SERİ SERIE B | CİLT TOME XXIII | SAYI FASCICULE 2 | 1973

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ

ORMAN FAKÜLTESİ

DERGİSİ

REVUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES FORESTIÈRES
DE L'UNIVERSITÉ D'ISTANBUL

MATEMATİK - İSTATİSTİK'TE BİNOM VE GAUSS DAĞILIMLARININ TEORİK İNCELEMESİ ÜZERİNE BİR DENEME

A. Necati AKGÜR

Yüksek Orman Mühendisi
Orman Fakültesi'nde
Okutman

1. BİNOM FORMÜLÜ

Matematikte, $(a+b)^n$ yada $(p+q)^n$ şeklinde gösterilen bir ifadeye BİNOM FORMÜLÜ adı verilir. Binom, iki terimli anlamına geliyor.

1.1 BİNOM FORMÜLÜNÜN ÇIKARILIŞI

Bunun için p+q iki terimlisinin karesini, küpünü,... hesaplayalım :

$$(p+q)^2 = (p+q)\,(p+q) = p^2 + 2\,p\,q + q^2$$

$$(p+q)^3 = (p+q)^2\,(p+q) = p^3 + 3\,p^2q + 3\,p\,q^2 + q^3$$

$$(p+q)^4 = (p+q)^3\,(p+q) = p^4 + 4\,p^3q + 6\,p^2q^2 + 4\,p\,q^3 + q^4$$

$$(p+q)^5 = (p+q)^4\,(p+q) = p^5 + 5p^4q + 10\,p^3q^2 + 10\,p^2q^3 + 5\,p\,q^4 + q^5$$

$$(p+q)^6 = (p+q)^5\,(p+q) = p^6 + 6\,p^5q + 15\,p^4q^2 + 20\,p^3q^3 + 15\,p^2q^4 + 6\,p\,q^5 + q^6$$

$$(p+q)^7 = (p+q)^6\,(p+q) = p^7 + 7\,p^6q + 21\,p^5q^2 + 35\,p^4q^3 + 35p^3q^4 + 21\,p^2q^5 + 7\,p\,q^6 + q^7$$

. . . .
. . . .
. . . .

Görüldüğü gibi (p+q) iki terimlisinin n üstlüsünün açınımında, ilk ve sonuncu terimlerin katsayıları 1 dir ve bunlar n üstlüdürler. Baştan ve sondan ikinci terimlerin katsayıları n dir ve baştaki $p^{n-1}q$, sondaki pq^{n-1} şeklinde olacaktır. Üçüncüden başlayarak terimlerin $p^{n-2}q^2$ ve $p^2 q^{n-2}$; $p^{n-3}q^3$ ve p^3q^{n-3}; ... şeklinde gideceği açıkça görülmektedir. Her terimde, üstlerin toplamı, örneğin $(n—1) + 1$; $(n—2) + 2$; $(n—3) + 3$;... şeklinde, n'e eşit olacaktır. Fakat üçüncüden başlayarak, bütün bu terimlerin katsayıları belli değildir. Ohalde burada yapılacak iş, katsayıların bulunmasıdır. Bunun için şöyle düşüneceğiz:

$(p+q)^4$ de (birinci terimin katsayısı 1, ikinci teriminki n yani 4 dür) üçüncü terimin katsayısını n'e göre belirlemeye çalışalım; Bu sayı 6 (ve $n=4$) olduğuna göre, ya $n+2$, yada $2\ (n—1) = \frac{n}{2}\ (n—1)$ şeklinde olacaktır. Acaba hangisidir?

$(p+q)^5$ ifadesinde (birinci terimin katsayısı 1, ikinci teriminki $n=5$) üçüncü terimin katsayısı 10 olduğuna göre, bu sayı ya $2n$ dir yada $2{,}5\ (n—1) = \frac{n}{2}\ (n—1)$ dir.

$(p+q)^6$;$(p+q)^7$;... de, benzer düşünce bizi, üçüncü terimlerin katsayılarının hep $\frac{n}{2}\ (n—1) = \frac{n\ (n—1)}{2}$ olması gereğine götürür.

Dördüncü terimin katsayısına gelince:

$p+q)^6$ ifadesinde (birinci terimin katsayısı 1, ikinci teriminki n, üçüncü teriminki $\frac{n\ (n-1)}{2}$ dir) dördüncü terimin katsayısı (20), ya $4\ (n—1) = (n—2)\ (n—1)$ yada başka bir ifade,

$(p+q)^7$ ifadesinde, dördüncü terimin katsayısı (35), ya $5\ n = (n—2)\ n$ yada başka bir ifade,

$(p+q)^8$ ifadesinde, dördüncü terimin katsayısı (56), ya $7.8 = (n—1)\ n$ ya da başka bir ifadedir.

Ama bunların üçünün de, n, (n—1), (n—2) sayılarıyla ilgili olabileceği akla geliyor. Nitekim birinciyi $\frac{n}{n}$ ile, ikinciyi $\frac{n—1}{n—1}$ ile, üçüncüyü $\frac{n—2}{n—2}$ ile çarparsak, değerleri değişmeyerek,

$$(n-2)\ (n-1)\ \frac{n}{n} \qquad (n-2)\ n\ \frac{n-1}{n-1} \qquad (n-1)\ n\ \frac{n-2}{n-2}$$

olur ki, birincinin paydasındaki $n=6$, ikincinin paydasındaki $n-1=6$ (çünkü burada $n=7$ dir), üçüncünün paydasındaki $n-2=6$ (çünkü burada $n=8$) olup hep aynı bir sayıdır ve 6 dır. Ohalde bunların üçünde de, dördüncü terimlerin katsayılarının,

$$\frac{n\ (n-1)\ (n-2)}{6} = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)}{1.2.3} = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)}{3\ !}$$

olması gerekeceği sonucuna varılabilir.

Beşinci, altıncı,... terimlerin katsayıları?

Üçüncü terimin katsayısı

$$\frac{n\ (n-1)}{1.2}$$

Dördüncü terimin katsayısı

$$\frac{n\ (n-1)\ (n-2)}{1.2.3}$$

olduğuna göre,

Beşinci terimin katsayısı

$$\frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1.2.3.4}$$

Altıncı terimin katsayısı

$$\frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)}{1.2.3.4.5}$$

....

olacak demektir. Böylece pay'da, n'den başlayıp birer birer azalarak kaç çarpan yazılmışsa, payda'da da 1 den başlayıp, birer birer çoğalarak, o kadar sayıda çarpan olacaktır.

Bu bilgilerin ışığı altında, binom formülünün açınımı şöyle olacaktır:

$$(p+q)^n = p^n + n\,p^{n-1}q + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,p^{n-2}q^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,p^{n-3}q^3 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\ldots\ldots 7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(n-5)\,(n-4)\,(n-3)}\,p^3q^{n-3}$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\ldots\ldots 7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(n-5)\,(n-4)\,(n-3)\,(n-2)}\,p^2q^{n-2}$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\ldots\ldots 7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(n-5)\,(n-4)\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)}\,p\,q^{n-1}$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\ldots\ldots 7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(n-5)\,(n-4)\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n}\,q^n$$

Sondan başa doğru gelen terimlerde gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$(p+q)^n = p^n + n\,p^{n-1}q + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,p^{n-2}q^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,p^{n-3}q^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,p^3q^{n-3} + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,p^2q^{n-2} + n\,p\,q^{n-1} + q^n$$

olarak binom formülünün açınımı elde edilmiş olur. (Formül 1)

Binom formülünde, görüldüğü gibi, baştan birinci terimin katsayısı, sondan birinci terimin katsayısına; baştan ikinci, üçüncü,... terimin katsayısı, sondan ikinci, üçüncü,... terimin katsayısına eşittir.

1.2 KOMBİNEZON İŞARETLERİLE BİNOM

Binom formülü, kombinezon işaretleri kullanılmak suretiyle, şöyle de yazılabilir:

$$(p+q)^n = C_n^{\circ}\,p^{n-\circ}\,q^{\circ} + C_n^1\,p^{n-1}q^1 + C_n^2\,p^{n-2}\,q^2 + C_n^3\,p^{n-3}\,q^3 + \ldots$$

$$\ldots + C_n^3\,p^3\,q^{n-3} + C_n^2\,p^2\,q^{n-2} + C_n^1\,p^1\,q^{n-1} + C_n^{\circ}\,p^{\circ}\,q^{n-\circ}$$

Burada,

$$C_n^k = \frac{n\,!}{(n-k)\,!\;k\,!} \quad ; \quad p^\circ = 1 \quad ; \quad p^1 = p \qquad \text{ve}$$

$$n\,! = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\ldots\ldots 7.6.5.4.3.2.1$$

oldukları hatırlanmalıdır.

