SERİ
SERIE B

CİLT
TOME XXVI

SAYI
FASCICULE 2 1976

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ

ORMAN FAKÜLTESİ

DERGİSİ

**REVUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES FORESTIERES
DE L'UNIVERSITÉ D'ISTANBUL**

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ ORMAN FAKÜLTESİ

GAUSS'UN EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ VE ORMANCILIKTA KULLANILAN BAZI EĞRİLERE UYGULANMASI ÜZERİNE BİR DENEME

Yazan

A. Necati AKGÜR

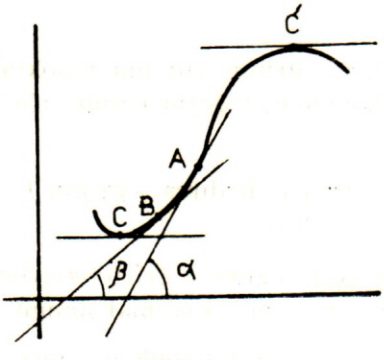
GİRİŞ

İstatistik Yöntemler'de, regresyon eğrisi, trend hesabı, dengeleme (tevzin), ajüstman gibi değişik deyimlerle anlatılmasına çalışılan; bir çok noktalar arasından, uygun şekilde bir eğri geçirilmesi işlemi, Gauss' un En Küçük Kareler Yöntemi'yle yapılmaktadır.

Biz bu incelememizde, söz konusu yöntemin içeriğini ve örnekleriyle uygulamadaki yerini belirtmeye çalışacağız.

TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

Bir $f(x)$ fonksiyon eğrisinin herhangi bir A noktasındaki türevinin, eğrinin o noktadaki teğetinin eğimini verdiği bilinir. Şekil 1.



Şekil 1

Yayın Komisyonuna Sunulduğu Tarih : 4.2.1977

Örneğin şekil 2 deki,

$$y = 2 + 1{,}8\,x + 0{,}3\,x^2$$

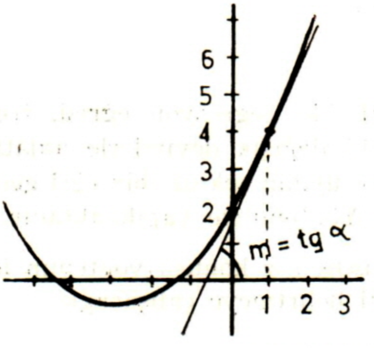
parabol eğrisinin, $x = 1$ noktasındaki teğetinin eğimi,

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1{,}8 + 0{,}6\,x$$

de $x = 1$ koymakla bulunan,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = m = 2{,}4$$

değeridir.



Şekil 2

Şimdi bu teğeti, eğri üzerinde aşağı doğru kaydıralım. Böylece B noktasındaki teğetin eğimi, tg β ilkinden daha küçük bir değere sahip olacaktır. Şekil 1.

Limit durumda teğet, eğrinin minimum noktası olan C noktasında eğriye teğettir ve bu konumda teğetin eğimi sıfır'dır. Teğet x eksenine paraleldir.

Teğet yukarıya doğru kaydırılırsa, eğrinin C′ maksimum noktasında, yine aynı sonuç elde edilir.

Demek oluyor ki teğetin eğimi (eğri fonksiyonunun türevi) sıfır olduğu zaman, eğri bir minimum yada maksimum noktasına sahiptir.

Buna göre bir eğrinin (yada bir fonksiyonun), minimum - maksimum noktalarını bulmak için (1. S. 77):

1) Fonksiyonun türevi alınacak,

2) Bu türev sıfır'a eşitlenecek.

3) Elde edilen denklem çözülerek, minimum - maksimum noktalarının x değerleri bulunacak,

4) Bulunan bu x değerleri ,asıl fonksiyon denkleminde yerine konularak minimum - maksimum noktalarının y değerleri bulunacaktır.

x ve y değerleri elde edilen bu minimum yada maksimum noktalarının minimum mu, yoksa maksimum mu olduklarını anlamak içinse,

4') Türevin tekrar türevi yani fonksiyonun ikinci türevi alınır.

4") x değeri bu ikinci türevde yerine konur. Sonuç pozitifse değer minimum, negatifse maksimumdur.

Bu işlemleri örneğimizde uygularsak :

$$y=2+1{,}8\,x+0{,}3\,x^2$$

1) $y'=1{,}8+0{,}6\,x$

2) $1{,}8+0{,}6\,x=0$

3) $0{,}6\,x=-1{,}8$

$$x=-\frac{1{,}8}{0{,}6}=-\frac{18}{6}=-3$$ (Min. - max. noktasının x değeri)

4) $y=2+1{,}8\,.\,(-3)+0{,}3\,.\,(-3)^2$

$y=-0{,}7$ (Min - max. noktasının y değeri)

4') $y''=0{,}6$

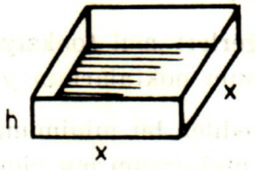
4") İkinci türev x i içersinde bulundurmamaktadır. Ancak pozitiftir; ohalde nokta minimumdur.

Böylece şekil 2 deki eğrinin minimum noktasının koordinatları, $x=-3$; $y=-0{,}7$ olarak bulunmuş olmaktadır.

.BİR UYGULAMA ÖRNEĞİ

Şimdi konuyu daha da açıklığa kavuşturmak amacıyla, bu minimum (en küçük değer) - maksimum (en büyük değer) probleminin teknikteki uygulamalarından bir örnek alacağız :

108 dm^3 hacminde tahtadan bir kutu yapılmak isteniyor. Kutunun üstü açık ve tabanı bir kare olacaktır. Gereken malzemenin minimum olması için kutunun boyutları ne olmalıdır? (4. S. 63).



Şekil 3

Çözüm : Kutunun tabanının bir kenarına x dersek, yükseklik,

$$V = 108 = x^2 h \quad \text{dan} \quad h = \frac{108}{x^2}$$

olur. Buna göre gereken malzeme, yani kutunun alanı, taban alanı ile yan alanların toplamı olarak,

$$y = x^2 + 4\,xh = x^2 + 4\,x \cdot \frac{108}{x^2}$$

$$y = x^2 + \frac{432}{x}$$

olur.

Bu ifadenin minimum olması isteniyor. Yani,

$$y = x^2 + \frac{432}{x} = \min.$$

Fonksiyonun türevini alır, sıfır'a eşitler ve çözersek,

1, 2, 3)

$$y' = 2\,x - \frac{432}{x^2} = 0$$

$$2\,x = \frac{432}{x^2}$$

$$x^3 = 216$$

$$x = 6 \quad \text{dm.}$$

4) Bulunan bu $x=6$ değerini asıl fonksiyonda yerine koyarsak,

$$y=x^2+\frac{432}{x}$$

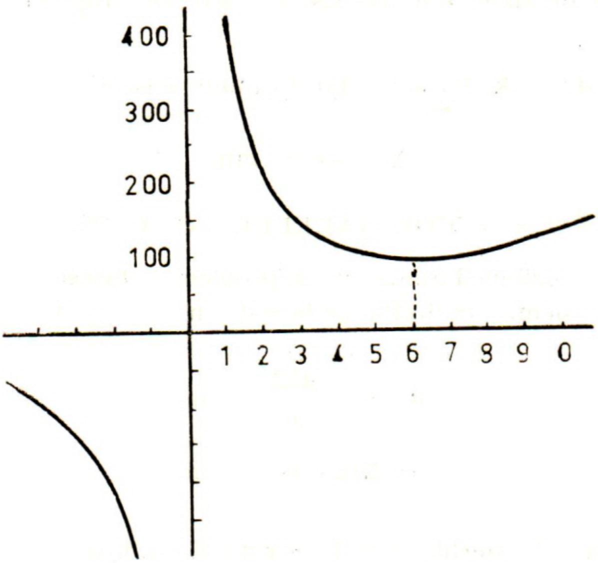
$$y=6^2+\frac{432}{6}=36+72=108 \text{ dm}^2$$

bulunur. Bu, gereken minimum malzemenin alanıdır.

Yükseklik ise,

$$h=\frac{V}{x^2}=\frac{108}{36}=3 \text{ dm} \quad \text{dir.}$$

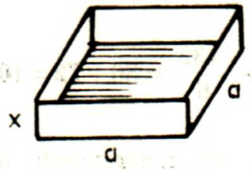
$y=x^2+\dfrac{432}{x}$ eğrisinin grafiğini çizecek olursak, şekil 4, gerçekten eğrinin $x=6$ noktasında bir minimumdan geçtiği açıkça görülür.



Şekil 4

Problem, yüksekliği x ile göstermek yoluyla da çözülebilir. Şekil 5.

Minimum - maksimum uygulamalarının ormancılık tekniğinde de görülmesi doğaldır. Örneğin Tokmanoğlu'nun «Bir tomruktan elde edilecek prizma hacminin maksimum olması için prizmanın boyutları ne olmalıdır? (Cevap: Kare prizma)» konulu incelemesi. (12 S. 86).



Şekil 5

ARITMETİK ORTALAMANIN ÖNEMLİ BİR ÖZELLİĞİ

İstatistik Yöntemler'den bilindiği üzere, aritmetik ortalamanın şu önemli özelliği vardır (11. S. 27):

Aritmetik ortalamadan ayrılışların cebrik toplamı sıfırdır.

