracak olursa, eşitliklerin sağındaki sıfırlar da yazılmıyacak olursa (21) nolu denklem sistemi aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned}
 [aa] + [ab] + [ac] + [ad] + [ae] - [aL'] \\
 [ab] + [bb] + [bc] + [bd] + [be] - [bL] \\
 [ac] + [bc] + [cc] + [cd] + [ce] - [cL] \quad (22) \\
 [ad] + [bd] + [cd] + [dd] + [de] - [dL] \\
 [ae] + [be] + [ce] + [de] + [ee] - [eL]
 \end{aligned}$$

Buradaki 5 denklemin birinci terimlerinde  $K_1$ , ikinci terimlerin de  $K_2, \dots$  bulunduğunu ayrıca denklem sonuçlarının da sıfıra eşit olduğunu düşünürüz.

(22) no ile gösterilen sistemde, birinci satırın ilk 5 terimi ile, birinci sütundaki terimlerin birbirinin aynı olduğu görülmektedir. Aynı şekilde ikinci satırın ilk 5 terimi, ikinci sütundaki terimlerin aynısıdır. Üçüncü satırla, üçüncü sütun arasında, dördüncü satırla dördüncü sütun arasında ve nihayet beşinci satırla beşinci sütun arasında benzerlik olduğu görülmektedir.

Bu benzerlikten faydalanarak, yazmayı kısaltmak gayesile, (22) deki sistemi aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$\begin{aligned}
 & [aa] + [ab] + [ac] + [ad] + [ae] - [aL] \\
 & [bb] + [bc] + [bd] + [be] - [bL] \\
 & [cc] + [cd] + [ce] - [cL] \quad (23) \\
 & [dd] + [de] - [eL] \\
 & [ee] - [eL]
 \end{aligned}$$

Bu sistemde boş bırakılan yerlerin hangi terimlerle doldurulması gerektiğini kolaylıkla söylemek mümkündür.

(23) nolu sistemden yararlanarak çözüm aşağıdaki şekilde yapılır.

Birinci satır alınır aynen yazılır. Bu satırdaki terimler toplanır, bulunan sonuç, satır sonuna 7'nci terim olarak yazılır. 7 terimin herbiri birinci terime yani  $[aa]$  değerine bölünür ve işareti değiştirilir. Elde edilen sonuçlar ikinci satıra yazılır. Bulunan bu değerlerin ilk 6 tane-sinin toplamının, 7 nciye eşit olması gerekir. İlk terim  $(-1)$  dir, bunun yerine  $K_1$  yazılır. 2 nci satırın altına bir çizgi çizilir.

(23) nolu sistemdeki 2 nci satır alınır çizginin altına 3 üncü satır olarak ve ilk terimi 2 nci sütuna gelmek şartile yazılır. Bu satırdaki terimler toplanır, bulunan sonuca  $[ab]$  ilâve edilir. Elde edilen sonuç satır sonuna, yani bir ve 2 nci satırlardaki 7 nci terimin altına yazılır. 2 nci satırın 2 nci terimi, ( $K_1$  in hemen sağındaki terim) bir katsayı olarak alınır, birinci satırın 2 nci ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılır elde edilen sonuçlar 4 üncü satıra 2 nci sütundan başlamak suretile, sırasile yazılır.

3 ve 4 üncü satırda üst üste gelen değerler toplanarak 4 üncü satıra sırasile yazılır. 3, 4 ve 5 inci satırlarda 6 şar terim bulunmaktadır. 5 inci satırdaki ilk 5 terimin toplamının 6 ncı terime eşit olması gerekir eşit olmazsa hesaplarda bir hata vardır. Son sütun olan toplam sütunu bu kontrollere yaramaktadır.

5 inci satırdaki bütün terimler birinci terime bölünür, bulunan değerlerin işaretleri değiştirilir ve sırasile 6 ncı satıra yazılır. 6 ncı satırda da ilk 5 terimin toplamının son terime eşit olması gerekir. 3, 4, 5,

6 ncı satırların ilk terimleri 2 nci sütunda bulunmaktadır. 6 ncı satırdaki ilk terim olan  $(-1)$  in yerine  $K_2$  yazılır. 6 ncı satırın altına bir çizgi çizilir.

(23) nolu sistemdeki 3 üncü satır alınır. İlk terimi 3 üncü sütuna gelecek şekilde çizginin altına yazılır. Bu 7 nci satır olur. 7 nci satırın 4 terimi toplanır, bulunan sonuca  $[ac]$  ve  $[bc]$  terimleri de ilâve edilir, sonuç son sütuna yani toplam sütununa 5 inci terim olarak yazılır.

2 nci satırın 3 üncü terimi bir katsayı olarak alınır, birinci satırın 3 üncü ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılır. Elde edilen sonuçlar 8 inci satıra 3 üncü sütundan başlamak suretile sırasile yazılır.

6 ncı satırın 2 nci terimi,  $(K_2$  nin hemen sağındaki terim) bir katsayı olarak alınır, 5 inci satırın 2 nci ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılır, elde edilen sonuçlar 9 uncu satıra 3üncü sütundan başlamak suretile sırasile yazılır. 7, 8, 9 uncu satırlarda üst üste bulunan değerler toplanarak 10 uncu satıra sırasile yazılır. 10 uncu satırdaki ilk 4 terimin toplamının son terime eşit olması gerekir.

10 uncu satırın bütün terimleri birinci terime bölünür, bulunan sonuçların işaretleri değiştirilir ve 11 inci satıra sırasile yazılır. 3 üncü sütunda bulunan ilk terim  $(-1)$  in yerine  $K_3$  yazılır. 11 inci satırdaki ilk 4 terimin toplamının son terime eşit olması gerekir. 11 inci satırın altına bir çizgi çizilir.

(23) nolu sistemdeki 4 üncü satır alınır, ilk terimi 4 üncü sütuna gelecek şekilde 12 nci satıra, yani çizginin altına yazılır. 12 nci satırda bulunan 3 terim toplanır. Bu toplama  $[ad]$ ,  $[bd]$ ,  $[cd]$  terimleri de ilâve edilir, bulunan sonuç 12 nci satırın 4 üncü terimi olarak toplam sütununa yazılır.

2 nci satırın 4 üncü terimi bir katsayı olarak alınır, birinci satırın 4 üncü ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılır, bulunan sonuçlar 13 üncü satıra 4 üncü sütundan başlamak suretile yazılır.

6 ncı satırın 3 üncü terimi bir katsayı olarak alınır, 5 inci satırın 3 üncü ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılır, bulunan sonuçlar 14 üncü satıra 4 üncü sütundan başlamak suretile yazılır.