Bir örnek olmak üzere, binom formülünün beşinci teriminin katsayısını hesaplayalım:

$$C_n^4 = \frac{n\,!}{(n\text{-}4)\,!\;4\,!} = \frac{n(n\text{-}1)\,(n\text{-}2)\,(n\text{-}3)\,(n\text{-}4)\,(n\text{-}5)\ldots\ldots 5.4.3.2.1}{(n\text{-}4)\,(n\text{-}5)\ldots\ldots 5.4.3.2.1 \times 4.3.2.1}$$

$$= \frac{n\;(n-1)\;(n-2)\;(n\;\;3)}{1.2.3.4}$$

Örnek

$(p+q)^{15} = ?$ açınımını bulmak.

1. no. lu binom formülüne uygulamakla,

$$(p+q)^{15} = p^{15} + 15\,p^{14}\,q + \frac{15.14}{1.2}\,p^{13}\,q^2 + \frac{15.14.13}{1.2.3}\,p^{12}\,q^3 + $$

$$\ldots + \frac{15.14.13.12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}\,p^6\,q^9 + \ldots + 15\,p\,q^{14} + q^{15}$$

$$= p^{15} + 15\,p^{14}\,q + 105\,p^{13}\,q^2 + 455\,p^{12}\,q^3 + 1365\,p^{11}\,q^4 +$$

$$3003\,p^{10}\,q^5 + 5005\,p^9\,q^6 + 6435\,p^8 q^7 + 6435\,p^7\,q^8 +$$

$$5005\,p^6\,q^9 + 3003\,p^5\,q^{10} + 1365\,p^4\,q^{11} + 455\,p^3\,q^{12} +$$

$$105\,p^2\,q^{13} + 15\,p\,q^{14} + q^{15}$$

1.3 PASCAL ÜÇGENİ

Binom'un katsayıları Pascal üçgeni'yle de bulunabilir :

0 üstlü...	1	... toplamı	$2^0 = 1$
1 »	1 1	»	$2^1 = 2$
2 »	1 2 1	»	$2^2 = 4$
3 »	1 3 3 1	»	$2^3 = 8$
4 »	1 4 6 4 1	»	$2^4 = 16$
5 »	1 5 10 10 5 1	»	$2^5 = 32$
6 »	1 6 15 20 15 6 1	»	$2^6 = 64$
7 »	1 7 21 35 35 21 7 1	»	$2^7 = 128$
. .	1 8 28 56 70 56 28 8 1	.	. .
. .	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	.	.
. .	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1		
	1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1		
	1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1		
	1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1		
	1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1		
	1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1		
⋮	⋮	⋮	

Pascal üçgeni şöyle yapılır :

En başa 1 yazılır. Onun altındaki satıra ve 1'in her iki tarafına, yine birer 1 konur. Üçüncü satıra, bu 1 lerin soluna ve sağına yine birer 1 konur; ortaya, yukarı satırdaki iki sayının yani 1 lerin toplamı olarak, 2 yazılır. Dördüncü satıra, baş ve sona yine 1 ler konduktan sonra, üst satırdaki iki rakamın toplamı, bu iki rakamın alt - orta'-sına yazılır... Böylece Pascal üçgenindeki her sayı, üst - iki tarafında yer alan iki sayının toplamı kadardır.

Pascal üçgeni düzenlenirken, bir yanlışlık yapılıp yapılmadığını kontrol için şu kurallar uygulanmalıdır :

1° Her satırda n+1 tane sayı bulunur. Örneğin $(p+q)^{15}$ satırında 16 tane sayı olmalıdır.

2° Her satırdaki sayıların toplamı, 2^n e eşittir. Örneğin $(p+q)^{15}$ in katsayılarının toplamı, $1+15+105+455+ \ldots = 2^{15} = 32\,768$ i vermelidir.

1.4 BİNOM DAĞILIMI

Örnek : $p = q = \dfrac{1}{2}$ ise,

$$(p+q)^{15} = \frac{1}{2^{15}} + 15 \, . \frac{1}{2^{14}} \, . \frac{1}{2} + 105 \, . \frac{1}{2^{13}} \, . \frac{1}{2^2} + 455 \, . \frac{1}{2^{12}} \, . \frac{1}{2^3} +$$

$$\ldots = 0{,}000\,030\,5 + 0{,}000\,457\,8 + 0{,}003\,204\,3 + \ldots$$

dir.

$$\begin{array}{lr} \text{Kontrol :} & 0{,}000\,030\,5 \\ & 0{,}000\,457\,8 \\ & 0{,}003\,204\,3 \\ & 0{,}013\,885\,5 \\ & 0{,}041\,656\,5 \\ & 0{,}091\,644\,3 \\ & 0{,}152\,740\,5 \\ & +\ 0{,}196\,380\,6 \\ \hline & 0{,}500\,000 \end{array}$$

$p = q = \dfrac{1}{2}$ olduğuna göre $(p + q)^{15} = 1$ olacaktır. Yarısının toplamı ise 1/2 dir.

1.5 BİNOM'UN KULLANILIŞINA BİR ÖRNEK

Bir para 15 defa havaya atılsa : (Paranın yazı (p) ve tura (q) olarak iki yüzü olduğundan $p = q = \frac{1}{2}$ dir).

$0{,}196 = \frac{196}{1000}$ yani bin'de 196 olasılıkla (en büyük olasılık, çünkü kat sayısı en büyük 6435) 8 yazı - 7 tura (yada aksi, 7 yazı - 8 tura),

Bin'de 153 olasılıkla (ikinci en büyük olasılık), 9 yazı - 6 tura (yada aksi) gelebilir.

....

Milyon'da 31 olasılıkla (en zayıf olasılık, katsayı 1), 15 yazı (yada 15 tura) gelebilir.

1.6 BİNOM DAĞILIMININ GRAFİĞİ

Şekil 1.1, örnekte hesaplanan binom sayılarını, kartezyan koordinatlar sisteminde bir grafik olarak göstermektedir. Bu grafik, binom dağılımı hakkında, bize daha biçimsel ve somut bir görüş olanağı sağlayacaktır. Bu eğriye, binom dağılımı eğrisi yada binom olasılık eğrisi adı verilebilir.

Şekil : 1.1

2. GAUSS EĞRİSİ YADA NORMAL EĞRİ

Matematik - istatistikte Gauss eğrisi yada normal eğri adı verilen eğrinin fonksiyon denklemi, binom formülünden çıkarılır.

2.1 GAUS EĞRİSİ DENKLEMİNİN ÇIKARILIŞI

Binom formülünü düşünelim:

$$(p+q)^n = \underset{\text{I terim}}{p^n} + \underset{\text{II terim}}{n\,p^{n-1}q} + \underset{\text{III terim}}{\frac{n\,(n-1)}{1.2}\,p^{n-2}q^2} + \underset{\text{IV terim}}{\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,p^{n-3}q^3} + \ldots$$

Bu açınımda (k+1) inci terimi yazmaya çalışalım:

Dördüncü terimde q ve p ler, 3 ve (n—3) yani (4—1) ve [n—(4—1)] üstlüdürler. Böylece bunları $p^{n-(4-1)}\ q^{4-1}$ olarak gösterebiliriz. Yine bu düşünceyi kullanarak, katsayı kesrinin payının sonuncu çarpanını (n—2) = [n—(4—2)] olarak ifade edebiliriz. Paydanın sonuncu çarpanıysa q nun üstüne yani (4—1) e eşittir.

Yine bu düşünce yoluyla, (k+1) inci terimde, q ve p ler $q^{(k+1)-1} = q^k$ ve $p^{n-[(k+1)-1]} = p^{n-k}$; katsayı kesrinin payının sonuncu çarpanı n—(k+1—2) = n—k+1 ve paydanın sonuncu çarpanı q nun üstüne eşit yani k olacağı için, (k+1) inci terim,

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\,(n-k+2)\,(n-k+1)}{1.2.3.4.5\ldots\ldots(k-2)\,(k-1)\,k}\,p^{n-k}\,q^k$$

olacaktır.