Aritmetik ortalamadan ayrılışların kareleri toplamıysa minimum**dur.**

Özelliğin ikinci kısmı şöyle bir formülle gösterilebilir :

$$\Sigma(\bar{x}-x_i)^2=\text{min.}$$

GAUSS'UN EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

Daha önce çözümlediğimiz örnek problemin ifadesiyle, aritmetik ortalamanın bu önemli özelliğini ifadelendiren formülleri aynen yazalım:

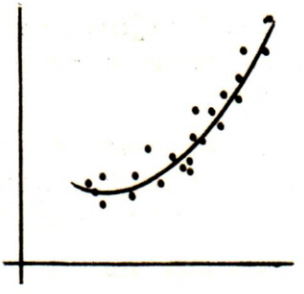
$$y=x^2+\frac{432}{x}=\text{min.}$$

$$y=\Sigma(\bar{x}-x_i)^2=\text{min.}$$

İşte aradaki benzerlik, bizi Gauss'un En küçük kareler yöntemine götürür. Buna göre her iki ifadede de türevler alınır, sıfır'a eşitlenir ve çözüm yapılırsa, minimum değerler elde edilmiş olur.

Newton (Sir Isaac, 1642 - 1727) ve Leibnitz (Gottfried Wilhelm, 1646 - 1717) in türev ve integral matematiğini buluşlarından sonra, matematik tarihine «Matematikçiler prensi» diye adı geçen büyük Alman matematikçisi Gauss (Carl Friedrich, 1777 - 1855), bugün de kendi adıyla anılan «En Küçük Kareler Yöntemi» nin buluşcusu olmuştur. (2. S. 213).

En küçük kareler yönteminde amaç şudur :



Şekil 6

Bir takım istatistik veriler elde edilmiş ve bunlar, teker teker. bir dik koordinatlar sistemine yerleştirilmiştir. Şekil 6. Noktaların aralarından uygun şekilde bir eğri geçirilerek olursa, bir doğru, bir parabol, bir hiperbol, bir üstel fonksiyon eğrisi vb. bir eğrinin ortaya çıkacağı görülmektedir. Deyelim noktaların gidişi, bunlar arasından bir parabol geçirilmesi için uygun düşmektedir. Parabolün denklemi

$$y = a + b\,x + c\,x^2$$

olduğuna göre,

Acaba bu parabolün denklemi (yani a, b ve c katsayıları) ne olmalıdır?

İşte Gauss'un En küçük kareler yöntemi bu soruya cevap vermektedir.

Yöntem, görüldüğü gibi,

Bu noktalar arasından acaba ne tip bir eğri, bir doğru mu, parabol yada hiperbol mü... geçirilmelidir? sorusuna doğrudan bir cevap vermez.

İlerde, uygulamalar sırasında görüleceği üzere, aynı bir noktalar sisteminden bir doğru, bir parabol, bir hiperbol, bir üstel fonksiyon eğrisi vb. geçirilebilmektedir.

Yöntem, hernekadar noktalar arasından hangi eğrinin geçirilmesinin uygun olacağı yada başka bir deyişle, noktalar arasından geçirilecek eğrinin seçiminin nasıl yapılacağı sorusuna bir cevap vermez ise de, bu soruyu cevaplayacak bir ölçü getirilmiştir.

Bir defa noktaların gidişi, bunların arasından geçirilecek ve bu gidişe uygun düşecek olan eğriyi az çok belli eder.

Sonra veriler, belirli tipten bir eğriyi gerektirecek durumda olabilir. Örneğin bir insanın, bitkinin, zaman içersinde boyca uzaması, S eğrisi tipinden bir eğriyi akla getirir.

Bu haller dışında ve özellikle noktaların dağılışının dağınık olduğu durumlarda kullanılacak ölçü, istatistik yöntemler'den ayrıntılarıyla tanıdığımız σ standart ayrılış ölçüsüdür. (9. S. 192).

İzlenecek yol şudur: Noktalar arasından önce bir doğru geçirilir. Sonra bu doğru denkleminden, her bir x_i değerine karşı gelen y değerleri yani düzeltilmiş değerler hesaplanır. Daha sonra,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (y_{\text{düz}} - y_i)^2}{n}}$$

formülüyle, σ bulunur.

Görüldüğü gibi burada tek bir ortalama değerden ayrılışlar değil, her noktanın y_i değerinin, kendine ait düzeltilmiş değerden ayrılış miktarları söz konusudur.

Böylelikle noktaların, doğru etrafındaki serpilme derecesi ölçülmüş olmaktadır.

Benzer işlem, parabol, hiperbol, üstel fonksiyon eğrisi vb. için de tekrarlanır.

Noktaların dağılışı, aralarından bir doğrunun değil de, daha çok bir eğrinin geçirilmesinin uygun olacağı izlenimini veriyorsa, bu halde doğru hesabına gerek duyulmaması doğaldır.

Böylece hangi eğriye ait σ değeri en küçük çıkarsa, noktalar arasından o eğrinin geçirilmesi uygun olur.

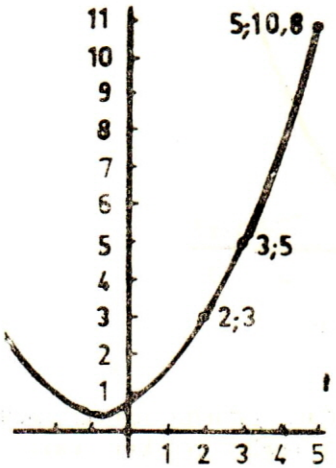
Örneğin (2;3), (5;5), (6;4), (7;6), (7;8), (9;11) noktalarının oluşturduğu ilk veri takımını ele alalım. (Uygulamalara bakınız). Bu noktalar arasından doğru, parabol, hiperboller, üstel fonksiyon,... eğrileri geçirilebilmektedir. Bazılarına ait σ değerlerini sıralarsak:

Doğru	1,335
Parabol	0,861
Üçüncü derece eğrisi	0,849
Düşey asimptotlu ikizkenar hiperbol	1,107
Üstel fonksiyon	0,995

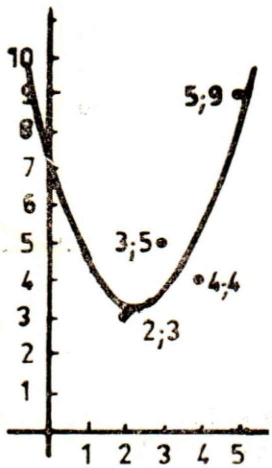
Bu eldelere göre, bu noktalar arasından geçirilecek en uygun eğri üçüncü derece eğrisi olmalıdır. Ve yine bu noktalar arasından, bir doğru geçirilmesinin hiç düşünülmemesi gerekir.

BİR TAKIM NOKTALARDAN BİR EĞRİ GEÇİRME İLE NOKTALAR ARASINDAN BİR EĞRİ GEÇİRME ARASINDAKİ AYRIM

Bir takım noktalardan bir eğri geçirme problemiyle, bir takım noktalar arasından bir eğri geçirme problemi arasında kesin bir ayrım vardır. Daha doğrusu bu ikisi, tamamen birbirinden ayrı şeylerdir ve aralarında hiç bir ilişki ve benzerlik yoktur.



Şekil 7



Şekil 8

Gerçekten (2;3), (3;5), (5;10,8) noktalarından, bir $y=a+bx+cx^2$ eğrisi geçirmek (şekil 7) ile, (2;3), (3;5), (4;4), (5;9) noktaları arasından bir $y=a+bx+cx^2$ eğrisi geçirmek (şekil 8) ayrı ayrı şeylerdir.

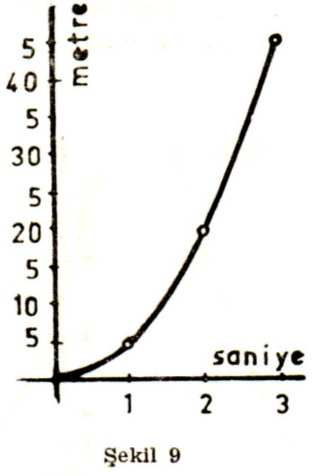
Birincide değerler rastgele alınmamıştır. Belli bir fizik yasaya uyarlar. Örneğin bir fizik deneyinin verileridir. Deney nekadar yinelenirse yinelensin, hep aynı veriler elde edilir.

Galile'nin, Piza'daki ünlü eğik kulede yaptığı serbest düşme deneylerinde, kuleden bırakılan cisimlerin 1 saniyede yaklaşık 5 m., 2 saniyede 20 m., 3 saniyede 45 m. düştükleri gözlemlenmiştir. Bu harekete ait fonksiyon denklemi,

$$h=5\ t^2=\frac{10}{2}\ t^2=\frac{1}{2}\ g\ t^2 \quad \text{yada,}$$

$$y=a\ x^2 \quad \textbf{dir. Şekil 9.}$$

Eğri mutlak bu noktalardan geçer.



Şekil 9

İkincideyse değerler, doğa koşulları, yetişme ortamı, beslenme eşitsizliği vb. nedenlerle değişen, rastgele verilerdir. Aynı yaşta iki insanın aynı kiloda ve boyda olamayacağı, bir ticaret evinin her ayki satışlarının birbirine eşit olamayacağı gibi. Bunlar istatistik verilerdir. Bu durumda eğrinin, noktaların kendinden değil, aralarından geçeceği kuşkusuzdur.

Eğri değerleri(ordinatlar), her nokta için, bir hata ile yüklüdür. Gauss'un En küçük kareler yöntemi'nin amacı da işte bu hatayı minimuma indirmektir.