11 inci satırın 2 nci terimi  $K_3$  ün hemen sağındaki terim bir katsayı olarak alınır, 10'uncu satırın 2 nci ve daha sonraki terimleriyle ayrı ayrı çarpılır, bulunan sonuçlar 15 inci satıra 4 üncü sütundan başlamak suretile yazılır.

12, 13, 14 ve 15 inci satırlarda üst üste bulunan değerler toplanarak 16 ncı satıra sırasile yazılır. 16 ncı satırdaki ilk 3 terimin toplamı son terime eşit olmalıdır.

16 ncı satırdaki birinci ve daha sonraki terimler, birinci terime bölünür, bulunan değerlerin işaretleri değiştirilir ve 17 nci satıra sırasile yazılır. 4 üncü sütunda bulunan ilk terim ( $-1$ ) in yerine  $K_4$  yazılır. Bu satırda da ilk 3 terimin toplamının son terime eşit olması gerekir. 17 nci satırın altına bir çizgi çizilir.

(23) nolu sistemdeki 5 inci satır alınır, ilk terimi 5 inci sütuna gelecek şekilde 18 inci satıra yazılır. Buradaki 2 terim toplanır, toplama [ae], [be], [ce], [de] terimleri de ilâve edilir, bulunan sonuç toplam sütununa 3 üncü terim olarak yazılır.

2 nci satırın 5 inci terimi bir katsayı olarak alınır, birinci satırın 5 ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılır, bulunan sonuçlar 19'uncu satıra 5 inci sütundan başlamak suretile yazılır.

6 ncı satırın 4 üncü terimi bir katsayı olarak alınır, 5 inci satırın 4 üncü ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılır, bulunan sonuçlar 20 ncı satıra 5 inci sütundan başlamak suretile yazılır.

11 inci satırın 3 üncü terimi bir katsayı olarak alınır, 10 uncu satırın 3 üncü ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılır, bulunan sonuçlar 21 inci satıra 5 inci sütundan başlamak suretile yazılır.

17 inci satırın 2 inci terimi, ( $K_4$  ün hemen sağındaki terim) bir katsayı olarak alınır 16 ncı satırın 2 nci ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılır bulunan sonuçlar 22 ncı satıra 5 inci sütundan başlamak suretile yazılır.

18, 19, 20, 21 ve 22 nci satırlarda üst üste bulunan değerler toplanarak 23 üncü satıra sırasile yazılır. 23 üncü satırdaki ilk 2 terimin toplamı 3 üncüye eşit olmalıdır.

23 üncü satırdaki 1 - 2 ve 3 üncü terimler birinci terime bölünür, bulunan değerlerin işaretleri değiştirilir ve 24 üncü satıra sırasile yazılır. 5 inci sütunda bulunan ilk terim ( $-1$ ) in yerine  $K_5$  yazılır.

#### KAT SAYILARIN HESABI VE FONKSİYONUN BULUNMASI

24 üncü satırda  $K_5$  in hemen sağında bulunan rakam  $K_5$  in eşitidir.

17 nci satırda  $K_4$  ün hemen sağındaki rakam  $K_5$  ile çarpılır bulunan sonuca 17 nci satırın 2 nci terimi ilâve edilirse  $K_4$  bulunur.

11 inci satırda  $K_3$  ün hemen sağındaki rakam  $K_4$  ile çarpılır. 11 inci satırın 3 üncü terimi  $K_5$  ile çarpılır. Bulunan sonuçların toplamına 11 inci satırın 4 üncü terimi ilâve edilirse  $K_3$  bulunur.

6 ncı satırın 2 nci terimi  $K_3$  ile, 3 üncü terimi  $K_4$  ile, 4 üncü terimi  $K_5$  ile çarpılır. Bulunan sonuçların toplamına 6 ncı satırın 5 inci terimi ilâve edilirse  $K_2$ , 3 üncü terimi  $K_3$  ile 4 üncü terimi  $K_4$  ile 5 inci terimi  $K_5$  ile çarpılır. Bulunan sonuçların toplamına 2 nci satırın 6 ncı terimi ilâve edilirse  $K_1$  bulunur.

Bulunan  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  ve  $K_5$  değerleri (2) nolu formülde yerlerine konularak aranılan fonksiyon bulunur. Bu fonksiyon aynı karakterli ve aynı şartlarda bulunan her olaya uygulanabilen, ayrıca realiteye en yakın sonuçları veren bir fonksiyondur.

Aşağıdaki 2 problem, konunun daha açıklığa kavuşmasını sağlayacaktır.

*Problem : I.*

Bir işletmede 7 ayrı yerde yol inşa edilmiştir. Güzergahlardaki toprakların etüdünden, arazide 5 toprak tipinin bulunduğu tespit edilmiştir. Topraktaki ağaç kökleri masrafı etkileyen önemli bir faktör olduğundan, köklerin varlığı dikkate alınmıştır. Tespit edilen toprak tipleri şunlardır.

- a — İçerisinde ağaç kökleri bulunan killi toprak
- b — İçerisinde ağaç kökü bulunmayan kireçli toprak
- c — İçerisinde ağaç kökü bulunmayan killi toprak
- d — İçerisinde ağaç kökü bulunmayan kumlu toprak
- e — İçerisinde ağaç kökleri bulunan kumlu toprak.

Yolların her birinde bu toprak tiplerinden kaç  $m^3$  kazıldığı ve her yolda kazı için ne kadar masraf yapıldığı (1) nolu cetvelde görülmektedir.

Bilinen bu değerlerden faydalanmak suretile, aynı mıntakada yapılacak diğer yollarda, kazı masraflarının neler olacağını hesaplamaya yarayacak bir formül bulunabilir mi?

## CETVEL No : I.

İnşa edilen 7 yolun herbirinde, çeşitli toprak tiplerinden kaçır m<sup>3</sup> kazıldığını ve her yolda kazı için ne kadar masraf yapıldığını ve 28 nolu formül sonucunu gösterir cetvel

| İnşa edilen yolun masrafı | Toprak tipleri |     |     |     |     | Toplam kazı masrafı<br>T. L.<br>L' | 28 nolu formüle göre hesaplanan masraf<br>L | Fark<br>V = L - L' |
|---------------------------|----------------|-----|-----|-----|-----|------------------------------------|---|--------------------|
|                           | a              | b   | c   | d   | e   |                                    |   |                    |
| I                         | 50             | 40  | 60  | 120 | 80  | 2.890                              | 2900,0                                      | 10,0               |
| II                        | 30             | 80  | 80  | 75  | 100 | 3.036                              | 3041,5                                      | 5,5                |
| III                       | 75             | 110 | 50  | 68  | 40  | 2.824                              | 2831,4                                      | 7,4                |
| IV                        | 120            | 30  | 70  | 39  | 45  | 2.660                              | 2665,7                                      | 5,7                |
| V                         | 40             | 60  | 105 | 85  | 59  | 2.899                              | 2912,0                                      | 13,0               |
| VI                        | 70             | 20  | 120 | 30  | 72  | 2.735                              | 2743,0                                      | 8,0                |
| VII                       | 30             | 60  | 95  | 125 | 52  | 2.941                              | 2958,0                                      | 17,0               |