Burada katsayı kesrinin payını ve paydasını,

$$(n-k)\,! = (n-k)\,(n-k-1)\,(n-k-2)\,\ldots\ldots\,5.4.3.2.1$$

ile çarparsak, kesrin değeri değişmez ve,

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\ldots\,(n-k+2)\,(n-k+1)\,(n-k)\,(n-k-1)}{1.2.3.4.5\,\ldots\ldots\,(k-2)\,(k-1)\,k \times (n-k)\,(n-k-1)}$$

$$\frac{(n-k-2)\,\ldots\ldots\,5.4.3.2.1}{(n-k-2)\,\ldots\ldots\,5.4.3.2.1}\,p^{n-k}\,q^k$$

olur. Bu durumda kesrin payı n ! e, paydasındaki ilk çarpım k ! ve ikinci çarpım (n—k) ! e eşittir. Buna göre binom formülünün (k+1) inci terimi,

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,p^{n-k}\,q^{k}$$

olacaktır.

Sondan (k+1) inci terim ise, aynı katsayılı,

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,p^{k}\,q^{n-k} \qquad \text{(formül 2)}$$

dir.

Binom açınımının sondan (k+1) inci terimini veren bu formül, matematik-istatistiğin önemli bir formülüdür.

Ne var ki bu formülün pratikte kullanılma olanağı, maalesef, bulunmamaktadır. Çünkü formülde geçen n ve k sayıları çok büyük sayılardır. Oysa örneğin 10!, 15! gibi küçük faktoryel sayıların bile,

$$10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3\ 628\ 880$$

$$15! = 15.14.13.12.11.10! = 1\ 307\ 674\ 368\ 000$$

gibi çok büyük sayılar olması nedeniyle, yine örneğin,

400!, 1500!

gibi sayıların hesaplanması, artık tamamen olanak dışı olmaktadır.

Bu bakımdan İngiliz matematikçisi James Stirling (1730 da) büyük sayıların faktoryellerinin hesabında kullanılmak üzere, bir yaklaşık değer formülü vermiştir.

Stirling formülü şudur:

$$n! \cong \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n} \qquad \text{(formül 3)}$$

Şimdi bu formülü, binom'un (k+1) inci terimine uygulayalım:

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,p^{k}\,q^{n-k} = \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\,.\,\frac{e^{n-k}}{(n-k)^{n-k}}\,.\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\ (n-k)}}\,.\,\frac{e^k}{k^k}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\,.\,p^{k}\,q^{n-k}$$

Burada,

$$e^{n-k} = \frac{e^n}{e^k} \quad ; \quad (n-k)^{n-k} = \frac{(n-k)^n}{(n-k)^k}$$

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \quad ; \quad \frac{a^{-x}}{c^{-y}} = \frac{c^y}{a^x}$$

oldukları hatırlanarak,

$$= \frac{n^n}{e^n} \cdot \frac{e^n}{e^k} \cdot \frac{(n-k)^k}{(n-k)^n} \cdot \frac{e^k}{k^k} \sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi(n-k) \cdot 2\pi k}} \cdot p^k q^{n-k}$$

yazılıp gereken kısaltmalar yapılırsa,

$$= \frac{n^n}{k^k} \cdot \frac{(n-k)^k}{(n-k)^n} \cdot \sqrt{\frac{n}{2\pi k (n-k)}} \cdot p^k q^{n-k}$$

olur.

Şimdi burada olasılık hesabının önemli bir kuralı hatırlanmalıdır. Bu kural şudur:

Matematik umut, olasılık oranıyla, frekansın çarpımına eşittir. Yani,

$$k = p \cdot n \qquad \text{(formül 4 a)}$$

Diğer taraftan, $p+q = 1$ ve buradan $p = 1-q$ olduğundan,

$$k = p \cdot n = (1-q) \cdot n = n - nq \quad \text{dan,}$$

$$nq = n - k \qquad \text{(formül 4 b)}$$

olur. Bu değerler yukarıdaki işlemde yerlerine konursa,

$$= \frac{n^n}{(pn)^{pn}} \cdot \frac{(qn)^{pn}}{(qn)^n} \cdot \sqrt{\frac{n}{2\pi\, pn\, qn}} \cdot p^{pn} q^{qn}$$

olur.

Burada, $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ olduğu hatırlanırsa,

$$= \frac{n^n}{p^{pn} \cdot n^{pn}} \cdot \frac{q^{pn} \cdot n^{pn}}{q^n \cdot n^n} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} \cdot p^{pn} q^{qn}$$

Ve kısaltmadan sonra,

$$= \frac{q^{pn} \cdot q^{qn}}{q^{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \pi pqn}}$$

kalır. Paydaki ifade,

$$q^{pn} \cdot q^{qn} = q^{pn+qn} = q^{n(p+q)} \qquad \text{ve} \qquad p+q = 1$$

olacağı nedeniyle, pay'da q^n kalır. Bu da payda'daki q^n ile kısalır. Bu halde sonuç,

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \pi pqn}}$$

olarak bulunmuş olur.

Böylece binom açınımının $(k+1)$ inci terimi,

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot p^{k} \cdot q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2 \pi pqn}} \qquad \text{(formül 5)}$$

haline gelmiş oluyor.

Şimdi yapılacak iş, bu ilişkiyi, bir fonksiyon halinde ifade edebilmek olmalıdır.

Bunun için k yerine $k-x$ koyalım. Bu halde,

$$y = \frac{n!}{(k-x)!\,[n-(k-x)]!} \cdot p^{k-x}\, q^{n-(k-x)}$$

olacaktır. İç parantezler açılırsa,

$$y = \frac{n!}{(k-x)!\,(n-k+x)!} \cdot p^{k-x}\, q^{n-k+x}$$

Burada, $k = pn$ ve $n-k = qn$ koyarak,

$$y = \frac{n!}{(pn-x)!\,(qn+x)!} \cdot p^{pn-x} q^{qn+x}$$

Ve Stirling'e uygulamakla,

$$y = \frac{n^n}{e^n} . \sqrt{2\pi} . n \frac{e^{pn-x}}{(pn-x)^{pn-x}} . \frac{1}{\sqrt{2\pi (pn-x)}} . \frac{e^{qn+x}}{(qn+x)^{qn+x}} .$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi (qn+x)}} . p^{pn-x} . q^{qn+x}$$

$$y = \frac{n^n}{e^n} . \frac{e^{pn-x}}{(pn-x)^{np-x}} . \frac{e^{qn+x}}{(qn+x)^{qn+x}} . \sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi (pn-x) . 2\pi (qn+x)}} .$$
$$p^{pn-x} q^{qn+x}$$

Paydaki, $e^{pn-x} . e^{qn+x} = e^{pn-x+qn+x} = e^{pn+qn} = e^{n(p+q)} = e^n$

olarak, payda'daki e^n ile; sonra da kök içinde pay'daki 2π ile payda'daki 2π lerden bir tanesi birbirlerini götürürler:

$$y = \frac{n^n}{(pn-x)^{pn-x} . (qn+x)^{qn+x}} . \sqrt{\frac{n}{2\pi (pn-x) (qn+x)}} . p^{pn-x} . q^{qn+x}$$

Burada, $(pn-x) = pn \, (1 - \frac{x}{pn})$ ve

$(qn+x) = qn (1 + \frac{x}{qn})$ yazmakla,

$$y = \frac{n^n}{\left[pn\,(1 - \frac{x}{pn})\right]^{pn-x} \left[qn\,(1 + \frac{x}{qn})\right]^{qn+x}}$$
$$\sqrt{\frac{n}{2\pi pn\,(1 - \frac{x}{pn}) . qn\,(1 + \frac{x}{qn})}} . p^{pn-x} q^{qn+x}$$