Böyle bir kullanım olanağı, uygulama alanını istatistik yöntemlerde bulur.

Her iki tip eğri geçirme işleminde de yapılacak iş, bu noktalardan yada noktalar arasından, örneğin bir

$$y = a + bx + cx^2$$

eğrisi geçirilmesi isteniyor ise, a, b ve c katsayılarını hesaplamaktan ibarettir.

Ancak hesaplama teknikleri farklıdır.

Asıl konumuz olan ikinci tipe yani noktalar arasından uygun bir eğri geçirme yada başka bir deyişle Gauss'un En küçük kareler yöntemi uygulamasına geçmeden önce, birinci tip hesaplamayı (belli noktalardan eğri geçirme) bir uygulama ile belirleyelim.

Problem: (2;3), (3,5), (5;10,8) noktalarından bir $y = a + bx + cx^2$ parabol eğrisi geçirmek.

Çözüm: Eğri denkleminde, bir defa $x = 2$, $y = 3$; ikincide $x = 3$, $y = 5$ ve üçüncü olarak $x = 5$; $y = 10{,}8$ koymakla, aşağıdaki üç denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} 3 &= a + 2\,b + 4\,c \\ 5 &= a + 3\,b + 9\,c \\ 10{,}8 &= a + 5\,b + 25\,c \end{aligned}$$

Yapılacak iş, bu birinci dereceden, üç bilinmeyenli - üçlü denklem sistemini çözmektir. Bunun için, örneğin birinciden a değeri bulunup, ikinci ve üçüncüde yerlerine konur ve sadeleştirilirse,

$$\begin{array}{ll} \text{I den} & a = 3 - 2\,b - 4\,c \\ \text{II ye} & 5 = 3 - 2\,b - 4\,c + 3\,b + 9\,c \\ \text{III e} & 10{,}8 = 3 - 2\,b - 4\,c + 5\,b + 25\,c \\ \hline & 2 = b + 5\,c \\ & 2{,}6 = b + 7\,c \end{array}$$

iki bilinmeyenli - ikili bir denklem sistemi elde edilir. Bu da katsayıların eşitlenmesi yoluyla çözümlenirse,

$$\begin{array}{rl} \mp 2 = & \mp b \mp 5c \\ 2{,}6 = & b + 7c \\ \hline 0{,}6 = & 2c \\ c = & 0{,}3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 14 = & 7b + 35c \\ \mp 13 = & \mp 5b \mp 35c \\ \hline 1 = & 2b \\ b = & 0{,}5 \end{array}$$

bulunur. Bu iki değer, a nın ilk elde edilen değerinde yerine konulmakla,

$$a = 3 - 2 \,.\, 0{,}5 - 4 \,.\, 0{,}3$$

$$a = 0{,}8$$

olur.

Bu üç değerin yerlerine konulmasıyla da, aranan denklem,

$$y = 0{,}8 + 0{,}5\,x + 0{,}3\,x^2$$

olarak elde edilmiş olur.

İkinci problem olan, noktalar arasından $y = a + bx + cx^2$ parabolünü yada noktaların konum ve gidişine en uygun düşen başka bir eğri geçirme işiyse, bu incelemenin asıl konusunu oluşturmaktadır. İlerde ayrıntılarıyla görülecektir.

ORMANCILIKTA EN ÇOK KARŞILAŞILAN BAZI EĞRİ FONKSİYONLARI

Ormancılık uygulamalarında çokça karşılaşılan bellibaşlı eğri fonksiyonları aşağıda verilmiştir. Biz, incelememizde bu sıraya uyacağız.

1. $y = a + bx$ Doğru
2. $y = a + bx + cx^2$ Normal parabol
3. $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ Üçüncü derece eğrisi

İkizkenar hiperboller :

4. $y - a = \dfrac{c}{x}$ yada $yx = a\,x + c$ Yatay asimptotlu
5. $y = \dfrac{c}{x - b}$ » $yx = b\,y + c$ Düşey »
6. $y - a = \dfrac{c}{x - b}$ » $yx = a\,x + b\,y + c'$ yahutta $y = \dfrac{a\,x + c''}{x - b}$ Yatay-düşey asimptotlu

Hiperboller :

7. $y = \frac{c}{x} + a + dx$ yada $yx = ax + c + dx^2$

8. $y = \frac{dx^2 + c}{x - b}$ » $yx = by + c + dx^2$

9. $y = \frac{dx^2 + a\,x + c}{x - b}$ » $yx = a\,x + by + c + dx^2$

Üstel ve logaritmik fonksiyonlar :

10. $y = k\,e^{\mp tx}$ yada $y = e^{a \mp bx}$ Üstel fonksiyon

11. $y = e^{a + bx + cx^2}$ Üstel fonksiyon

12. $y = a\,x^b$ Üstlü fonksiyon

13. $z = a\,x^b\,y^c$ İki değişkenli üstlü fonksiyon

14. $y = \log a\,x^b$ Logaritma fonksiyonu

Lojistik yada S eğrisi ve benzerleri:

15. $y = \frac{y_{max.}}{1 + a\,e^{-bx}}$ Lojistik yada S eğrisi

16. $y = \frac{x^2}{a + b\,x + c\,x^2} + k$ yada $y = \frac{a' + b'\,x + c'x^2}{a + b\,x + c\,x^2}$

17. $y = y_{max.}\,(1 - a\,e^{-bx})^n$ S eğrisi benzerleri

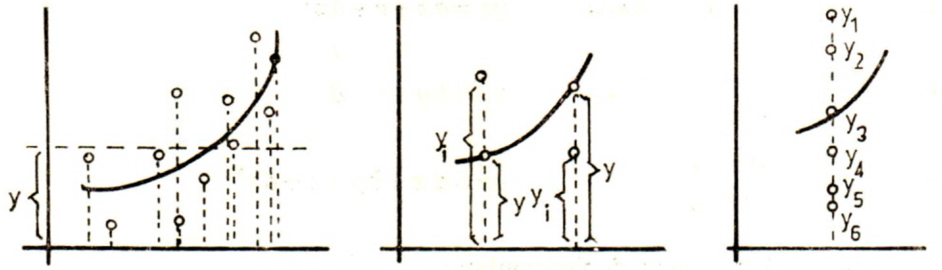
GAUSS'UN EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ UYGULAMALARI

Yöntem bir ve tektir. Ancak doğru, parabol, hiperbol, üstel fonksiyon vb. için bir tek denklem vermek olanaksızlığı dolayısıyla, herbiri için ayrı ayrı hesaplamalar gerekir.

Biz bu incelememizde ele aldığımız çoğu örneklerde, mümkün olan haller için, karşılaştırma olanağı vermesi bakımından aynı verilerle çalışmayı uygun bulduk. Ayrıca bir yükselen, bir de alçalan eğri durumlarını da belirtebilmek amacıyla, herbirinden ikişer örnek aldık.

Hesaplamalar için hesap makinası kullanılmıştır.

GENEL UYGULAMA



Şekil 10

Noktalar arasından geçirilecek eğrinin denklemi $y=f(x)$ olsun. Noktalar, bu eğrinin üstünde yada altında yer almışlardır. Herbir noktanın gerçek ordinatı y_i ve eğri geçirildikten sonra alacağı yeni değeri y ile gösterelim. Noktaların gerçek y_i değerlerinin aritmetik ortalamasıysa $\bar{y}$ olsun. Şekil 10 *a* ve *b*.

Aritmetik ortalamanın, daha önce sözü edilen, önemli özelliği şuydu :

Bireylerin aritmetik ortalamadan ayrılışlarının kareleri toplamı minimumdur. Buna göre noktalar, aritmetik ortalamanın üstünde yada altında olduğuna göre,

$$\Sigma (y_i-\bar{y})^2+\Sigma(\bar{y}-y_i)^2=\min.$$

yazılabilir. Oysa,

$$\Sigma (y_i-\bar{y})^2=\Sigma[-(\bar{y}-y_i)]^2=\Sigma(\bar{y}-y_i)^2$$

olduğundan, hepsinin toplamını ifade etmek üzere,

$$\Sigma(\bar{y}-y_i)^2=\min.$$

yazılabilir.

Şimdi her bir ordinat çizgisi üzerinde, çok sayıda nokta bulunduğunu düşünürsek, bu değerlerin aritmetik ortalaması, eğri değerine pek yaklaşık bir değer olarak ortaya çıkar. Limit durumda ise, artık aritmetik ortalamanın, eğri değeriyle çakışacağı düşünülebilir. Şekil c. Bu durumda, minimum olması gereken ifade,

$$\Sigma (y - y_i)^2 = \text{min.}$$

şeklini alır.

Artık Gauss'un En küçük kareler yöntemini, her bir örnek için, bu genel ifade üzerine uygulayabiliriz.

1. DOĞRU GEÇİRME

Doğru denklemi $y = a + b\,x$ dir.

Absis değerleri x_i olan noktaların, ölçülen yada gerçek ordinat değerleri y_i, doğru denklemine göre bulunacak değerleriyse,

$$y = a + b\,x_i$$

dir.