*Problemin Çözümü :* Birinci yolda a tipindeki topraktan 50 m<sup>3</sup> kazılmıştır, bunu a<sub>1</sub> ile gösterebiliriz. b tipindeki topraktan 40 m<sup>3</sup> kazılmıştır, bunu da b<sub>1</sub> ile gösterebiliriz. Aynı şekilde c, d ve e tipindeki topraktan birinci yolda kazılan miktarları sırasile c<sub>1</sub>, d<sub>1</sub>, e<sub>1</sub> şeklinde gösterebiliriz.

İkinci yolda kazılan toprak tiplerinin miktarlarını sırasile a<sub>2</sub>, b<sub>2</sub>, c<sub>2</sub>, d<sub>2</sub>, e<sub>2</sub> şeklinde gösterebiliriz. Aynı isimlendirme metodunu diğer yollara da uyguyabiliriz. Yedinci yolda kazılan toprak tiplerinin hacimleri sırasile a<sub>7</sub>, b<sub>7</sub>, c<sub>7</sub>, d<sub>7</sub>, e<sub>7</sub> olur.

Kazı masraflarını da sırasile L'<sub>1</sub>, L'<sub>2</sub>, L'<sub>3</sub>, L'<sub>4</sub>, L'<sub>5</sub>, L'<sub>6</sub>, L'<sub>7</sub> şeklinde gösterelim.

a tipindeki toprağın 1 m<sup>3</sup> ün kazı bedeli K<sub>1</sub>  
 b » » » » » K<sub>2</sub>  
 c » » » » » K<sub>3</sub>  
 d » » » » » K<sub>4</sub>  
 e » » » » » K<sub>5</sub>  
 olsun.

Kabul ettiğimiz bu isimlendirme metoduna göre, aynı muntakada yapılacak herhangi bir yolun kazı masrafı

$$L = K_1a + K_2b + K_3c + K_4d + K_5e \quad (24)$$

şeklinde hesaplanır.

Bu formül birinci yola uygulandığı zaman

$$L_1 = K_1a_1 + K_2b_1 + K_3c_1 + K_4d_1 + K_5e_1 \quad (25)$$

olur.

diğer yollara uygulanınca

$$L_2 = K_1a_2 + K_2b_2 + K_3c_2 + K_4d_2 + K_5e_2$$

.....

.....

.....

$$L_7 = K_1a_7 + K_2b_7 + K_3c_7 + K_4d_7 + K_5e_7$$

(26)

bulunur.

Bu formüllerin (4) noda gösterilen sistemin aynı olduğu görülmektedir. Sadece nümune sayısı 5 ten 7 ye çıkmıştır.

$K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  kat sayılarını bulabilmek için yukarda açıklanmış üzere normal denklemleri kurmak ve çözmek gerekmektedir.

Evvelâ (23) nolu sistemde görülen değerlerin hesaplanması lâzımdır. II nolu cetvelde hesaplanışı görülmektedir. Bir cetvele Korelat cetveli ismi verilir.

(25) ve (26) nolu denklemlerdeki L değerleri eşitliklerin sağ tarafına atılınca işaretleri (—) olur. Bu sebepten Korelat cetvelinde L ile çarpılan değerlerin sonuçları (—) olmuştur.

Korelat cetvelinden elde edilen sonuçlar normal denklemlerde yerlerine konulmuşlardır. III nolu cetvelde normal denklemler görülmektedir. Bu cetveli (23) nolu formülle karşılaştırınız.



Cetvel No: II

Korelat Cetveli

Normal Denklemlerdeki değerlerin hesaplanmasını gösteren cetvel

| Yol<br>No | aa           | ab           | ac           | ad           | ae           | aL'                |
|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------------|
| I         | 2500         | 2000         | 3000         | 6000         | 4000         | — 144.500          |
| II        | 900          | 2400         | 2400         | 2250         | 3000         | — 91.080           |
| III       | 5625         | 8250         | 3750         | 5100         | 3000         | — 211.800          |
| IV        | 14400        | 3600         | 8400         | 4680         | 5400         | — 319.200          |
| V         | 1600         | 2400         | 4200         | 3400         | 2360         | — 115.960          |
| VI        | 4900         | 1400         | 8400         | 2100         | 5040         | — 191.450          |
| VII       | 900          | 1800         | 2850         | 3750         | 1560         | — 88.230           |
|           | [aa] = 30825 | [ab] = 21850 | [ac] = 33000 | [ad] = 27280 | [ae] = 24360 | [aL'] = — 1162.220 |

  

|     | bb           | bc           | bd           | be           | bL'                |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------------|
| I   | 1600         | 2400         | 4800         | 3200         | — 115.600          |
| II  | 6400         | 6400         | 6000         | 8000         | — 242.880          |
| III | 12100        | 5500         | 7480         | 4400         | — 310.640          |
| IV  | 900          | 2100         | 1170         | 1350         | — 79.800           |
| V   | 3600         | 6300         | 5100         | 3540         | — 173.940          |
| VI  | 400          | 2400         | 600          | 1440         | — 54.700           |
| VII | 3600         | 5700         | 7500         | 3120         | — 176.460          |
|     | [bb] = 28600 | [bc] = 30800 | [bd] = 32650 | [be] = 25050 | [bL'] = — 1154.020 |