Karekök içinde paydaki n, payda'daki n lerden biriyle kısalır. Sonra da,

$(a.b)^z = a^z . b^z$ ve $\sqrt{s \cdot t} = \sqrt{s} \cdot \sqrt{t} = s^{\frac{1}{2}} . t^{\frac{1}{2}}$

oldukları hatırlanarak,

$$y = \frac{n^n}{(pn)^{pn-x}\left(1-\frac{x}{pn}\right)^{pn-x}.\ (qn)^{qn+x}\left(1+\frac{x}{qn}\right)^{qn+x}}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{pn}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{qn}\right)^{\frac{1}{2}}} . \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} . p^{pn-x}\, q^{qn+x}$$

$$= \left(\frac{p}{pn}\right)^{pn-x}\left(\frac{q}{qn}\right)^{qn+x} \frac{n^n}{\left(1-\frac{x}{pn}\right)^{pn-x+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{qn}\right)^{qn+x+\frac{1}{2}}} . \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}}$$

Burada,

$$\frac{1}{n^{pn-x}} . \frac{1}{n^{qn+x}}\, n^n = \frac{n^n}{n^{pn-x+qn+x}} = \frac{n^n}{n^{pn+qn}} = \frac{n^n}{n^{n(p+q)}} = \frac{n^n}{n^n} = 1$$

olacağından,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} . \frac{1}{\left(1-\frac{x}{pn}\right)^{pn-x+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{qn}\right)^{qn+x+\frac{1}{2}}}$$

olur. Burada, $\frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}}$ biraz önce 5 no. lu formül olarak bulmuş olduğumuz bir sonuç, bir sabit sayı idi. Bunu y_0 ile gösterelim. Bu halde,

$$\frac{y}{y_0} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{pn}\right)^{pn-x+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{qn}\right)^{qn+x+\frac{1}{2}}}$$

olur. Her iki tarafın Neperyen logaritması alınırsa,

$$(\ln\frac{1}{a} = \ln 1 - \ln a = 0 - \ln a = -\ln a \qquad \text{ve}$$

$$\ln c^t = t . \ln c$$

oldukları hatırlanarak)

$$\ln \frac{y}{y_0} = - \left[(pn - x + \tfrac{1}{2}) \cdot \ln \left(1 - \frac{x}{pn}\right) + (qn + x + \tfrac{1}{2}) \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{qn}\right) \right]$$

bulunur.

Diğer taraftan, yüksek matematikte, Fonksiyonların Serilere Açınımı - Mac Laurin formülü konusu hatırlanırsa,

$$\ln (1 - t) = - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} - \ldots$$

$$\ln (1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \ldots$$

eşitliklerine varılır. Fonksiyonumuz, bu eşitliklere göre,

$$\ln \frac{y}{y_0} = - (pn - x + \tfrac{1}{2}) \left(- \frac{x}{pn} - \frac{x^2}{2\,p^2n^2} - \frac{x^3}{3\,p^3n^3} - \frac{x^4}{4\,p^4n^4} - \frac{x^5}{5\,p^5n^5} - \ldots\ldots \right)$$

$$- (qn + x + \tfrac{1}{2}) \left(\frac{x}{qn} - \frac{x^2}{2\,q^2n^2} + \frac{x^3}{3\,q^3n^3} - \frac{x^4}{4\,q^4n^4} + \frac{x^5}{5\,q^5n^5} - \ldots\ldots \right)$$

olur. Şimdi bu çarpmaları yapalım:

$$\ln \frac{y}{y_0} = pn \cdot \frac{x}{pn} + pn \cdot \frac{x^2}{2p^2n^2} + pn \cdot \frac{x^3}{3p^3n^3} + pn \cdot \frac{x^4}{4p^4n^4} + \ldots$$

$$- x \cdot \frac{x}{pn} - x \cdot \frac{x^2}{2p^2n^2} - x \cdot \frac{x^3}{3p^3n^3} - \cdot x \frac{x^4}{4p^4n^4} - \ldots$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{pn} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2p^2n^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3p^3n^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4p^4n^4} + \ldots$$

$$- qn \cdot \frac{x}{qn} + qn \cdot \frac{x^2}{2q^2n^2} - qn \cdot \frac{x^3}{3q^3n^3} + qn \cdot \frac{x^4}{4q^4n^4} - \ldots$$

$$-x\,.\,\frac{x}{qn}+x\,.\,\frac{x^2}{2q^2n^2}-x\,.\,\frac{x^3}{3q^3n^3}+x\,.\,\frac{x^4}{4q^4n^4}-\ldots$$

$$-\frac{1}{2}\,.\,\frac{x}{qn}+\frac{1}{2}\,.\,\frac{x^2}{2q^2n^2}-\frac{1}{2}\,.\,\frac{x^3}{3q^3n^3}+\frac{1}{2}\,.\,\frac{x^4}{4q^4n^4}-\ldots$$

$$\ln\frac{y}{y_0}=x+\frac{x^2}{2pn}+\frac{x^3}{3p^2n^2}+\frac{x^4}{4p^3n^3}+\ldots-\frac{x^2}{pn}-\frac{x^3}{2p^2n^2}-$$

$$\frac{x^4}{3p^3n^3}-\frac{x^5}{4p^4n^4}-\ldots+\frac{x}{2pn}+\frac{x^2}{4p^2n^2}+\frac{x^3}{6\,p^3n^3}+\frac{x^4}{8p^4n^4}+$$

$$-x+\frac{x^2}{2qn}-\frac{x^3}{3q^2n^2}+\frac{x^4}{4q^3n^3}-\ldots-\frac{x^2}{qn}+\frac{x^3}{2q^2n^2}$$

$$-\frac{x^4}{3q^3n^3}+\frac{x^5}{4q^4n^4}-\ldots-\frac{x}{2qn}+\frac{x^2}{4q^2n^2}-\frac{x^3}{6q^3n^3}$$

$$+\frac{x^4}{8q^4n^4}-\ldots$$

Burada p ve q lara ait her iki serinin, birinci ve ikinci kesimleri toplanıp çıkarılabilir. Örneğin,

$$\frac{x^2}{2pn}-\frac{x^2}{pn}=-\frac{x^2}{2pn}\quad \text{ve}\quad \frac{x^3}{3p^2n^2}-\frac{x^3}{2p^2n^2}=-\frac{x^3}{6p^2n^2}$$

gibi. Bu halde,

$$\ln\frac{y}{y_0}=x-\frac{x^2}{2pn}-\frac{x^3}{6p^2n^2}-\frac{x^4}{12p^3n^3}-\ldots+\frac{x}{2pn}+\frac{x^2}{4p^2n^2}$$

$$+\frac{x^3}{6p^3n^3}+\frac{x^4}{8p^4n^4}+\ldots-x-\frac{x^2}{2qn}+\frac{x^3}{6q^2n^2}-\frac{x^4}{12q^3n^3}$$

$$+\ldots-\frac{x}{2qn}+\frac{x^2}{4q^2n^2}-\frac{x^3}{6q^3n^3}+\frac{x^4}{8q^4n^4}-\ldots$$

Bu durumda alt alta gelen terimler toplanıp çıkarılabilir. Bu halde de,

$$\ln\frac{y}{y_0}=-\frac{x^2(q+p)}{2pqn}+\frac{x^3(p^2-q^2)}{6p^2q^2n^2}-\frac{x^4(q^3+p^3)}{12p^3q^3n^3}+\ldots$$

$$+ \frac{x(q-p)}{2pqn} + \frac{x^2(q^2+p^2)}{4p^2q^2n^2} + \frac{x^3(q^3-p^3)}{6p^3q^3n^3} + \frac{x^4(q^4+p^4)}{8p^4q^4n^4} + \ldots$$

Burada birinci terimde $(p+q) = 1$ dir.

Diğer terimlerde paydalarda bulunan n sayısı çok büyük bir sayı olduğu için, bu kesirlerin değerleri çok küçüktürler. Örneğin paylar hep 1 olsalar, $n = 400$ ve $n = 1500$ alındığı takdirde, $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \ldots\ldots$ nin değerleri,

$$\frac{1}{400} = 0{,}0025 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{1500} = 0{,}00067$$

$$\frac{1}{400^2} = \frac{1}{160\,000} = 0{,}000\,006\,25 \quad \text{ve}$$

$$\frac{1}{1500^2} = \frac{1}{2\,250\,000} = 0{,}000\,000\,44$$

kadardır. n büyüdükçe bu değerler daha da küçülürler.

Diğer taraftan, p ve q, 1 den küçük birer sayı, örneğin $p = q = \frac{1}{2}$ yada $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$ olduklarından, bunların kareleri, küpleri, ... daha da küçüktürler. Bu çok küçük sayıların, paydalarında yer alan çok büyük sayılara oranları ise, bu terimlerin değerlerini daha da küçültür.