Bu değerler, Gauss'un En küçük kareler yöntemi formülünde yerine konursa,

$$\Sigma (y - y_i)^2 = \text{min.} \qquad \text{yada}$$

$$\Sigma (a + b\,x_i - y_i)^2 = \text{min.} \quad \text{olur.}$$

Bu ifadenin türevi alınıp, sıfır'a eşitlenecektir. Ancak burada x_i ve y_i bilinen veriler; a ve b ise bilinmeyenler olduğu için, ifadenin a ve b ye göre parça türevleri alınacaktır. (Kolaylık olsun diye x_i yerine x ; y_i yerine y yazarak),

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta a} = 2\,\Sigma (a + b\,x - y) \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta b} = 2\,\Sigma (a + b\,x - y) \cdot x = 0$$

ve buradan,

$$a \cdot n + b \cdot \Sigma x = \Sigma y$$

$$a \cdot \Sigma x + b \cdot \Sigma x^2 = \Sigma xy$$

olarak birinci dereceden, iki bilinmeyenli ve ikili bir denklem sistemi elde edilmiş olur.

Birinci veri takımına uygulama:

Veriler

x	y	x^2	$x\,y$
2	3	4	6
5	5	25	25
6	4	36	24
7	6	49	42
7	8	49	56
9	11	81	99
36	37	244	252
Σx	Σy	Σx^2	$\Sigma x\,y$

$$\begin{array}{rcl} 6a + 36b &=& 37 \\ 36a + 244b &=& 252 \\ \hline 6a + 36b &=& 37 \\ 9a + 61b &=& 63 \\ \hline \mp 54a \mp 324b &=& \mp 333 \\ 54a + 366b &=& 378 \\ \hline 42b &=& 45 \end{array}$$

$$b = \frac{45}{42} \cong 1{,}071$$

$$\begin{array}{rcl} 366a + 2\,196b &=& 2\,257 \\ \mp\ 324a \mp 2\,196b &=& \mp 2\,268 \\ \hline 42a &=& -\ 11 \end{array}$$

$$a = -\frac{11}{42} \cong -0{,}262$$

Bu birinci dereceden, iki bilinmiyenli - ikili denklem sistemini çözmeden önce, eğer varsa, sadeleştirme yapılmalıdır. Nitekim burada, ikinci denklem 4 ile sadeleştirilebil r. Bu sadeleştirme, hesaplamalarda daha küçük sayılarla işlem yapılacağı nedeniyle, çözüme bir kolaylık getirir.

Çözüm, en kolay şekilde, katsayıların eşitlenerek birbirini götürmeleri yöntemi kullanılarak yapılır.

Böylece ilk denklem 9; ikinci 6 ile genişletilerek a lar; ilk denklem 61, ikinci 36 ile genişletilerek b ler eşitlenirse,

bulunur.

Ç ö z ü m ü n kontrolü :

Çözümde herhangi bir yanlışlığa düşmemek yada sonucun güvenilirliğini sağlamak için, hesaplamanın kontrol edilmesi uygun olur. Bu kontrol, bulunan a ve b değerlerini, ilk denklem sisteminde yerine koymakla yapılır. Böylece,

$$6 \cdot \left(-\frac{11}{42}\right) + 36 \cdot \frac{45}{42} = \quad 37$$

$$36 \cdot \left(-\frac{11}{42}\right) + 244 \cdot \frac{45}{42} = \quad 552$$

$$\begin{array}{rrrr}
- & 66 & + \; 1\,620 = & 1\,554 \\
- & 396 & + \; 10\,980 = & 10\,584 \\
\hline
 & & 1\,554 = & 1\,554 \\
 & & 10\,584 = & 10\,584
\end{array}$$

sonuçlar eşit çıktığından hesaplama doğrudur.

D e n k l e m

Bulunan a ve b değerlerinin, doğru denkleminde yerlerine konulmasıyla denklem,

$$y = \frac{45\,x - 11}{42}$$

yada yaklaşık denklem,

$$y = 1{,}071\,x - 0{,}262$$

olarak elde edilir.

D ü z e l t i l m i ş d e ğ e r l e r

$x = 2$; 5 ; 6 ; 7 ; 9 değerlerinin, bulunan doğru denkleminde yerine konmasıyla hesaplanır. Böylece örneğin $x = 2$ için,

$$y = \frac{45\,x - 11}{42} = \frac{45 \cdot 2 - 11}{42} = \frac{79}{42} \cong 1{,}881$$

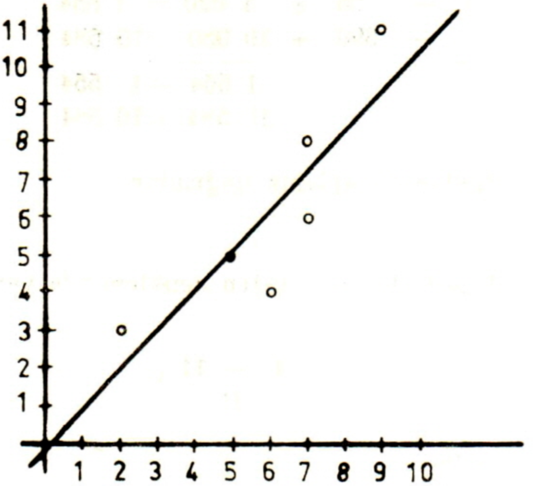
bulunur.

Bu yolla hesaplanan düzeltilmiş değerler aşağıdadır:

x	$y_{\text{düz.}}$
2	1,881
5	5,095
6	6,167
7	7,238
9	9,381

Doğrunun çizimi

Doğrunun çizimi için, herhangi iki noktasını, örneğin (2 ; 1,881), (9 ; 9,381) uç noktalarını yada (x=0 için y_{duz}= – 0,262); (x=10 için y_{duz}=10,448) gibi kolay hesaplanır noktalarını, grafik üzerinde belirleyip bir cetvelle birleştirmek yeterlidir. Şekil 11.



Şekil 11

σ nın hesabı

σ nın hesabı, sayfa 178 de işaret edildiği gibi, bu noktalar arasından geçirilecek olan doğru, parabol, hiperbol, vb. eğrilerinden hangisinin seçilmesinin uygun olacağını belirlemek amacıyla yapılır ve mutlaka yapılmalıdır.

Noktaların doğru boyunca serpilme ölçüsü olan σ, ordinat değerlerinin düzeltilmiş değerlerden ayrılışlarının, standart ayrılış formülüne göre değerlendirilmesi yoluyla elde edilir.

Birinci veri takımı doğrusuna ait hesaplama aşağıdadır:

x	y	$y_{\text{düz.}}$	$y_{\text{düz.}} - y$	$(y_{\text{düz.}} - y)^2$
2	3	1,881	— 1,119	1,252 161
5	5	5,095	+ 0,095	0,009 025
6	4	6,167	+ 2,167	4,695 889
7	6	7,238	+ 1,238	1,532 644
7	8	7,238	— 0,762	0,580 644
9	11	9,391	— 1,619	2,621 161
				10,691 524

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(y_{\text{düz.}} - y)^2}{n}} = \sqrt{\frac{10,691\,524}{6}} = \sqrt{1,781\,921} \cong 1,335$$

ÇÖZÜM KOLAYLIKLARI

1) Noktalar arasından, Gauss'un En küçük kareler yöntemi'yle bir doğru geçirme problemi, istatistik yöntemler uygulamasında çokça rastlanan bir kullanış alanı bulur. Bu bakımdan sorunu daha da pratik şekle getirebilmek amacıyla, iki bilinmeyenli denklem sistemini kurma ve çözme yükünden kurtulmak için, katsayılar çözülmüş olarak verilir. (10. S. 256).

Bunun için,

Birinci Σx, ikinci n ile genişletilmek yoluyla, a nın katsayıları eşitlenirse

$$\begin{array}{r} a\cdot n+b\cdot\Sigma x=\Sigma y \\ a\cdot\Sigma x+b\cdot\Sigma x^2=\Sigma xy \\ \hline \mp an\cdot\Sigma x\mp b\cdot(\Sigma x)^2=\mp\Sigma x\cdot\Sigma y \\ an\cdot\Sigma x+b\,n\cdot\Sigma x^2=n\cdot\Sigma xy \\ \hline b\cdot[n\cdot\Sigma x^2-(\Sigma x)^2]=n\cdot\Sigma xy-\Sigma x\cdot\Sigma y \end{array}$$

$$b=\frac{n\cdot\Sigma xy-\Sigma x\cdot\Sigma y}{n\cdot\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}$$

Birinci Σx^2, ikinci Σx ile genişletilmekle de b nin katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{array}{r} an\cdot\Sigma x^2+b\cdot\Sigma x\cdot\Sigma x^2=\Sigma y\cdot\Sigma x^2 \\ \mp a\cdot(\Sigma x)^2\mp b\cdot\Sigma x\cdot\Sigma x^2=\mp\Sigma xy.\Sigma x \\ \hline a\cdot[n\cdot\Sigma x^2-(\Sigma x)^2]=\Sigma y\cdot\Sigma x^2-\Sigma x\cdot\Sigma xy \end{array}$$

$$a=\frac{\Sigma y\cdot\Sigma x^2-\Sigma x\cdot\Sigma xy}{n\cdot\Sigma x^2-(\Sigma x^2)}$$

olarak bulunur.

Örnekteki verileri bu formüle uygulamakla,

$$b=\frac{6\cdot 252-36\cdot 37}{6\cdot 244-36^2}=\frac{1\,512-1\,332}{1\,464-1\,296}=\frac{180}{168}=\frac{45}{42}$$

$$a=\frac{37\cdot 244-36\cdot 252}{168}=\frac{9\,028-9\,072}{168}=\frac{-44}{168}=-\frac{11}{42}$$

elde edilir.