  

|  | cc | cd | ce | cL' |
|--|----|----|----|-----|
|--|----|----|----|-----|

|     |                   |                   |                   |                    |
|-----|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| I   | 3600              | 7200              | 4800              | - 173.400          |
| II  | 6400              | 6000              | 8000              | - 242.880          |
| III | 2500              | 3400              | 2000              | - 141.200          |
| IV  | 4900              | 2730              | 3150              | - 186.200          |
| V   | 11025             | 8925              | 6195              | - 304.395          |
| VI  | 14400             | 3600              | 8640              | - 328.200          |
| VII | 9025              | 11825             | 4940              | - 279.395          |
|     | <u>          </u> | <u>          </u> | <u>          </u> | <u>          </u>  |
|     | [cc] = 51850      | [cd] = 43680      | [ce] = 37725      | [cL'] = - 1655.670 |

|     | <u>dd</u>         | <u>de</u>         | <u>dL'</u>         |
|-----|-------------------|-------------------|--------------------|
| I   | 14400             | 9600              | - 346.800          |
| II  | 5625              | 7500              | - 227.700          |
| III | 4624              | 2720              | - 192.032          |
| IV  | 1521              | 1755              | - 103.740          |
| V   | 7225              | 5015              | - 246.415          |
| VI  | 900               | 2160              | - 82.050           |
| VII | 15625             | 6500              | - 367.625          |
|     | <u>          </u> | <u>          </u> | <u>          </u>  |
|     | [dd] = 49920      | [de] = 35250      | [dL'] = - 1566.362 |

|     | <u>ee</u>         | <u>eL'</u>         |
|-----|-------------------|--------------------|
| I   | 6400              | - 231.200          |
| II  | 10000             | - 303.600          |
| III | 1600              | - 112.960          |
| IV  | 2025              | - 119.700          |
| V   | 3481              | - 171.041          |
| VI  | 5184              | - 196.920          |
| VII | 2704              | - 152.932          |
|     | <u>          </u> | <u>          </u>  |
|     | [ee] = 31394      | [eL'] = - 1288.353 |

| <i>Cetvel No: III</i>                                     |          |          |          |          |            |            |
|---|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| <i>Normal denklemler</i>                                  |          |          |          |          |            |            |
| Korelat cetvelinde bulunan sonuçlara göre düzenlenmiştir. |          |          |          |          |            |            |
| <i>a</i>  | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> | <i>L</i>   | $\Sigma$   |
| 3085  | 21850    | 33000    | 27280    | 24360    | —1.162.200 | —1.024.905 |
|   | 28600    | 30800    | 32650    | 25050    | —1.154.020 | —1.015.070 |
|   |          | 51850    | 43680    | 37725    | —1.655.670 | —1.458.615 |
|   |          |          | 49020    | 35250    | —1.566.362 | —1.377.582 |
|   |          |          |          | 31394    | —1.288.353 | —1.134.574 |

III nolu cetveldeki son sütun normal denklemlerin çözümü bahsinde açıklandığı şekilde hesaplanmıştır. Birinci satırdaki değerler toplanmış en sona yazılmıştır. İkinci satırdaki değerlerin toplamına 21850 ilâve edildikten sonra —1 015 070 bulunmuştur. Üçüncü satırdaki değerlerin toplamına 33.000 + 30.8000 eklenerek — 1.458.615 bulunmuştur. Beşinci sütundaki değerlerin toplamı —1.288.353 ten çıkartılarak —1.134.574 elde edilmiştir.

IV nolu cetvelde normal denklemlerin çözümü görülmektedir.

III nolu cetveldeki birinci satır aynen yazılmıştır. Bu satırdaki bütün değerler ilk rakam olan 30 825 e bölünmüş bulunan sonuçların işaretleri değiştirilerek 2 nci satıra yazılmıştı. 30,825 rakamının altına (—1) yerine  $K_1$  yazılmıştır. 2 nci satırın altı çizilmiştir.

III nolu cetveldeki ikinci satır alınmış ve 2 nci sütundan başlamak suretile 3 üncü satıra yazılmıştır. 2 nci satırın 2 nci terimi olan — 0,7088 birinci satırın 2 ve daha sonraki terimlerle çarpılmış, bulunan sonuçlar 4 üncü satıra yazılmıştır. —0,7088 rakamı son sütundaki — 1,024,903 ile de çarpılmış ve bulunan 726,453 yine son sütuna 3 üncü satır hizasına yazılmıştır.

3 ve 4 üncü satırlarda bulunan rakamlar toplanarak 5 inci satıra yazılmıştır. 5 inci satırdaki ilk 5 rakamın toplamının — 288,617, yani toplam sütunundaki rakam çıkması hesapların buraya kadar doğru yapıldığını gösterir.

5 inci satırdaki bütün değerler, bu satırın ilk rakamı olan 13,113 e bölünmüş bulunan değerlerin işaretleri değiştirilerek 6 nci satıra ya-

## Cetvel No.: IV

## Normal Denklemlerin Çözümü

III nolu cetvelde görülen değerlere göre çözüm yapılmıştır.

| Satır No | a              | b              | c              | d              | e              | L           | 7           |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------|-------------|
|          | 1              | 2              | 3              | 4              | 5              | 6           |             |
| 1        | + 30,825       | 121,850        | + 33,000       | + 27,280       | + 24,360       | - 1,162,220 | - 1,024,905 |
| 2        | K <sub>1</sub> | - 0,7088       | - 1,0706       | - 0,8850       | - 0,7903       | + 37,7038   | + 33,2491   |
| 3        |                | + 28,600       | + 30,800       | + 32,650       | + 25,050       | - 1,154,020 | - 1,015,070 |
| 4        |                | - 15,487       | - 23,390       | - 19,336       | - 17,266       | + 823,781   | + 726,453   |
| 5        |                | + 13,113       | + 7,410        | + 13,314       | + 7,784        | - 330,239   | - 288,617   |
| 6        |                | K <sub>2</sub> | - 0,5651       | - 1,0153       | - 0,5937       | + 25,1841   | + 22,0100   |
| 7        |                |                | + 51,850       | + 43,680       | + 37,725       | - 1,655,670 | - 1,458,615 |
| 8        |                |                | - 35,330       | - 29,206       | - 26,080       | - 1,244,273 | + 1,097,263 |
| 9        |                |                | - 4,187        | - 7,524        | - 4,399        | + 186,618   | + 163,097   |
| 10       |                |                | + 12,333       | + 6,950        | + 7,246        | - 224,779   | - 198,255   |
| 11       |                |                | K <sub>3</sub> | - 0,5635       | - 0,5875       | + 18,2258   | + 16,0752   |
| 12       |                |                |                | + 49,920       | + 35,250       | - 1,566,362 | - 1,377,582 |
| 13       |                |                |                | - 24,143       | - 21,559       | + 1,028,565 | + 907,041   |
| 14       |                |                |                | - 13,518       | - 7,903        | + 335,292   | + 293,033   |
| 15       |                |                |                | - 3,916        | - 4,083        | + 126,663   | + 111,717   |
| 16       |                |                |                | + 8,343        | + 1,705        | - 75,842    | - 65,791    |
| 17       |                |                |                | K <sub>4</sub> | - 0,2044       | + 9,0905    | + 7,8858    |
| 18       |                |                |                |                | + 31,394       | - 1,288,353 | - 1,134,574 |
| 19       |                |                |                |                | - 19,252       | + 918,502   | + 809,982   |
| 20       |                |                |                |                | - 4,621        | + 196,063   | + 171,352   |
| 21       |                |                |                |                | - 4,257        | + 132,058   | + 116,475   |
| 22       |                |                |                |                | - 349          | + 15,502    | + 13,448    |
| 23       |                |                |                |                | + 2,915        | - 26,228    | - 23,317    |
| 24       |                |                |                |                | K <sub>5</sub> | + 8,9976    | + 7,9990    |

zılmıştır. 2 nci sütuna ( $-1$ ) yerine  $K_2$  yazılmıştır. 6 ncı satırın altı çizilmiştir.