Böylece birinci terimden sonra gelen bütün terimler ihmal edilebilecek kadar küçüktürler. Atılırlarsa, formül, yaklaşık olarak şu değeri alır:

$$\ln \frac{y}{y_0} = -\frac{x^2}{2\,pqn}$$

Burada logaritmaya ait şu kuralı hatırlayalım:

$c = e^{-s}$ ise, $\ln c = -s \,.\, \ln e = -s$, $(\ln e = 1$ dir) olur.

Buna göre yukarıdaki ifade,

$$\frac{y}{y_0} = e^{-\frac{x^2}{2\,pqn}}$$

Ve $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\,pqn}}$ konulmakla,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,pqn}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\,pqn}}$$

haline gelir.

Burada, $\sqrt{pqn} = \sigma$ dersek, fonksiyonumuz şöyle sonuçlanır:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(formül 6)}$$

Bu fonksiyona Gauss fonksiyonu, bu fonksiyonun gösterdiği eğriyede Gauss eğrisi yada Normal eğri adı verilir.

2.2 GAUSS EĞRİSİNİN DEĞİŞİM VE GRAFİĞİ

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

foksiyonunun gösterdiği eğriyi çizmeye çalışalım.

Eğri çizimleri hakkında cebirden bilinen işlemleri hatırlarsak, yapılacak işler, sırasıyla, şunlar olmalıdır :

1. Fonksiyonun türevi hesaplanır. Türev sıfıra eşitlenerek kökleri bulunur. Bu kökler, eğrinin maximum yada minimum'larının absisleridir.

2. İkinci türev hesaplanır. Sıfıra eşitlenerek kökleri bulunur. Bu kökler, eğrinin dönüm noktalarının absisleridir.

3. Birinci türevle elde edilen kökler, ikinci türevde yerlerine konularak, bunların maksimum yada minimum mu oldukları belirlenir.

4. $y = \mp \infty$ iken x'in; $x = \mp \infty$ iken y'nin alacağı değerler hesaplanır. Bu yerlerde, eğrinin asimptotları yer alır.

5. $y = 0$ iken x'in; $x = 0$ iken y'nin alacağı değerler hesaplanır. Bunlar eğriye ait özel değerlerdir.

1. Birinci türev :

$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

fonksiyonunun, fonksiyon fonksiyonunun türevi yoluyla, türevi hesaplanabilir. Burada,

$-\dfrac{x^2}{2\sigma^2} = z$ koyalım. Buradan, $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{2x}{2\sigma^2} = -\dfrac{x}{\sigma^2}$

olur.

Bu halde fonksiyon,

$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^z$$

şekline girmiştir. Bunun türevi,

($y = e^v$ ise $\dfrac{dy}{dx} = e^v \cdot \dfrac{dv}{dx}$ dir, genel formülüne uygulamakla)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^z \cdot \frac{dz}{dx}$$

dir. z ve $\dfrac{dz}{dx}$ in yerlerine eşitleri konursa,

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$ (formül 7a) yada,

$$y' = -\frac{x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(formül 7b)}$$

olur.

Türev sıfıra eşitlenirse ($y' = 0$), bu halde $x = 0$ olur ki, bu noktada eğrinin bir maximum yada minimum'u vardır.

Bu noktanın ordinatı, asıl fonksiyonda $x = 0$ koymakla,

$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} = \frac{1}{e^{\circ}} \text{ ve } e^{\circ} = 1 \text{ olacağından}$$

$$\begin{cases} x = 0 & \text{iken,} \\ y_0 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} & \text{dir.} \end{cases}$$

Böylece bu değerler, max. yada min. noktasının koordinatlarıdır.

2. İkinci türev :

Birinci türevin tekrar türevi,

$$y' = \underbrace{-\frac{x}{\sigma^2}}_{\text{I fonks.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}_{\text{II fonksiyon}}$$

yazmak ve bir çarpımın türevi kuralını uygulamakla, ($y' = I'.II + II'.I$),

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \left(-\frac{x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sigma^2}\right)$$

$$y'' = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(formül 8)}$$

olarak bulunur.

İkinci türev sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{x^2}{\sigma^2} - 1 = 0 \quad \text{ve buradan} \quad \frac{x^2}{\sigma^2} = 1 \longrightarrow x = \mp \sigma$$

elde edilir. Bu değerler, dönüm noktalarının absisleridir.

x in bu değerleri asıl fonksiyonda yerine konursa,

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$

bulunur. Böylece bu iki değer,

$$\begin{cases} x = \mp \sigma \\ y_\sigma = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} = \dfrac{y_0}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

dönüm noktalarının koordinatlarıdır.

3. Maximum yada minimum olduğu belirlenen noktaların max. mu, yoksa min. mu olduğunun araştırılması.

Birinci türevi sıfır yapan, $x = 0$ değeri, ikinci türevde yerine konursa, $\frac{x^2}{\sigma^2} - 1$ in değeri $x = 0$ olunca, negatif olacağından, bu noktanın bir maximum noktası olduğu anlaşılmış olur.

4. Asimptotlar : Asıl fonksiyonda, $x = \mp \infty$ konursa, y değeri

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

olacağı nedeniyle, x ekseninin, eğrinin bir asimptotu olduğu anlaşılmış olur.

5. Özel değerler : $x = 0$ iken $y = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ dir (Madde 1)

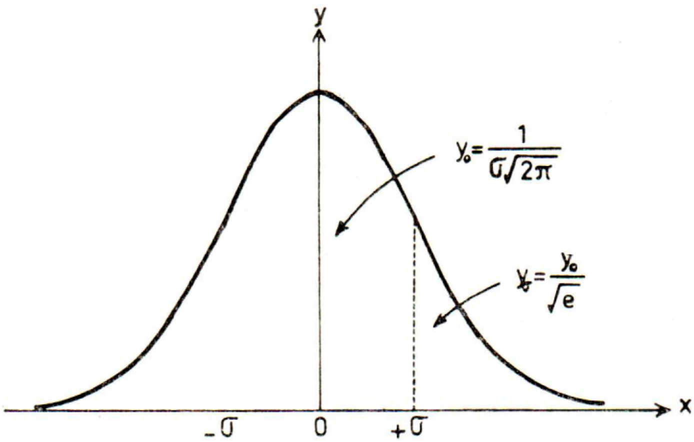
Bu değerleri değişim tablosunda toplayalım :

x	$-\infty$		$-\sigma$		0		$+\sigma$		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$	$\searrow$	0

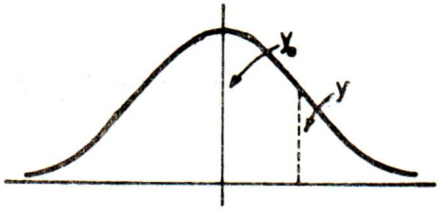
Şimdi artık,

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

fonksiyonunun gösterdiği ve adına Gauss eğrisi yada normal eğri denilen eğriyi çizebiliriz :



Şekil 2.1



2.3 GAUSS EĞRİSİNİN ORDİNAT DEĞERLERİ

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

de $\pi = 3.14159$ koyacak olursak, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2,506647} = 0,39894$ olacağından, bu fonksiyon,

$$y = \frac{1}{2,506647 \,.\, \sigma} \,.\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{yada } y = \frac{0,39894}{\sigma} \,.\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

şeklinde de yazılabilir (formül 9a, b).

Böylece $x = 0$ iken, ($e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = e^{-0} = 1/e^0 = 1$), $y = y_0$ ın değeri, σ cinsinden,

$$y_0 = \frac{0,39894}{\sigma}$$

olur.

Daha sonra, $x = \frac{1}{2}\sigma$; σ ; $1,5\,\sigma$ $2\,\sigma$ vs. alınarak, bunlara ait ordinat değerleri de hesaplanabilir.

Örneğin,

$x = \sigma$	için	$y = 0,24197/\sigma$
$x = 2\sigma$	»	$y = 0,05399/\sigma$ v.s.

Ancak bir kolaylık olmak üzere, düşünsel (itibari) olarak,

$$y_0 = 1$$

alınırsa, fonksiyon

$$y = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

haline gelir.