2) Determinantlar yoluyla çözüm

$$\begin{array}{l} \mathrm{A}\,.\,a+\mathrm{B}\,.\,b=\mathrm{C} \\ \mathrm{A}'.\,a+\mathrm{B}'.\,b=\mathrm{C}' \end{array}$$

şeklindeki iki bilinmeyenli - ikili bir denklem sisteminin determinantlar yoluyla çözümünde, a ve b kökleri şöyle hesaplanır (5. S. 137).

a nın hesabı :

$$\begin{matrix} B & C \\ B' & C' \end{matrix}$$

sayıları (a ya ait olan A ve A' ler hariç tutularak) çaprazlama çarpılmak suretiyle (önce sol-üst ile sağ-alt, sonra sol-alt ile sağ-üst) birbirinden çıkarılır ve pay'a yazılır.

$$\begin{matrix} A & B \\ A' & B' \end{matrix}$$

sayıları da, yine aynı sırayla çaprazlama çarpılarak farkları alınır ve payda'ya yazılır.

Elde edilen kesrin eksi işaretlisi a yı verir.

Bu işlem şöylece gösterilir :

$$a = -\frac{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} = -\frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}$$

Benzer şekilde b de,

$$b = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} = \frac{AC' - A'C}{AB' - A'B}$$

dir.

Gerçekten

$$\begin{aligned} A \cdot a + B \cdot b &= C \\ A' \cdot a + B' \cdot b &= C' \end{aligned}$$

denklemleri, katsayıların eşitlenmesi yoluyla çözümlenirse,

$$\begin{aligned} \mp AA' \cdot a \mp A'B \cdot b &= \mp A'C \\ AA' \cdot a + AB' \cdot b &= AC' \\ \hline (AB' - A'B)\, b &= AC' - A'C \\ b &= \frac{AC' - A'C}{AB' - A'B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB' \cdot a + BB' \cdot b &= B'C \\ \mp A'B \cdot a \mp BB' \cdot b &= \mp BC' \\ \hline (AB' - A'B)\, a &= B'C - BC' \\ a &= -\frac{BC' - B'C}{AB' - A'B} \end{aligned}$$

bulunur.

Örneğin çözümü :

$$a = -\frac{\begin{vmatrix} 36 & 37 \\ 244 & 252 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 36 \\ 36 & 244 \end{vmatrix}} = -\frac{36 \cdot 252 - 244 \cdot 37}{6 \cdot 244 - 36^2} = -\frac{9\,072 - 9\,028}{1\,464 \quad 1\,296} = -\frac{44}{168} = -\frac{11}{42}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 37 \\ 36 & 252 \end{vmatrix}}{\text{payda aynı}} = \frac{6 \cdot 252 - 36 \cdot 37}{168} = \frac{1\,512 - 1\,332}{168} = \frac{180}{168} = \frac{45}{42}$$

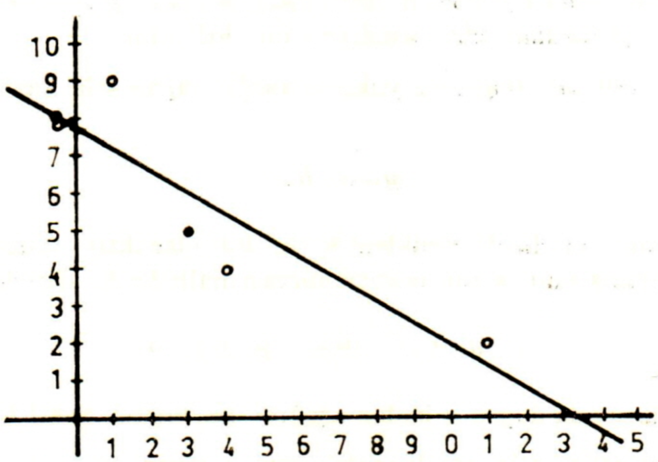
İkinci veri takımı,

x	y
1	9
3	5
4	4
11	2

için benzer hesaplamalar yapılırsa,

$$y = \frac{1\,762 - 132\,x}{227} \qquad (\sigma = 1{,}305)$$

bulunur. Şekil 12.



Şekil 12

DOĞRU DENKLEMİ ÜZERİNE

Eksenlerin kesim noktasından geçen bir doğrunun denklemi, bilindiği gibi,

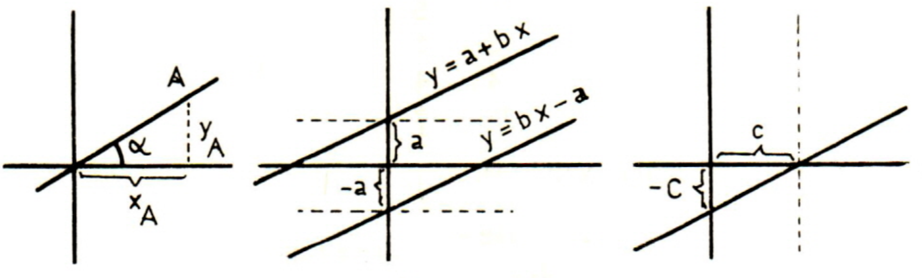
$$y = \mp b\, x$$

dir.

Burada b, doğrunun eğim derecesi (doğrunun x ekseniyle yaptığı açının tangenti) dir. Örneğin doğru üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları x_A ; y_A ise,

$$b = \frac{y_A}{x_A}$$

dır. Şekil 13 a.



Şekil 13

b pozitifse, doğru yükselen (sol - aşağıdan sağ - yukarıya), negatifse alçalan (sol - yukarıdan sağ - aşağıya) bir doğrudur.

a değişmezi ise, doğruyu yukarı - aşağı, sağa - sola kaydırır.

Örneğin,

$$y - a = b\, x$$

olması halinde (bu halde denklem $y = a + b\, x$ olacaktır), doğru a kadar yukarıya kaymış olur. a nın negatif olması halinde de, denklem

$$y + a = b\, x \qquad \text{den} \qquad y = b\, x - a$$

olur ki bu durumda doğru a kadar aşağıya kaymıştır. Şekil b.

Doğruyu sağa - sola kaydırmak içinse, x yerine $x - c$ yada $x + c$ alınacaktır. Bu halde,

$$y = b(x - c)$$

$$y = b\,x - b\,c$$

$$y = b\,x - C$$

olur ki, doğru C kadar aşağıya kaymıştır; buysa *c* kadar sağa kaymakla eş anlama gelir. Şekil c.

2. $y = a + b\,x + c\,x^2$ PARABOLÜ

$\Sigma\,(y - y_i)^2 = \min.$ **yada,**

$\Sigma\,(a + b\,x + c\,x^2 - y) = \min.$ yazılıp a, b ve c ye göre **parça türevleri alınarak sıfır'a eşitlenirse,**

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta a} = 2 \cdot \Sigma(a + b\,x + c\,x^2 - y) \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b} = 2 \cdot \Sigma(a + b\,x + c\,x^2 - y) \cdot x = 0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c} = 2 \cdot \Sigma(a + b\,x + c\,x^2 - y) \cdot x^2 = 0$$

ve buradan da,

$$a \cdot n + b \cdot \Sigma x + c \cdot \Sigma x^2 = \Sigma y$$

$$a \cdot \Sigma x + b \cdot \Sigma x^2 + c \cdot \Sigma x^3 = \Sigma xy$$

$$a \cdot \Sigma x^2 + b \cdot \Sigma x^3 + c \cdot \Sigma x^4 = \Sigma x^2 y$$

olarak, birinci dereceden, üç bilinmeyenli ve üçlü bir denklem sistemi elde edilmiş olur.

Birinci veri takımına uygulama :

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
2	3	4	8	16	6	12
5	5	25	125	625	25	125
6	4	36	216	1 296	24	144
7	6	49	343	2 401	42	294
7	8	49	343	2 401	56	392
9	11	81	729	6 561	99	891
36	37	244	1 764	13 300	252	1 858

$$\begin{array}{rrrr} 6a+ & 36b+ & 244c= & 37 \\ 36a+ & 244b+1 & 764c= & 252 \\ 244a+1 & 764b+13 & 300c=1 & 858 \\ \hline 6a+ & 36b+ & 244c= & 37 \\ 9a+ & 61b+ & 441c= & 63 \\ 122a+ & 882b+6 & 650c= & 929 \end{array}$$

Bu üç bilinmeyenli üçlü denklem sisteminin çözümü için (gereken sadeleştirmeler yapılıp), birinci denklemden a bulunur, ikinci ve üçüncüde yerlerine konur (ve sadeleştirilirse)

I dan $a=\dfrac{37-36\,b-244\,c}{6}$

II ye $9\cdot\dfrac{37-36\,b-244\,c}{6}+61\,b+441\,c=63$

III e $122\cdot\dfrac{37-36\,b-244\,c}{6}+882\,b+6\,650\,c=929$

$$3\cdot\frac{37-36\,b-244\,c}{2}+61\,b+441\,c=63$$

$$61\cdot\frac{37-36\,b-244\,c}{3}+882\,b+6\,650\,c=929$$

$$\begin{array}{l} 111-108\,b-732\,c+122\,b+882\,c=126 \\ 2\,257-2\,196\,b-14\,884\,c+2\,646\,b+19\,950\,c=2\,787 \\ \hline 14\,b+150\,c=15 \\ 450\,b+5\,066\,c=530 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 14\,b+150\,c & = & 15 \\ 225\,b+2\,533\,c & = & 265 \\ \hline \mp 3\,150\,b \mp 35\,750\,c & = & \mp 3\,375 \\ 3\,150\,b+35\,462\,c & = & 3\,710 \\ \hline 1\,712\,c & = & 335 \\ c & = & \dfrac{335}{1\,712}\cong 0{,}196 \end{array}$$