III nolu cetveldeki 3 üncü satır aynen alınmış IV nolu cetvelin 7 nci satırına 3 üncü sütundan başlamak suretile yazılmıştır. 2 nci satırın 3 üncü terimi olan  $-1,0706$ , birinci satırın 3 üncü ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılmış bulunan sonuçlar 8 inci satıra yazılmıştır.

6 ncı satırın 2 nci terimi olan  $-0,5651$ , 5 inci satırın 2 inci ve daha sonraki terimlerle çarpılmış bulunan sonuçlar 9 uncu satıra yazılmıştır.

7, 8, 9 uncu satırlarda üst üste bulunan rakamlar toplanarak 10 uncu satıra yazılmıştır. 10 uncu satırdaki ilk 4 rakamın toplamının son sütundaki değere eşit çıkması hesapların doğru yapıldığını gösterir.

10 uncu satırdaki bütün rakamlar, ilk rakam olan  $12,333$  e bölünmüş bulunan sonuçların işaretleri değiştirilerek 11 inci sütuna yazılmıştır.  $12,333$ 'ün altına ( $-1$ ) yerine  $K_3$  yazılmıştır. 11 inci sütunun altı çizilmiştir.

III nolu cetveldeki 4 üncü satır aynen alınmış IV nolu cetvelin 12 nci satırına, 4 üncü sütundan başlamak suretile yazılmıştır. 2 nci satırın 4 üncü terimi olan  $-0,8850$  birinci satırın 4 üncü ve daha sonraki terimlerle ayrı ayrı çarpılmış bulunan sonuçlar 13 üncü satıra yazılmıştır.

6 ncı satırın 3 üncü terimi olan  $-1,0153$ , 5 inci satırın 3 üncü ve daha sonraki terimlerle çarpılmış bulunan sonuçlar 14 üncü satıra yazılmıştır.

11 inci satırın 2 nci terimi olan  $-0,5635$  10 uncu satırın 2 nci ve daha sonraki terimlerle çarpılmış bulunan sonuçlar 15 inci satıra yazılmıştır.

12, 13, 14, 15 inci satırlarda üst üste bulunan rakamlar toplanarak 16 ncı satıra yazılmıştır. 16 ncı satırda ilk 3 terimin toplamının, son sütundaki  $-65791$  e eşit çıkması hesapların doğruluğunu gösterir. Küçük farklar yuvarlamalardan ileri gelmektedir.

16 ncı satırın bütün rakamları, ilk rakam olan  $8343$  e bölünmüş elde edilen sonuçların işaretleri değiştirilerek 17 nci satıra yazılmıştır.  $8343$ 'ün altına ( $-1$ ) yerine  $K_4$  yazılmıştır. 17 nci satırın altı çizilmiştir.

III nolu cetvelin son satırı, IV nolu cetvelin 18 inci satırına 5 inci sütundan başlamak suretile yazılmıştır. 2 nci satırın 5 inci terimi olan

—0,7903, birinci satırın 5 ve daha sonraki terimlerle çarpılarak 19 uncu satıra yazılmıştır.

6 nci satırın 4 üncü terimi olan —0,5937, 5 inci satırın 4 ve daha sonraki terimlerle çarpılmış bulunan sonuçlar 20 nci satıra yazılmıştır.

11 inci satırın 3 üncü terimi olan —0,5875, 10 uncu satırın 3 ve daha sonraki terimlerle çarpılmış bulunan sonuçlar 21 inci satıra yazılmıştır.

17 nci satırın 2 nci terimi olan —0,2044, 16 nci satırın 2 ve daha sonraki terimlerle çarpılmış bulunan sonuçlar 22 nci satıra yazılmıştır.

18, 19, 20, 21 ve 22 nci satırlarda üst üste bulunan rakamlar toplanarak 3 üncü satıra yazılmıştır. 23 üncü satırda ilk 2 terimin toplamının 3 üncü terime eşit çıkması hesapların doğruluğunu gösterir. Küçük fark yuvarlamalardan ileri gelmektedir.

23 üncü satırdaki değerler ilk terim olan 2915'e bölünmüş, bulunan sonuçların işaretleri değiştirilerek 24 üncü sütuna yazılmıştır. 2915 in altına (—1) yerine  $K_5$  yazılmıştır.

Böylelikle IV nolu cetvel tamamlanmıştır.

IV nolu cetvelde elde edilen sonuçlara dayanılarak  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  katsayıları hesaplanır. Bu katsayıların hesaplanması V nolu cetvelde görülmektedir. V nolu cetvel IV nolu cetvelle karşılaştırılırsa hesabın nasıl yapıldığı kolaylıkla anlaşılır.

Cetvel No : V.

$K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  katsayılarının hesaplanması  
IV nolu cetvelde bulunan değerlere göre hesaplanmıştır.

$$K_5 = + 8,9976$$

$$K_4 = - 0,2044 K_5 + 9,0905 + - 1,8391 + 9,0905$$

$$K_4 = + 7,2514$$

$$K_3 = - 0,5635 K_4 - 0,5875 K_5 + 18,2258$$

$$K_3 = - 4,0862 - 5,2861 + 18,2258$$

$$K_3 = + 8,8535$$

$$K_2 = - 0,5651 K_3 - 1,0153 K_4 - 0,5937 K_5 + 25,1841$$

$$K_2 = - 5,0031 - 7,3623 - 5,3419 + 25,1841$$

$$K_2 = + 7,4768$$

$$K_1 = - 0,7088 K_2 - 1,0706 K_3 - 0,8850 K_4 - 0,7903 K_5 + 37,7038$$

$$K_1 = - 5,2996 - 9,4786 - 6,4175 - 7,1108 + 37,7038$$

$$K_1 = + 9,3973$$

Katsayılar hesaplandığına göre (24) nolu formül (aradığımız fonksiyon) yazılabilir.

$$L = 9,3974 a + 7,4768 b + 8,8535 c + 7,2514 d + 8,9976 e \quad (27)$$

bulunur.

Bu fonksiyon bize kesin değerler vermiyecek yaklaşık değerler verecektir. Hesabı kolaylaştırmak gayesile, bulunan katsayılar yuvarlak rakamlar haline getirilebilir. Böylelikle (27) nolu formül

$$L = 9,4 a + 7,5 b + 8,9 c + 7,3 d + 9,0 e \quad (28)$$

şekline girer.