Bu halde $x = \frac{1}{2}\sigma$; σ ; $1,5\,\sigma$; $2\,\sigma$ v.s. değerleri verilerek, y nin alacağı değerler (ordinatlar) hesaplanırsa,

$x = 0$ için $y_0 = e^{-0} = 1/e^0 = 1$

$x = \frac{1}{2}\sigma$ » $y = e^{-\frac{1}{8}} = 1/e^{\frac{1}{8}} = 0,88250$

$x = \sigma$ » $y_\sigma = e^{-\frac{1}{2}} = 1/e^{\frac{1}{2}} = 1/\sqrt{e} = 0,60653$

$x = 1,5\,\sigma$ » $y = e^{-\frac{9}{8}} = 1/e^{\frac{9}{8}} = 0,32465$

$x = 2\,\sigma$ » $y = e^{-2} = 1/e^2 = 0,13534$

$x = 2,5\,\sigma$ » $y = e^{-\frac{25}{8}} = 1/e^{\frac{25}{8}} = 0,04394$

$x = 3\,\sigma$ » $y = e^{-\frac{9}{2}} = 1/e^{\frac{9}{2}} = 0,01111$

bulunur.

Bu değerler, önemi dolayısıyla, daha dar aralıklarla, bir tablo halinde düzenlenerek, her elemanter matematik - istatistik kitabına eklenmiş bulunurlar.

Örnek

$x = \sigma$ için hesaplama.

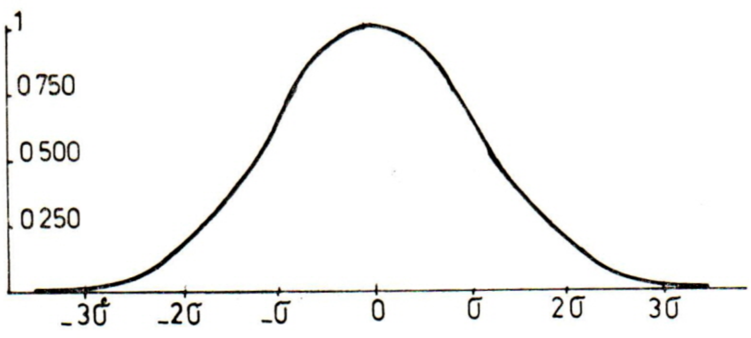
$y = 1/e^{\frac{1}{2}}$ den $\log y = 0 - \frac{1}{2} \log e$ $(\log 1 = 0)$

0,43 429/2

0,21 715

$$\begin{array}{r} 0,00\,000 \\ -\;0,21\,715 \\ \hline \log y = \bar{1},78\,285 \\ y = 0,60653 \end{array}$$

Aşağıdaki şekilde ordinat değerleri bir grafik üzerinde görülmektedir.



Şekil 2.2

2.4 GAUSS FONKSİYONU DEĞERLERİYLE BİNOM FONKSİYONU DEĞERLERİNİN $p = q = \frac{1}{2}$ VE $n = 15$ İÇİN KARŞILAŞTIRILMASI

Gauss fonksiyonunda $\sigma = \sqrt{pqn}$ olarak alınmıştır. Buna göre, $p = q = \frac{1}{2}$ ve $n = 15$ özel değerleri için $\sigma = \sqrt{3{,}75} = 1{,}9365$ bulunur.

Bu özel değerlere göre Gauss fonksiyonu,

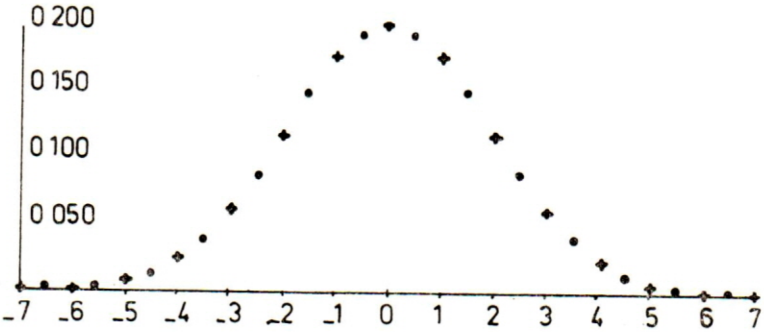
$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0{,}20601\, e^{-\frac{x^2}{7{,}5}}$$

olarak bulunur.

Bu ifadeye $x = 0, 1, 2, \ldots$ koyarak y değerlerini hesaplayalım ve bu değerleri, binom fonksiyonu için, 1.4 de bulduğumuz değerlerle karşılaştıralım :

			Gauss	*Binom*
$x = 0$	iken	$y =$	0,206 01	0,196 38
1	»		0,180 30	0,152 74
2	»		0,120 86	0,091 64
3	»		0,062 05	0,041 66
4	»		0,024 40	0,013 89
5	»		0,007 35	0,003 20
6	»		0,001 70	0,000 46
7	»		0,000 30	0,000 03

Gauss ve binom fonksiyonlarının bu değerlerini, bir grafik üzerinde de gösterebiliriz :



Şekil 2.3

Binom'un yarı toplamı 0,5 ve bütününün toplamı 1 ediyordu. Gauss fonksiyon değerlerini de benzer şekilde toplarsak

$x = -7$	için	$y = 0{,}000\ 30$
-6	»	$0{,}001\ 70$
-5	»	$0{,}007\ 35$
-4	»	$0{,}024\ 40$
-3	»	$0{,}062\ 05$
-2	»	$0{,}120\ 86$
-1	»	$0{,}180\ 30$
0	»	$0{,}206\ 01$
1	»	$0{,}180\ 30$
2	»	$0{,}120\ 86$
3	»	$0{,}062\ 05$
4	»	$0{,}024\ 40$
5	»	$0{,}007\ 35$
6	»	$0{,}001\ 70$
7	»	$+\ 0{,}000\ 30$
		$0{,}999\ 93 \cong 1$

yine 1 elde ederiz.

$x = 0$ ve $x = 1$ için örnek hesaplamalar :

$$x = 0 \text{ iken } \left(e^{-\frac{x^2}{7{,}5}} = e^{-0} = 1\right)$$

$$y_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{ den } \log y_0 = 0 - \left[\log\sigma + \frac{1}{2}(\log 2 + \log\pi)\right]$$

$$\begin{array}{r} 0{,}30\ 103 \\ +\ 0{,}49\ 715 \\ \hline 0{,}79\ 818\ /\ 2 \\ 0{,}39\ 909 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}28\ 702 \\ +\ 0{,}39\ 909 \\ \hline 0{,}68\ 611 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}00\ 000 \\ -\ 0{,}68\ 611 \\ \hline \end{array}$$

$$\log y_0 = \bar{1}{,}31\ 389$$

$$y_0 = 0.20\ 601$$

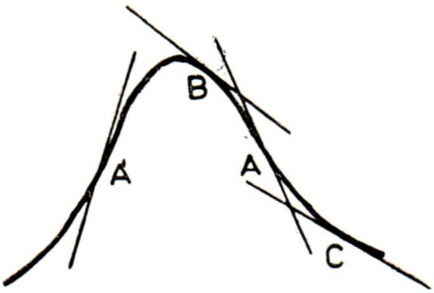
$$x = 1 \text{ iken } y = y_0 \,.\, e^{-\frac{1}{7,5}} \text{ den } \log y = \log y_0 - \frac{1}{7,5} \log e$$

$$0,43\,429/7,5$$
$$0,05\,791$$

$$\begin{array}{r} \bar{1},31\,389 \\ -\ 0,05\,791 \\ \hline \end{array}$$

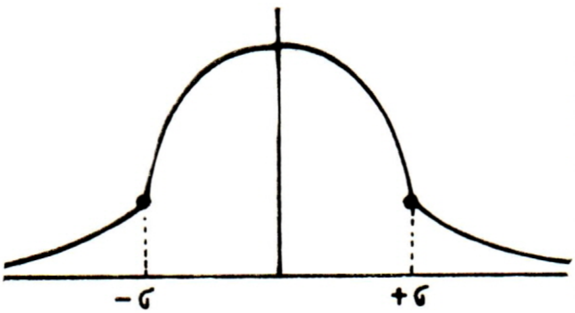
$$\log\ y = \bar{1},25\,598$$
$$y = 0,180\,30$$

2.5 GAUSS EĞRİSİNİN DÖNÜM NOKTALARI — STANDART AYRILIŞ



Şekil 2.4

Matematikte, bir eğri üzerinde, dönüm noktası deyince, eğrinin bir S harfi biçimi gösterdiği yeri yada yerleri anlıyoruz. Şekildeki Gauss eğrisinde, A ve A′ noktaları birer dönüm noktalarıdır. Öyle ki bu noktalarda, eğriye bir teğet çizilse, bu teğet, bu noktada eğrinin solundan - sağına (A da), yada aksi tarafa (A′ de) geçer. Oysa eğrinin başka hiç bır noktası bu özelliğe sahip değildir. Örneğin bir B ve C noktalarında, teğet, eğrinin yalnız bir tarafında kalıyor.