üçlü denklem sistemi, iki bilinmeyenli - ikili bir denklem sistemine indirgenmiş olur. Bu da tıpkı bir doğru denkleminde olduğu gibi, katsayıların eşitlenmesi yöntemiyle çözülür.

$$\begin{array}{rcr} 35\,462\,b+379\,950\,c & = & 37\,995 \\ \mp 33\,750\,b \mp 379\,950\,c & = & \mp 39\,750 \\ \hline 1\,712\,b & = & -\,1\,755 \end{array}$$

$$b=-\frac{1\,755}{1\,712}\cong -1{,}025$$

Bulunan bu değerlerin a da yerlerine konulmasıyla da a elde edilir :

$$a = \frac{37 + 36 \cdot \frac{1\,755}{1\,712} - 244 \cdot \frac{335}{1\,712}}{6} = \frac{63\,344 + 63\,180 - 81\,740}{6 \cdot 1\,712} = \frac{44\,784}{6 \cdot 1712}$$

$$a = \frac{7\,464}{1\,712} \cong 4{,}360$$

DETERMİNANTLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜM

$$A_1 \cdot a + B_1 \cdot b + C_1 \cdot c = D_1$$
$$A_2 \cdot a + B_2 \cdot b + C_2 \cdot c = D_2$$
$$A_3 \cdot a + B_3 \cdot b + C_3 \cdot c = D_3$$

şeklindeki üç bilinmeyenli - üçlü bir denklem sisteminde a, b ve c kökleri, determinantlar yöntemiyle şöyle bulunur :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}} = \frac{B_1 (C_2D_3 - C_3D_2) - B_2 (C_1D_3 - C_3D_1) + B_3 (C_1D_2 - C_2D_1)}{A_1 (B_2C_3 - B_3C_2) - A_2 (B_1C_3 - B_3C_1) + A_3 (B_1C_2 - B_2C_1)}$$

$$b = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\text{aynı payda}} = -\frac{A_1(C_2D_3 - C_3D_2) - A_2(C_1D_3 - C_3D_1) + A_3(C_1D_2 - C_2D_1)}{\text{aynı payda}}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\text{aynı payda}} = \frac{A_1 (B_2D_3 - B_3D_2) - A_2 (B_1D_3 - B_3D_1) + A_3(B_1D_2 - B_2D_1)}{\text{aynı payda}}$$

Birinci veri takımına uygulanması :

$$a=\frac{\begin{vmatrix}36 & 244 & 37\\ 61 & 441 & 63\\ 882 & 6650 & 929\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & 36 & 244\\ 9 & 61 & 441\\ 122 & 882 & 6650\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{36(441\cdot929-6650\cdot63)-61(244\cdot929-6650\cdot37)+882(244\cdot63-441\cdot37)}{6(61\cdot6650-882\cdot441)-9(36\cdot6650-882\cdot244)+122(36\cdot441-61\cdot244)}$$

$$=\frac{36(409\,689-418\,950)-61(226\,676-246\,050)+882(15\,372-16\,317)}{6(405\,650-388\,962)-9(239\,400-215\,208)+122(15\,876-14\,884)}$$

$$=\frac{36\cdot(-9\,261)-61\cdot(-19\,374)+882\cdot(-945)}{6\cdot16\,688-9\cdot24\,192+122\cdot992}$$

$$=\frac{-333\,396+1\,181\,814-833\,490}{100\,128-217\,728+121\,024}=\frac{14\,928}{3\,424}=\frac{7\,464}{1\,712}$$

$$b=-\frac{\begin{vmatrix}6 & 244 & 37\\ 9 & 441 & 63\\ 122 & 6650 & 929\end{vmatrix}}{\text{aynı payda}}=$$

$$=-\frac{6(441\cdot929-6650\cdot63)-9(244\cdot929-6650\cdot37)+122(244\cdot63-441\cdot37)}{3\,424}$$

$$=-\frac{6\cdot(-9\,261)-9\cdot(-19\,374)+122\cdot(-945)}{3\,424}$$

$$=-\frac{-55\,566+174\,366-115\,290}{3\,424}=-\frac{3\,510}{3\,424}=-\frac{1\,755}{1\,712}$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix}6 & 36 & 37\\ 9 & 61 & 63\\ 122 & 882 & 929\end{vmatrix}}{\text{aynı payda}}=$$

$$=\frac{6(61\cdot929-882\cdot63)-9(36\cdot929-882\cdot37)+122(36\cdot63-61\cdot37)}{3\,424}$$

$$=\frac{6(56\,669-55\,566)-9(33\,444-32\,634)+122(2\,268-2\,257)}{3\,424}$$

$$=\frac{6\cdot1\,103-9\cdot810+122\cdot11}{3\,424}=\frac{6\,618-7\,290+1\,342}{3\,424}=\frac{670}{3\,424}=\frac{335}{1\,712}$$

Çözümün kontrolü

Çözüm için yapılan hesaplamanın kontrolü ihmal edilmemelidir.

Kontrol, elde edilen *a, b, c* değerlerinin, üçlü denklem sisteminde yerlerine konulmasıyla yapılır.

$$6 \cdot \frac{7\,464}{1\,712} - 36 \cdot \frac{1\,755}{1\,712} + 244 \cdot \frac{335}{1\,712} = 37$$

$$36 \cdot \text{»} - 244 \cdot \text{»} + 1764 \cdot \text{»} = 252$$

$$244 \cdot \text{»} - 1764 \cdot \text{»} + 13300 \cdot \text{»} = 1858$$

$$44\,784 - 63\,180 + 81\,740 = 63\,344$$

$$268\,704 - 428\,220 + 590\,940 = 431\,424$$

$$1\,821\,216 - 3\,095\,820 + 4\,455\,500 = 3\,180\,896$$

Sonuçlar tuttuğu için çözüm doğrudur.

Denklem

Elde edilen *a, b, c* değerlerinin parabol denkleminde yerlerine konmasıyla denklem,

$$y = \frac{7\,464 - 1\,755\,x + 335\,x^2}{1\,712}$$

yada yaklaşık denklem,

$$y = 4{,}360 - 1{,}025\,x + 0{,}196\,x^2$$

olarak bulunur.

Düzeltilmiş değerler

$x=2$; 5 ; 6 ; 7 ; 9 değerlerinin denklemde yerine konmasıyla da düzeltilmiş değerler elde edilir.

$x=2$ için örnek hesaplama :

$$y = \frac{7\,464 - 1\,755 \cdot 2 + 335 \cdot 2^2}{1\,712} \cong 3{,}092$$

Bu yolla bulunmuş olan düzeltilmiş değerler aşağıdadır :

x	$y_{\text{düz}}$
2	3,092
5	4,126
6	5,254
7	6,772
9	10,984

Çizim

1) Eğri bir parabol olduğuna göre, bir maksimum yada minimum noktası vardır. Bu noktanın absis (x) değeri, parabol fonksiyonunun türevini sıfıra eşitlemekle bulunur. Noktanın y değeri ise, böylece bulunan x değerinin parabol fonksiyonunda yerine konmasıyla elde edilir :

$$y=a+b\,x+c\,x^2 \qquad \textbf{den,}$$

$$y'=b+2\,c\,x=0 \qquad \textbf{ve buradan,}$$

$$x=-\frac{b}{2c} \qquad \textbf{(max. yada min. noktasının absisi),}$$

$$y=a+b\cdot\left(-\frac{b}{2c}\right)+c\cdot\left(\frac{b^2}{4\,c^2}\right) \qquad \textbf{den de,}$$

$$y=\frac{4\,a\,c-b^2}{4\,c} \qquad \textbf{(max. yada min. noktasının ordinatı).}$$

Böylece $y=a+b\,x+c\,x^2$ parabolünün maksimum yada minimum noktasının koordinatları,

$$\begin{array}{l|l} \text{Max.} & x=-\dfrac{b}{2c} \\ \text{Min} & y=\dfrac{4\,a\,c-b^2}{4\,c} \end{array}$$

Fonksiyonun ikinci türevi,

$y''=2\,c>0$ yani c pozitifse nokta minimum,

$2\,c<0$ yani c negatifse nokta maksimum'dur.

Örnekteki verilere uygularsak.

Masimum yada minimum noktasının koordinatları :

$$x = -\frac{b}{2c} = -\frac{-1\ 755}{2 \cdot 335} = \frac{351}{134} \cong 2{,}6194$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4c} = \frac{4 \cdot 7\ 464 \cdot 335 - 1\ 755^2}{1\ 712 \cdot 4 \cdot 335} \cong 3{,}017$$

Bu noktadan y eksenine çizilecek paralel, parabolün simetri eksenidir.

Diğer taraftan, $c = +\frac{335}{1\ 712} > 0$ olduğu için de nokta minimum'dur.