I nolu cetvelde verilmiş olan a, b, c, d, e değişgenlerine ait değerler bu formülde yerlerine konularak, 7 yolun her birine ait kazı masrafı hesaplanmış ve I nolu cetvelin 8 inci sütununa yazılmıştır. Aynı cetvelin son sütununa, bu formülün verdiği sonuç ile realitede yapılan masrafın farkı yazılmıştır. Bu farklar bulduğumuz formülün sıhhat derecesini ortaya koymaktadır.

28 nolu formülden yararlanarak aynı mntıkada yapılacak diğer yolların kazı masrafını hesaplamak mümkündür. Her toprak tipinden kaç m<sup>3</sup> kazı yapılacağını projeden almak ve 28 nolu formülde yerine koymak gerekir.

Formüldeki katsayılara bir m<sup>3</sup> toprağın kazılması için yapılması gereken masraf gözü ile bakılabilir. Meselâ birinci terimin katsayısı olan 9,4 rakamı a tipindeki bir m<sup>3</sup> toprağın kazı masrafını göstermektedir.

Burada şu soru hatıra gelebilir.

e tipindeki bir veya birkaç m<sup>3</sup> toprağı, kontrolümüz altında kazdırsak ve hesabını tutsak aynı rakamı bulurduk, bu kadar çok hesap yapmaya ne lüzum var? Aynı işlemi diğer toprak tipleri için de yapabiliriz? Böylece kolaylıkla aynı katsayıları bulabiliriz.

Bu sorulara verilecek cevap şudur :

I nolu cetvel incelenirse, meselâ a tipindeki topraktan toplam 415 m<sup>3</sup> kazıldığı görülür. 415 m<sup>3</sup> kazı için ortalama 9,4 lira bulunmuştur. Şayet bir m<sup>3</sup> kazı yaptırılsaydı, masraf bu rakamdan çok farklı olurdu. Ne kadar çok kazı yaptırılarak ortalama alınırsa, bulunacak değer 9,4 e o kadar yaklaşıp.

Bir m<sup>3</sup> özel şekilde kazıldığı takdirde, çalışan işçi de özel itina gösterir. Bu takdirde bulunan değer 9,4 ten çok farklı olur.

5 toprak tipinin her biri için ayrı ayrı deneme yapmak ve her toprak tipinden de mümkün olduğu kadar fazla kazdırmak yoluna gidildiği takdirde iş çok zorlaşır. Bu kadar zorluğa katlanmaktansa yukarıda açıklanan hesapları yapmak daha kolay olmakta ve realiteye daha uygun sonuç vermektedir.

Bu misâlde toprak tiplerinin maliyete yani sonuca etkileri özel itina gösterildiği takdirde birbirinden ayırt edilebilmektedir. Genellikle tabiat olayları birbirine çok girifttir. Değişgenlerin her birinin sonuç üzerindeki etkisini, diğerlerini bertaraf ederek incelemeye imkân yoktur. Bu durumda yukarıdaki hesapları yapmaktan başka çıkar yol yoktur.

### Problem II

Mısır ekili arazilerde toprak erozyonunu incelemek gayesile 8 tane deneme alanı alınmış ve gerekli ölçmeler yapılmıştır. Bu arazilerde erozyonu etkileyen 5 faktör bulunduğu görülmüştür.

Bu faktörler şunlardır :

a — *Yağış* : Deneme alanlarına düşen yağmur miktarı plüvyometrelerle ölçülmüş ve mm cinsinden kaydedilmiştir. Ölçmeler her yağışdan sonra yapılmıştır.

b — *Eğim* : Deneme alanlarının eğimleri birbirlerinden farklı bulunmaktadır. Bu eğimler klizimetre ile ölçülmüş ve % cinsinden kaydedilmiştir.

c — *Bakı* : Deneme alanları çeşitli yönlere bakmaktadır. Deneme alanlarının baktıkları yönün güney istikamete yaptığı açı grad cinsinden ölçülmüştür. Bu açının doğu veya batı yönünde olmasile ilgilenilmemiş 200 graddan küçük olanı alınmıştır.

d — *Yağışın şiddeti* : Yağışların kaçar dakika sürdüğü ölçülmüş, yağış miktarı süreye bölünerek bir dakikada kaç m<sup>3</sup> yağış düştüğü bulunmuştur.

e — *Son yağmurun kaç gün önce yağdığı* : Son yağmur uzun bir süre önce yağmışsa toprak çok kurumuştur, toz haline gelmiştir. Yeni yağmurda kolaylıkla sürüklenir. Son yağmur kısa bir süre önce yağmışsa, yeni yağmurdan az etkilenir.

8 deneme alanının herbirinde ölçülen bu 5 faktöre ait değerler ve erozyonla taşınan toprak miktarı VI nolu cetvelde görülmektedir.



Cetvel No : VI.

Mısır ekili arazilerde alınan 8 deneme alanının herbirinde ölçülen faktörleri ve erozyonla taşınan toprak miktarını ve 29 nolu formül sonucunu gösterir cetvel

| Deneme alanı No. | Erozyonu etkileyen faktörler |    |     |     |    | Taşınan toprak Kg L' | 29 nolu formül sonucu Kg L | Fark $V=L-L'$ |
|------------------|------------------------------|----|-----|-----|----|----------------------|----------------------------|---------------|
|                  | a                            | b  | c   | d   | e  |                      |                            |               |
| I                | 30                           | 25 | 100 | 10  | 7  | 145                  | 143,4                      | -1,6          |
| II               | 12                           | 42 | 150 | 2   | 13 | 91                   | 90,4                       | -0,6          |
| III              | 26                           | 14 | 120 | 6,5 | 21 | 128                  | 128,2                      | +0,2          |
| IV               | 18                           | 27 | 85  | 11  | 26 | 129                  | 128,8                      | -0,2          |
| V                | 25                           | 38 | 24  | 7   | 5  | 112                  | 113,1                      | -1,1          |
| VI               | 36                           | 46 | 95  | 4,5 | 8  | 149                  | 148,7                      | -0,3          |
| VII              | 21                           | 25 | 182 | 8,3 | 3  | 125                  | 125,4                      | +0,4          |
| VIII             | 17                           | 32 | 72  | 7,4 | 6  | 101                  | 100,1                      | +0,1          |

Aynı mıntakada, bütün mısır ekili arazilerde uygulanabilecek bir formül bulunabilir mi?

*Problemin çözümü* : Birinci deneme alanında ölçülen faktörleri sırasile  $a_1, b_1, c_1, d_1$  ve  $e_1$  şeklinde gösterelim.