Şekil 2.5

İkinci şekildeki Gauss eğrisiyse, dönüm noktaları yakınlarının biçim ve durumlarını iyice belirtmek amacıyla, kasten hatalı çizilmiştir. Fakat bu şekilden, dönüm noktalarının yerleri ve konumları açıkça görülmektedir.

İşte Gauss eğrisinde, bu dönüm noktalarının koordinatları 2.2 de hesaplandığı üzere,

$$\begin{cases} x = \mp \sigma \\ y_\sigma = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} = \dfrac{1}{4{,}1327\,.\,\sigma} = \dfrac{0{,}24197}{\sigma} \end{cases} \quad \text{dır.}$$

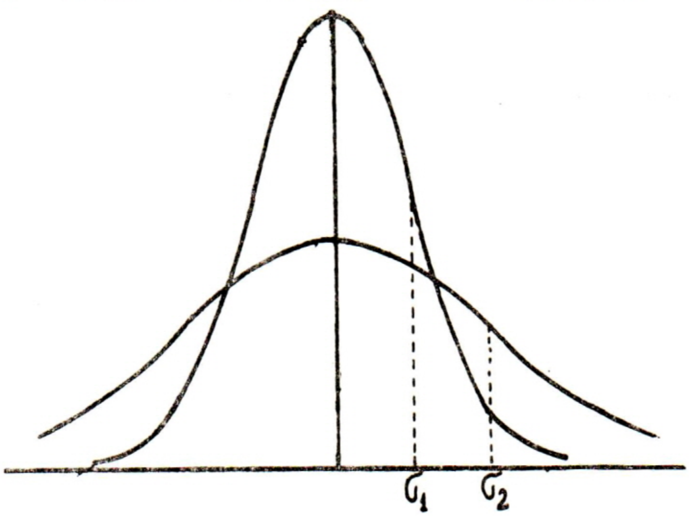
Yine bu ikinci şekle bakıldığı zaman, dönüm noktalarının (dolayısıyla standart ayrılış denilen σ nın) ödev ve önemi de açıkça görülebilmektedir. Eğrinin $\mp\sigma$ lar arası bölümü, sanki içinde bulunan bir takım şeyleri (yada elemanları) kucaklarmış gibi görünmektedir. σ lar dışı alanlar ise, üvey evlât muamelesi görüyor gibidir.

İşte bu görünüş te, bize, σ nın, matematik - istatistikte, pek önemli bir ölçü, bir ölçek olduğunu, olabileceğini göstermektedir.

Nitekim $x = \mp\sigma$ nın ordinatı olan $y_\sigma = \dfrac{0{,}24197}{\sigma}$, σ ile ters orantılıdır. Buna göre örneğin, $\sigma = \mp 1$ alınsa, $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cong 0{,}4$ ve $y_\sigma = 0{,}24197$ (yaklaşık 0,24) olur. $\sigma = \mp 2$ alınırsa (şekil 2.6) $y_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cong 0{,}2$ ve $y_\sigma = \dfrac{0{,}24}{2} = 0{,}12$ olur. Yani σ büyüdükçe, ordinatlar küçülmektedir. Bu durumda eğri de basıklaşmakta ve genişlemektedir.

Böylece σ, Gauss eğrisinin sivrilik - darlık ve basıklık - genişlik (ya da yayılma) özelliğini belirten bir ölçü de olmaktadır.

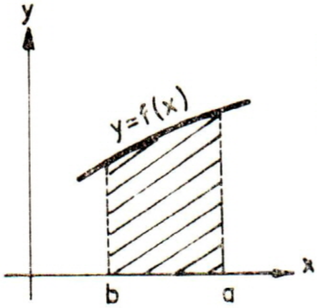
İşte bu özelliklerinden dolayı, σ miktarına, standard ayrılış denmekte olup matematik - istatistikte çok kullanılmaktadır.



Şekil 2.6

2.6 GAUSS EĞRİSİNİN ALANI : TAM ALAN

Gauss eğrisiyle, x ekseni arasında kalan alanın hesabı.



Şekil 2.7

İntegral hesapta, görüldüğü gibi, bir $y = f(x)$ eğrisiyle x ekseni arasında kalan kısmının, $x = a$ dan $x = b$ ye kadar olan parçasının alanı,

$$A = \int_b^a y \, dx$$

dir. Buna göre Gauss eğrisi alanı da,

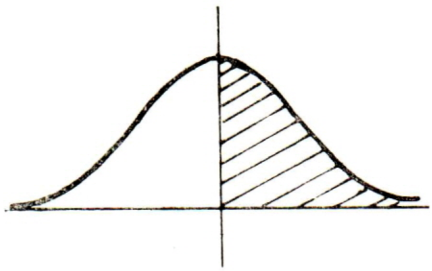
$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

yada yarı alanın iki katı olarak alan (Şekil 2.8),

$$A = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

şeklinde bulunabilir.



Şekil 2.8

Burada, hesabı kolaylaştırmak bakımından,

$$\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} = z \quad \text{koyarsak} \quad \left(\frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} = dz \quad \text{olacağından}\right),$$

$$A = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z} \cdot \sigma\sqrt{2}\, dz = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma\sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-z} \, dz$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz \qquad \text{I}$$

olur.

Bu ifadenin, doğrudan doğruya integrali alınamamaktadır. Bu nedenle birtakım dolaylı yolları izlemek suretiyle integre etmeğe çalışacağız :

$y = e^{-x^2}$ nin türevini alırsak ($-x^2 = v$ diyelim. Buradan $-2x \, . \, dx = dv$ olacağından,

$y = e^{-x^2} = e^v$ olur. Bunun türeviyse)

$y' = e^v \, . \, \frac{dv}{dx}$ dir. Eşitlerini yerlerine koymakla, türev,

$$y' = e^{-x^2} \, . \, (-2x) = -2x \, . \, e^{-x^2}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde,

$y = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$ nin türeviyse $y' = x \, . \, e^{-x^2}$

şeklindedir. Buna göre de,

$$\int x \, . \, e^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \qquad \text{II}$$

yazılabilir.

İntegral alabilmek için, yukarıdaki (I deki) ifadeyi de, buna benzetmek gerekir. Bunun için, I de,

$z = a\,t$ koyalım ($dz = a \, . \, dt$ olur ve)

$$A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2} \, . \, a \, dt \qquad \text{III}$$

olacaktır (Burada a sabit bir sayı, t değişkendir).

Ancak, bu ifadenin II ye benzediği söylenemez (Benzemesi için $a \, . \, da$ yada $t \, . \, dt$ olması gerekirdi).

Şimdi, I e göre (a yı değişken olarak düşünürsek),

$$A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-a^2} \, da \qquad \text{IV}$$

yazılabilir.

IV ile III ü çarpalım. Bu halde,

$$A \cdot A = A^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-a^2}\, da \;X\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2} \cdot a\, dt$$

olur. Bu da çok katlı integraller olarak,

$$A^2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2} \cdot e^{-a^2 t^2} \cdot a\, da\, dt$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 - a^2 t^2} \cdot a\, da\, dt$$

$$A^2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 (1+t^2)} \cdot a\, da\, dt$$

$$A^2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-a^2 (1+t^2)} \cdot a\, da \right) dt$$

olacaktır.

Diğer taraftan, II ye göre,

$$\int x \cdot e^{-x^2 (1+t^2)} \cdot dx = \frac{1}{2\,(1+t^2)} \cdot e^{-x^2 (1+t^2)}$$

yazılabilir. Böyle olduğunu, eşitliğin sağ tarafının türevini alarak gerçekleyebiliriz.

x yerine a almak suretiyle, yerine koyarsak,

$$A^2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \left| - \frac{1}{2\,(1+t^2)} \cdot e^{-a^2 (1+t^2)} \right|_{a=0}^{a=+\infty} \cdot dt$$

olur. Bu ifade de,

$a = +\infty$ koyarsak $e^{-\infty} = 1 / e^{\infty} = 1 / \infty = 0$ ve

$a = 0$ » $e^{-0} = 1 / e^{0} = 1$

olacağından,

$$A^2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[0 - (-\frac{1}{2(1+t^2)})\right]dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2(1+t^2)} \, . \, dt$$

$$A^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2} \, . \, dt$$

olacaktır.