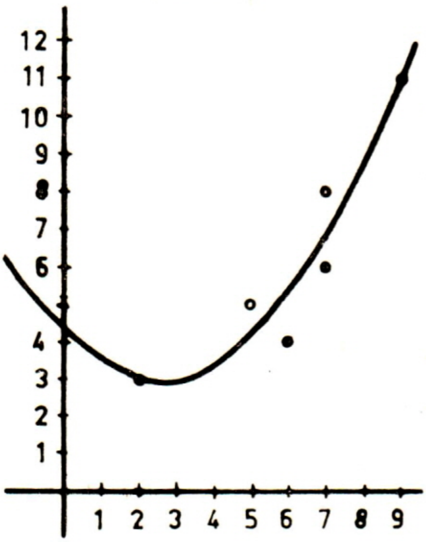
2) İkinci olarak kökler, yani parabolün x eksenini kestiği noktalar araştırılır. Bu değerler,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

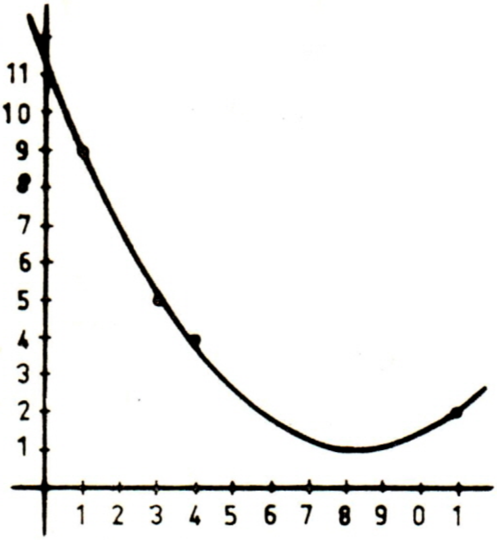
formülüyle hesaplanır. Eğer kök içi negatif çıkarsa, kök yoktur yani eğri x eksenini kesmez. Böylece örneğimizde,

$$x_{1,2} = \frac{1\ 755 \pm \sqrt{1\ 755^2 - 4 \cdot 7\ 464 \cdot 335}}{2 \cdot 335} = \frac{1\ 755 \pm \sqrt{-6\ 921\ 735}}{670}$$

olduğundan, bu parabol x eksenini kesmemektedir.



Şekil 14



Şekil 15

3) Üçüncü olarak özel değerler araştırılır. Örneğin parabolün y eksenini kestiği nokta, fonksiyon denkleminde $x=0$ konarak bulunur. Böylece,

$$y=a+b\,x+c\,x^2 \quad \text{de,}$$

$$x=0 \quad \text{için} \quad y=a\cong 4{,}360$$

olacaktır.

Bu eldelere göre çizilen parabol şekil 14 dedir.

σ n ı n h e s a b ı

σ nın hesabı, aynen bir doğruda yapıldığı gibidir.

x	y	$y_{\text{düz.}}$	$y_{\text{düz.}}-y$	$(y_{\text{düz.}}-y)^2$
2	3	3,092	0,092	0,008 464
5	5	4,126	0,874	0,763 876
6	4	5,254	1,254	1,572 516
7	6	6,772	0,772	0,595 984
7	8	6,772	1,228	1.507 984
9	11	10,984	0,016	0,000 256
				4,449 080

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma\,(y_{\text{düz.}}-y)^2}{n}}=\sqrt{\frac{4{,}449\ 080}{6}}=\sqrt{0{,}741\ 513}$$

$$\cong 0{,}861$$

İ k i n c i veri takımı,

x	y
1	9
3	5
4	4
11	2

için denklem,

$$y=\frac{408\ 860-88\ 503\,x+5\ 271\ x^2}{36\ 436} \qquad (\sigma=0{,}152)$$

dir. Şekil 15.

$y=a+b\,x+c\,x^2$ parabolü de, eğrisinin iyice tanınmış olması, noktaların gidişinin bir eğri manzarası gösterdiği her durumda kullanılabilir oluşu ve hesaplamasının, bir doğrudaki kadar olmasa da, bir oranda basit oluşu gibi nedenler dolayısıyla, istatistik yöntemler uygulamasında oldukça geniş bir kullanım alanı bulmuştur.

Dolayısıyla ormancılık uygulamalarında da çokça kullanılır. Örneğin göğüs çapına göre hacim bulmada. (8. S. 7).

3. $y=a+bx+cx^2+dx^3$ **ÜÇÜNCÜ DERECE EĞRİSİ**

$\Sigma(y-y_i)^2=\min$ yada

$\Sigma(a+bx+cx^2+dx^3-y)^2=\min.$ Bu ifadenin a, b, c ve d ye göre parça türevlerinin alınıp sıfır'a eşitlenmesiyle de,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta a}=2\cdot\Sigma(a+bx+cx^2+dx^3-y)\cdot 1=0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b}=2\cdot\Sigma(a+bx+cx^2+dx^3-y)\cdot x=0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c}=2\cdot\Sigma(a+bx+cx^2+dx^3-y)\cdot x^2=0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta d}=2\cdot\Sigma(a+bx+cx^2+dx^3-y)\cdot x^3=0$$

ve buradan da,

$$\begin{aligned}
a\cdot n\quad &+b\cdot\Sigma x+c\cdot\Sigma x^2+d\cdot\Sigma x^3=\Sigma y\\
a\cdot\Sigma x &+b\cdot\Sigma x^2+c\cdot\Sigma x^3+d\cdot\Sigma x^4=\Sigma xy\\
a\cdot\Sigma x^2 &+b\cdot\Sigma x^3+c\cdot\Sigma x^4+d\cdot\Sigma x^5=\Sigma x^2y\\
a\cdot\Sigma x^3 &+b\cdot\Sigma x^4+c\cdot\Sigma x^5+d\cdot\Sigma x^6=\Sigma x^3y
\end{aligned}$$

şeklindeki dört bilinmeyenli - dörtlü bir denklem sistemi elde edilmiş olur.

Birinci veri takımına uygulama :

x	y	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	xy	x^2y	x^3y
2	3	4	8	16	32	64	6	12	24
5	5	25	125	625	3 125	15 625	25	125	625
6	4	36	216	1 296	7 776	46 656	24	144	864
7	6	49	343	2 401	16 807	117 649	42	294	2 058
7	8	49	343	2 401	16 807	117 649	56	392	2 744
9	11	81	729	6 561	59 049	531 441	99	891	8 019
36	37	244	1 764	13 300	103 596	829 084	252	1 858	14 334

$$
\begin{aligned}
6\,a+\quad 36\,b+\quad 244\,c+\quad 1\,764\,d &= 37\\
36\,a+\quad 244\,b+\quad 1\,764\,c+\quad 13\,300\,d &= 252\\
244\,a+\quad 1\,764\,b+\quad 13\,300\,c+103\,596\,d &= 1\,858\\
1\,764\,a+13\,300\,b+103\,596\,c+829\,084\,d &= 14\,334
\end{aligned}
$$

Bu dörtlü denklem sisteminin çözümü için, gereken kısaltmalar yapıldıktan sonra, birinciden a bulunur, ikinci, üçüncü ve dördüncü denklemlerde yerlerine konur :

$$
\begin{aligned}
6\,a+\quad 36\,b+\quad 244\,c+\quad 1\,764\,d &= 37\\
9\,a+\quad 61\,b+\quad 441\,c+\quad 3\,325\,d &= 63\\
122\,a+\quad 882\,b+\quad 6\,650\,c+\quad 51\,798\,d &= 929\\
882\,a+\quad 6\,650\,b+\quad 51\,798\,c+414\,542\,d &= 7\,167
\end{aligned}
$$

$$a=\frac{37-36\,b-244\,c-1\,764\,d}{6}$$

$$
\begin{aligned}
9\cdot\frac{37-36\,b-244\,c-1\,764\,d}{6}+\quad 61\,b+\quad 441\,c+\quad 3\,325\,d &= 63\\
122\cdot\frac{37-36\,b-244\,c-1\,764\,d}{6}+\quad 882\,b+\quad 6\,650\,c+\quad 51\,798\,d &= 929\\
882\cdot\frac{37-36\,b-244\,b-1\,764\,d}{6}+6\,650\,b+51\,798\,c+414\,542\,d &= 7\,167
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3\cdot\frac{37-36\,b-244\,c-1\,764\,d}{2}+\quad 61\,b+\quad 441\,c+\quad 3\,325\,d &= 63\\
61\cdot\frac{37-36\,b-244\,c-1\,764\,d}{3}+\quad 882\,b+\quad 6\,550\,c+\quad 51\,798\,d &= 929\\
147\cdot(37-36b-244c-1\,764\,d)+6\,650\,b+51\,798\,c+414\,542\,d &= 7\,167
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
111-\quad 108\,b-\quad 732\,c-\quad 5\,292\,d+\quad 122\,b+\quad 882\,c+\quad 6\,650\,d &= 126\\
2\,257-2\,196\,b-14\,884\,c-107\,604\,d+2\,646\,b+19\,950\,c+155\,394\,d &= 2\,787\\
5\,439-5\,292\,b-35\,868\,c-259\,308\,d+6\,650\,b+51\,798\,c+414\,542\,d &= 7\,167
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
14\,b+\quad 150\,c+\quad 1\,358\,d &= 15\\
450\,b+\quad 5\,066\,c+\quad 47\,790\,d &= 530\\
1\,358\,b+15\,930\,c+155\,234\,d &= 1\,728
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
14\,b+\quad 150\,c+\quad 1\,358\,d &= 15\\
225\,b+\quad 2\,533\,c+\quad 13\,895\,d &= 265\\
679\,b+\quad 7\,965\,c+\quad 77\,617\,d &= 864
\end{aligned}
$$

Böylece dörtlü sistem, üçlü bir denklem sistemine indirgenmiş olur.