İkinci deneme alanında ölçülenler  $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2$  olsun

Aynı isimlendirme metodu diğerlerine de uygulanırsa, 8 inci deneme alanında ölçülen faktörler  $a_8, b_8, c_8, d_8, e_8$  olur.

Erozyonla taşınan ve deneme alanlarında ölçülerek bulunan toprak miktarlarını da sırasile  $L'_1, L'_2, L'_3, L'_4, L'_5, L'_6, L'_7, L'_8$  şeklinde gösterelim.

a faktörünün bir birim değişmesinin erozyona etkisi  $K_1$

b » » » » » »  $K_2$

c » » » » » »  $K_3$

d » » » » » »  $K_4$

e » » » » » »  $K_5$

olsun.

Kabul ettiğimiz bu işaretlere göre, aynı şartlardaki bir deneme alanında herhangi bir yağıştan sonra taşınacak toprak miktarı (2) nolu formül ile

Cetvel No : VIII.

Normal Denklemler

VIII No. daki cetvelin sonuçlarına göre düzenlenmiştir.

| a    | b    | c      | d      | e     | L'       |         |
|------|------|--------|--------|-------|----------|---------|
| 4695 | 5779 | 18516  | 1328,1 | 1958  | — 23598  | 8678,1  |
|      | 8523 | 24911  | 1639,3 | 2542  | — 30189  | 13205,3 |
|      |      | 102034 | 5653,9 | 9238  | — 101340 | 59012,9 |
|      |      |        | 460,1  | 658,8 | — 7122,4 | 2617,8  |
|      |      |        |        | 1469  | — 10973  | 4892,8  |

hesaplanabilir, 8 nolu formül 8 deneme alanına uygulanarak 8 deklemler yazılabilir.

$K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  katsayılarını bulabilmek için normal denklemler kurmak ve çözmek gerekmektedir.

Evvelâ (23) nolu sistemde görülen değerleri hesaplamak gayesile VII nolu Korelat cetveli düzenlenmiştir.

Korelat cetvelinden elde edilen sonuçlar, normal denklemlerde yerlerine konulmuştur. VIII nolu cetvelde normal denklemler görülmektedir. Bu cetvelin son sütunu normal denklemlerin çözümü bahsinde açıklandığı şekilde hesaplanmıştır.

IX nolu cetvelde normal denklemlerin çözümü görülmektedir. Bu çözümün nasıl yapıldığı evvelce açıklanmıştır.

IX nolu cetvelde bulunan sonuçlara dayanılarak  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  katsayıları hesaplanmıştır. X nolu cetvelde katsayıların hesaplanması görülmektedir.

Bulunan katsayılarla dayanılarak aranan denklem

$$L + 2,48 a + 0,49 b + 0,16 c + 3,6 d + 0,68 e \quad (29)$$

şeklinde bulunmuştur.

Bu formül herhangi bir deneme alanında a, b, c, d, e faktörlerine dayanılarak taşınacak toprak miktarının hesaplanmasını sağlamaktadır. VI nolu cetvelin 8 inci sütunundaki değerler bu formül yardımı ile hesaplanmıştır. VI nolu cetvelin son sütunundaki değerler, bu formülle

*Korelat Cetveli*  
*Cetvel No: VII.*

Normal Denklemlerdeki değerlerin hesaplanmasını gösteren cetvel

| <i>Deneme Alanı</i><br><i>No</i> | <i>aa</i>   | <i>ab</i>   | <i>ac</i>    | <i>ad</i>     | <i>ae</i>   | <i>aL'</i>    |
|----------------------------------|-------------|-------------|--------------|---------------|-------------|---------------|
| I                                | 900         | 750         | 3000         | 300           | 210         | — 4350        |
| II                               | 144         | 504         | 1800         | 24            | 156         | — 1092        |
| III                              | 676         | 364         | 3120         | 169           | 546         | — 3328        |
| IV                               | 324         | 486         | 1530         | 198           | 468         | — 2322        |
| V                                | 625         | 950         | 600          | 175           | 125         | — 2800        |
| VI                               | 1296        | 1656        | 3420         | 162           | 288         | — 5364        |
| VII                              | 441         | 525         | 3822         | 174,3         | 63          | — 2625        |
| VIII                             | 289         | 544         | 1224         | 125,8         | 102         | — 1717        |
|                                  | [aa] = 4695 | [ab] = 5779 | [ac] = 18516 | [ad] = 1328,1 | [ae] = 1958 | [aL'] = 23598 |
|                                  |             | <i>bb</i>   | <i>bc</i>    | <i>bd</i>     | <i>be</i>   | <i>bL'</i>    |
| I                                |             | 625         | 2500         | 250           | 175         | — 3625        |
| II                               |             | 1764        | 6300         | 84            | 546         | — 3822        |
| III                              |             | 196         | 1680         | 91            | 294         | — 1792        |
| IV                               |             | 729         | 2295         | 297           | 702         | — 3483        |
| V                                |             | 1444        | 912          | 266           | 190         | — 4256        |
| VI                               |             | 2116        | 4370         | 207           | 368         | — 6854        |
| VII                              |             | 625         | 2304         | 207,5         | 75          | — 3125        |
| VIII                             |             | 1024        | 2304         | 236,8         | 192         | — 3232        |
|                                  |             | [bb] = 8523 | [bc] = 24911 | [bd] = 1639,3 | [be] = 2542 | [bL'] = 30189 |
|                                  |             |             | <i>cc</i>    | <i>cd</i>     | <i>ce</i>   | <i>cL'</i>    |
| I                                |             |             | 10000        | 1000          | 700         | — 14500       |

|      |       |        |      |         |
|------|-------|--------|------|---------|
| II   | 22500 | 300    | 1950 | — 13650 |
| III  | 14400 | 780    | 2520 | — 15360 |
| IV   | 7225  | 935    | 2210 | — 10965 |
| V    | 576   | 168    | 120  | — 2688  |
| VI   | 9025  | 427,5  | 760  | — 14155 |
| VII  | 33124 | 1510,6 | 546  | — 22750 |
| VIII | 5184  | 532,8  | 432  | — 7272  |

[cc] = 102034      [cd] = 5653,9      [ce] = 9238      [cL'] = 101340

|      | <u>dd</u>     | <u>de</u>    | <u>dL'</u>       |
|------|---------------|--------------|------------------|
| I    | 100           | 70           | — 145            |
| II   | 4             | 26           | — 182            |
| III  | 42,25         | 136,5        | — 832            |
| IV   | 121           | 286          | — 1419           |
| V    | 49            | 35           | — 784            |
| VI   | 20,25         | 35           | — 670,5          |
| VII  | 68,89         | 24,9         | — 1037,5         |
| VIII | 54,76         | 44,4         | — 747,4          |
|      | [dd] = 460,15 | [de] = 658,8 | [dL'] = — 7122,4 |

|      | <u>ee</u>   | <u>eL'</u>      |
|------|-------------|-----------------|
| I    | 49          | — 1015          |
| II   | 169         | — 1183          |
| III  | 441         | — 2688          |
| IV   | 676         | — 3354          |
| V    | 25          | — 560           |
| VI   | 64          | — 1192          |
| VII  | 9           | — 375           |
| VIII | 36          | — 606           |
|      | [ee] = 1469 | [eL'] = — 10973 |

BES DEĞİŞENLİ FONKSİYON

Cetvel No : IX.