Bu ifadenin integralini, herhangi bir yüksek matematik kitabında arayacak olursak,

$$y = \text{arc tg } x \quad \text{ın türevi} \quad y' = \frac{1}{1+x^2} \text{ , yada}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, . \, dx = \text{arc tg } x$$

olarak buluruz. Öyleyse,

$$A^2 = \frac{2}{\pi}\left|\text{arc tg } t\right|_0^{+\infty}$$

$$A^2 = \frac{2}{\pi}\left[\text{arc tg } (+\infty) - \text{arc tg } 0\right]$$

olacaktır.

Burada,

$$\text{tg } \frac{\pi}{2} = \text{tg } 90^\circ = +\infty \quad \text{ve} \quad \text{tg } 0^\circ = 0$$

oldukları hatırlanmalıdır. Diğer taraftan, ters trigonometrik fonksiyonların tanımına göre,

$$y = \text{tg } x \quad \text{ise} \quad x = \text{arc tg } y$$

dir. Buna göre de,

$$\text{tg } \frac{\pi}{2} = +\infty \quad \text{dan arc tg } (+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{tg } 0^\circ = 0 \quad \text{» arc tg } 0 = 0^\circ$$

olacağından,

$$A^2 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

ve buradan da,

$$A = 1$$

elde edilir.

Sonuç : Gauss eğrisiyle x ekseni arasında kalan bütün alan 1 e eşittir.

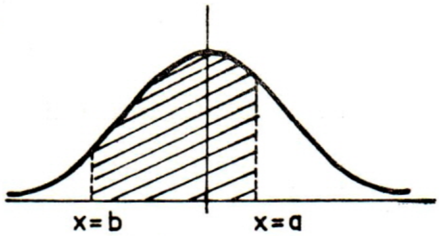
2.7 GAUSS EĞRİSİ ALANI : PARÇA ALAN

Gauss eğrisinin bir bölümünün alanının hesaplanması.

Bunun için ayrı bir yöntem kullanacağız.

İntegral hesapta, alan formülü,

$$A = \int_b^a y \, dx$$



Şekil : 2.9

idi. Bu formüle uygulayabilmek için, Gauss fonksiyonunun integralini alalım :

$$A = \int_b^a \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_b^a e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Burada, hesabı kolaylaştırmak bakımından,

$$\frac{x}{\sigma} = u \quad \text{dersek} \quad \left(\frac{dx}{\sigma} = du \quad \text{olacağından}\right),$$

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_b^a e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \sigma \, du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma \int_b^a e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^a e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad \text{(formül 10)}$$

olur. Şekildeki taranmış alan.

Bu formüle, standard normal dağılım formülü de denir.

Diğer taraftan, Mac Laurin'e göre, e^x in açınımı,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

dir. Buna göre, $x = -\dfrac{u^2}{2}$ yazmakla,

$$e^{-\frac{u^2}{2}} = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2^2 . 2!} - \frac{u^6}{2^3 . 3!} + \frac{u^8}{2^4 . 4!} - \frac{u^{10}}{2^5 . 5!} + \ldots$$

olur. Her iki tarafın integralini alırsak,

$$\int e^{-\frac{u^2}{2}} du = u - \frac{u^3}{3.2} + \frac{u^5}{5.2^2.2!} - \frac{u^7}{7.2^3.3!} + \frac{u^9}{9.2^4 4!} - \frac{u^{11}}{11.2^5.5!} + \ldots$$

ve her iki tarafı $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ile çarpmakla, alan,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^a e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(u - \frac{u^3}{3.2} + \frac{u^5}{5.2^2.2!} - \frac{u^7}{7.2^3.3!} + \frac{u^9}{9.2^4.4!} - \frac{u^{11}}{11.2^5.5!} + \ldots\right.$$

olarak elde edilir (Formül 11).

Bu formülle, örneğin,

$\mp \sigma$ lar arası alan icin : $x = \sigma \longrightarrow u = \dfrac{x}{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sigma} = 1$

$\mp 2\sigma$ lar arası alan için : $x = 2\sigma \longrightarrow u = \dfrac{x}{\sigma} = \dfrac{2\sigma}{\sigma} = 2$

vs. alınarak hesaplamalar yapılabilir.

Örnek

$\mp \sigma$ lar arası alan hesabı.

Bunun için $x = \sigma \longrightarrow u = \dfrac{x}{\sigma} = 1$

olarak alınacaktır.

Kolaylığı bakımından, $a = \sigma$, $b = 0$ olarak alıp, yarı alanın iki katı olarak, alanı,

$$A = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

ya göre hesaplayalılm :

$$+ u \qquad = +1$$

$$-\frac{u^3}{3.2} = -\frac{1}{6} \qquad = -0{,}166\,666\,7$$

$$+\frac{u^5}{5.2^2.2!} = +\frac{1}{40} = \qquad = +0{,}025$$

$$-\frac{u^7}{7.2^3.3!} = -\frac{1}{336} \qquad = -0{,}002\,976\,2$$

$$+\frac{u^9}{9.2^4.4!} = +\frac{1}{3\,456} \qquad = +0{,}000\,289\,4$$

$$-\frac{u^{11}}{11.2^5.5!} = -\frac{1}{42\,240} \qquad = -0{,}000\,023\,7$$

$$+\frac{u^{13}}{13.2^6.6!} = +\frac{1}{599\,040} \qquad = +0{,}000\,001\,7$$

$$-\frac{u^{15}}{15.2^7.7!} = -\frac{1}{9\,676\,800} \qquad = -0{,}000\,000\,1$$

+ lar	— ler
1	0,166 666 7
0,025	0,002 976 2
0,000 289 4	0,000 023 7
+ 0,000 001 7	+ 0,000 000 1
1,025 291 1	0,169 666 7
— 0,169 666 7	
0,855 624 = u lar toplamı	

Diğer taraftan, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}398\,942$ ve $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}797\,884$ olduğundan, bu ikisinin çarpımıyla alan,

$$A = 0{,}797\,884 \,.\, 0{,}855\,624$$

$$A = 0{,}68\,269$$

olarak bulunur.

Bütün alanın 1 olduğu nedeniyle, bu, $\mp \sigma$ lar arası alan, bütün alanın,

$$\%\ 68{,}27$$

si kadardır.

Benzer hesaplamalarla, $\mp 2\sigma$ lar arası alan, bütün alanın, % 95,46 sı, $\mp 3\sigma$ lar arası alan % 99,73 ü olarak bulunur.

Bu parça alanların, matematik - istatistikte büyük önem taşımaları nedeniyle, her elemanter kitapta, parça alanları, bir tablo halinde yer alır.

Hatırlatma

$\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} = z$ koyarak (buradan $\frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} = dz$ olur.),

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int e^{-z^2} \,.\, \sigma\sqrt{2}\ dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-z^2}\ dz$$

şeklinde, daha basit bir alan formülü elde etme olanağı varsa da, bu formül, parça alan hesaplanmasında, bir takım hesaplama güçlükleri doğurmakta ve bu nedenle kullanılmamaktadır.

L İ T E R T Ü R

1. *Sayman, Hüsnü Hamit* - Tatbiki Yüksek Matematik. İstanbul, 1947.
2. *Granville, W.A., Smith, P.F.* - Longley W.R. Diferansiyel ve İntegral Hesap. İstanbul, 1954.
3. *Prodan, Prof. Dr. Michail., Çe.: Kalıpsız, Doç. Dr. Abdülkadir* - Ormancılar İçin Biyometri. İstanbul, 1964.
4. *Arkın, Herbert., Colton, Raymond R., Çev.: Kendir, Doç. Dr. Saim* - Ekonomi, İşletmecilik, Psikoloji, Eğitim ve Biyolojiye Uygulanan İstatistik Metodları. Ankara, 1968.
5. Arslantürk, Mehmet. Cebir, Lise III. İstanbul, 1967.