## Normal Denklemlerin Çözümü

VIII nolu cetvelde görülen değerlere göre çözüm yapılmıştır.

| Satır No. | a              | b              | c              | d              | e              | L         | Σ         |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------|-----------|
|           | 1              | 2              | 3              | 4              | 5              | 6         | 7         |
| 1         | + 4695         | + 5779         | + 18516        | + 1328,1       | + 1958         | — 23598   | + 8678,1  |
| 2         | K <sub>1</sub> | — 1,2309       | — 3,9438       | — 0,2829       | — 0,4170       | + 5,0262  | — 1,8484  |
| 3         |                | + 8523         | + 24911        | + 1639,3       | + 2542         | — 30189   | + 13205,3 |
| 4         |                | — 7113,4       | — 22791,3      | — 1634,8       | — 2410,1       | + 29046,8 | — 10681,9 |
| 5         |                | + 1409,6       | + 2119,7       | + 4,5          | + 131,9        | — 1142,2  | + 2523,4  |
| 6         |                | K <sub>2</sub> | — 1,5038       | — 0,0032       | — 0,0934       | + 0,8103  | — 1,7902  |
| 7         |                |                | + 102034       | + 5653,9       | + 9238         | — 101340  | + 59012,9 |
| 8         |                |                | — 73023,4      | — 5237,8       | — 7722         | + 93065,8 | — 34224,7 |
| 9         |                |                | — 3187,6       | — 6,8          | — 198,4        | + 1717,6  | — 3794,7  |
| 10        |                |                | + 25823,0      | + 409,3        | + 1317,6       | — 6556,6  | + 20993,5 |
| 11        |                |                | K <sub>3</sub> | — 0,0159       | — 0,0511       | + 0,2539  | — 0,8130  |
| 12        |                |                |                | + 460,1        | + 658,8        | — 7122,4  | + 2617,8  |
| 13        |                |                |                | — 375,7        | — 553,9        | + 6675,9  | — 2455,0  |
| 14        |                |                |                | — 0,0          | — 0,4          | + 3,7     | — 8,1     |
| 15        |                |                |                | — 6,5          | — 20,9         | + 104,2   | — 333,8   |
| 16        |                |                |                | + 77,9         | + 83,6         | — 338,6   | + 179,1   |
| 17        |                |                |                | K <sub>4</sub> | — 1,0732       | + 4,3466  | + 2,2978  |
| 18        |                |                |                |                | + 1469         | — 10973   | + 4892,8  |
| 19        |                |                |                |                | — 816,5        | + 9840,4  | — 3618,8  |
| 20        |                |                |                |                | — 12,3         | + 106,7   | — 235,7   |
| 21        |                |                |                |                | — 67,3         | + 335,4   | — 1072,8  |
| 22        |                |                |                |                | — 89,7         | + 363,4   | + 192,2   |
| 23        |                |                |                |                | + 483,2        | — 327,1   | + 157,7   |
| 24        |                |                |                |                | K <sub>5</sub> | + 0,6769  | — 0,3264  |

bulunan taşınan toprak miktarının, realitede taşınan toprak miktarından farkları görülmektedir. Bu farkların küçüklüğü bulunan formülün sıhhat derecesini gösterir.

Bulunan bu formül deneme alanlarının dışında, fakat deneme alanlarına yakın çevrelerdeki arazilerde de uygulanabilir. Diğer bir söyleyişle, ölçülen a, b, c, d, e faktörlerinin dışındaki faktörleri aynı olan yerlerde uygulanabilir.

Cetvel No : X.

$K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  katsayılarının hesaplanması  
IX no.lu cetvelde bulunan değerlere göre hesaplanmıştır.

$$\underline{K_5 = + 0,6769}$$

$$K_4 = - 1,0732 K_5 + 4,3466 = - 0,7264 + 4,3466$$

$$\underline{K_4 = + 3,6202}$$

$$K_3 = - 0,0159 K_4 - 0,0511 K_5 + 0,2539$$

$$K_3 = - 0,0576 - 0,0346 + 0,2539$$

$$\underline{K_3 = + 0,1617}$$

$$K_2 = - 1,5038 K_3 - 0,0032 K_4 - 0,0934 K_5 + 0,8103$$

$$K_2 = - 0,2432 - 0,0116 - 0,0632 + 0,8103$$

$$\underline{K_2 = + 0,4923}$$

$$K_1 = - 1,2309 K_2 - 3,9438 K_3 - 0,4170 K_5 + 5,0262$$

$$K_1 = - 0,6060 - 0,6377 - 1,0242 - 0,2623 + 5,0262$$

$$\underline{K_1 = + 2,4760}$$

$$L = 2,48 a + 0,49 b + 0,16 c + 3,6 d + 0,68 e$$

#### B İ B L İ Y O G R A F İ

1. DÜZGÜNEŞ, O. : İstatistik Metodlar. Ankara, 1952.
2. ERASLAN, İ. : Bolu'nun Aladağsuyu ormanlarında istatistik metodlarla artım araştırmaları ve neticelerin amejman işlerimizde kullanılması. (Zuwachsuntersuchungen mittels mathematisch-statistischer Methoden in den Wäldern von Bolu und die Anwendung der Ergebnisse in der Forsteinrichtung). İstanbul, 1957.

3. ERKİN, K. : Tersinir düzençli modern nivolar ve hataların dengelenmesi.  
(Les niveaux reversibles modernes et compensation des erreurs). İstanbul, 1957.
4. EZEKIEL, M. : Methods of correlationsanalysis. New York u. London, 1930.
5. KALIPSIZ, A. : Biyometri. (Prodan, M. dan çeviri).
6. KENDALL, M. G. : The advanced Theory of Statistics. London, 1947.
7. KRENN - PRODAN : Dikili deneme ağaçları yardımıle meşcere hacminin tayıni (Çeviren : M. Miraboğlu). İstanbul, 1958.
8. PRODAN, M. : Forstliche Biometrie  
BLV Verlagsgesellschaft. München, 1961.
9. SOYDAN, Z. : Harita ve Plânlarda Muvazene Hesapları. Ankara, 1951.