Burada da yine birinci denklemden b bulunup, ikinci ve üçüncüde yerlerine konulmak suretiyle,

$$b=\frac{15-150\,c-1\;358\,d}{14}$$

$$225\cdot\frac{15-150\,c-1\;358\,d}{14}+2\;533\,c+23\;895\,d=\;265$$

$$679\cdot\frac{15-150\,c-1\;358\,d}{14}+7\;965\,c+77\;617\,d=\;864$$

$$225\cdot\frac{15-150\,c-1\;358\,d}{14}+2\;533\,c+23\;895\,d=\;265$$

$$97\cdot\frac{15-150\,c-1\;358\,d}{2}+7\;965\,c+77\;617\,d=\;864$$

$$3\;375-33\;750\,c-305\;550\,d+35\;462\,c+334\;530\,d=3\;710$$

$$1\;455-14\;550\,c-131\;726\,d+15\;930\,c+155\;234\,d=1\;728$$

$$1\;712\,c+\;28\;980\,d=\;335$$

$$1\;380\,c+\;23\;508\,d=\;273$$

$$1\;712\,c+\;28\;980\,d=\;335$$

$$460\,c+\;7\;836\,d=\;91$$

ikili bir denklem sistemine inilmiş olur. Bu ikisi de, tıpkı bir doğru denklem sisteminde yapıldığı gibi, katsayıların eşitlenmesi yoluyla çözülür. Ancak burada,

$$1\;712=4\,.\,428 \qquad 28\;980=4\,.\,7\;245$$

$$460=4\,.\,115 \qquad 7\;836=4\,.\,1\;959$$

olduğu nedeniyle, ilk denklemin 115 ve 1959, ikincisininse 428 ve 7245 ile genişletilmesi, küçük sayılarla işlem yapılması bakımından, daha uygun olur. Böylece,

$$\begin{array}{rrcr} \mp & 196\ 880\,c \mp 3\ 332\ 700\,d & = & \mp\ 38\ 525 \\ & 196\ 880\,c + 3\ 353\ 808\,d & = & 38\ 948 \\ \hline & 21\ 108\,d & = & 423 \end{array}$$

$$d = \frac{423}{21\ 108} = \frac{141}{7\ 036} \cong 0{,}020$$

$$\begin{array}{rcr} 3\ 353\ 808\,c + 56\ 771\ 820\,d & = & 656\ 265 \\ \mp 3\ 332\ 700\,c \mp 56\ 771\ 820\,d & = & \mp 659\ 295 \\ \hline 21\ 108\,c & = & -\ 3\ 030 \end{array}$$

$$c = -\frac{3\ 030}{21\ 108} = -\frac{1\ 010}{7\ 036} \cong -0{,}144$$

c ve d nin bu değerleri, b de yerlerine konularak b bulunur :

$$b = \frac{1}{14}\left(15 + 150 \cdot \frac{1\ 010}{7\ 036} - 1\ 358 \cdot \frac{141}{7\ 036}\right) = \frac{105\ 540 + 151\ 500 - 191\ 478}{14 \cdot 7\ 036}$$

$$b = \frac{65\ 562}{14 \cdot 7\ 036} = \frac{4\ 683}{7\ 036} \cong 0{,}666$$

b, c ve d değerleri, a da yerlerine konularak da a bulunur:

$$a = \frac{1}{6}\left(37 - 36 \cdot \frac{4\ 683}{7\ 036} + 244 \cdot \frac{1\ 010}{7\ 036} - 1\ 764 \cdot \frac{141}{7\ 036}\right) = \frac{89\ 460}{6 \cdot 7\ 036}$$

$$a = \frac{14\ 910}{7\ 036} \cong 2{,}119$$

Kontrol hesabı

Dörtlü bir denklem sisteminin çözümü, görüldüğü gibi, bir hayli karışıktır. Hesap yanlışları yapma olasılığı fazladır. Bu bakımdan sonuçların güvenilirliğini sağlamak için kontrol hesabı ihmal edilmemelidir. Kontrol, bulunan a, b, c ve d değerlerinin en baştaki denklem sisteminde yerlerine konulmasıyla yapılır. Eşitlikler gerçeklenirse, çözüm doğru demektir. Böylece :

$6 \cdot \frac{14\ 910}{7\ 036}+$	$36 \cdot \frac{4\ 683}{7\ 036}-$	$244 \cdot \frac{1\ 010}{7\ 036}+$	$1\ 764 \cdot \frac{141}{7\ 036}=$	37
36 »	244 »	1 764 »	13 300 »	252
244 »	1 764 »	13 300 »	103 596 »	1 858
1 764 »	13 300 »	103 596 »	829 084 »	14 334
89 460 +	168 588 —	246 440 +	248 724 =	260 332
536 760 +	1 142 652 —	1 781 640 +	1 875 300 =	1 773 072
3 638 040 +	8 260 812 —	13 433 000 +	14 607 036 =	13 072 888
26 301 240 +	62 283 900 —	104 631 960 +	116 900 844 =	100 854 024

Denklem

Bulunan *a, b, c* ve *d* değerlerinin, üçüncü derece fonksiyonunda yerlerine konmasıyla denklem :

$$y=\frac{14\ 910+4\ 683\,x-1\ 010\,x^2+141\,x^3}{7\ 036}$$

Ve yaklaşık denklem:

$$y=2{,}119+0{,}666\,x-0{,}144\,x^2+0{,}020\,x^3$$

olarak elde edilir.

Düzeltilmiş değerler

$x=2\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 9$ değerlerinin, fonksiyon denkleminde yerlerine konmasıyla bulunan düzeltilmiş değerler aşağıdadır:

x	$y_{\text{düzz.}}$
2	3,036
5	4,363
6	5,273
7	6,618
9	11,091

Çizim

Bu denklemin gösterdiği eğriyi çizmek için,

1) Max. - min. değerleri araştırılır. (Türev sıfır'a eşitlenerek kökler bulunacak) :

$$y = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 \qquad \text{den,}$$

$$y' = b + 2\,c\,x + 3\,d\,x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 3\,db}}{3\,d} \qquad \text{(Max. - min. noktalarının absis değerleri)}$$

Örneğimizde max. - min. noktaları araştırılırsa :

$$x_{1,2} = \frac{1\;010 \pm \sqrt{1\;010^2 - 3 \cdot 4683 \cdot 141}}{3 \cdot 141} = \frac{1\;010 \pm \sqrt{-960\;809}}{3 \cdot 141}.$$

Kök içi negatif çıktığından, kök yani max. - min. noktaları yoktur.

2) Kökler yani eğrinin x eğrisini kestiği noktalar :

Üçüncü derece fonksiyonunun bir yada üç kökü vardır yani eğri, x eksenini bir yada üç noktada keser.

Üçüncü derece fonksiyonunda, ilk kök araştırma yoluyla bulunur.

Düzeltilmiş değerlere bakılacak olursa, $x = -2$ dolayında $y = 0$ olacağı tahmin edilebilir. Gerçekten,

$x = -2$	için	fonksiyon	$y = 0{,}053$
$-2{,}1$	»	»	$-0{,}097$

dir. Kök, bu iki değer arasında olup -2 ye daha yakındır. Yaklaşık $x = -2{,}03$ deyelim.

Diğer iki kökü bulmak için, fonksiyon denklemi $x - (-2{,}03) = x + 2{,}03$ e bölünür ve elde edilecek olan ikinci derece denkleminin kökleri aranır. Böylece :

$$\begin{array}{rrrr|l}
141\,x^3 & -1010\,x^2 & +4683\,x & +14910 & \;x + 2{,}03 \\ \cline{5-5}
\mp 141\,x^3 & \mp\; 286\,x^2 & & & 141\,x^2 - 1296\,x + 7314 \\ \cline{1-2}
 & -\;1296\,x^2 & +\;4683\,x & & \\
 & \pm\;1296\,x^2 & \pm\;2631\,x & & \\ \cline{2-3}
 & & 7314\,x & +14910 & \\
 & & \mp 7314\,x & \mp 14847 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & 0 &
\end{array}$$

$$141\,x^2 - 1\;296\,x + 7\;314 = 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}=\frac{1296\pm\sqrt{1296^2-4\cdot141\cdot7314}}{2\cdot141}=$$

$$=\frac{1296\pm\sqrt{-2\ 445\ 480}}{2\cdot141}$$

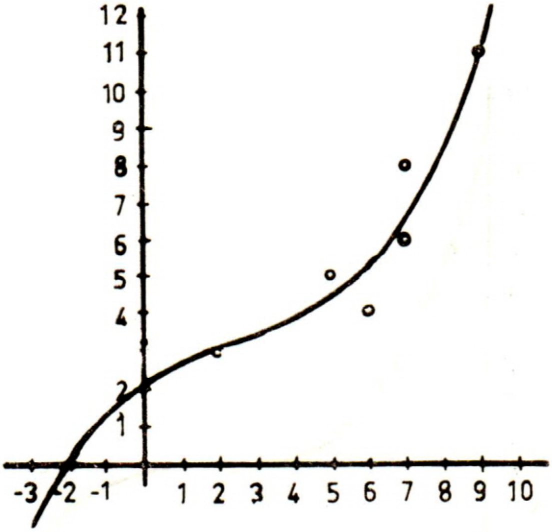
Burada karekök içindeki sayı negatif olduğu için, fonksiyonun ikinci ve üçüncü kökü yoktur.

Ohalde eğri, tek bir noktada x eksenini kesmektedir.

3) Özel değerler

$x=0$ için $y=a\cong2{,}119$ dur.

Bu eldelere göre eğri artık çizilebilir. Şekil 16.



Şekil 16

σ nın hesabı

y	$y_{\text{düz.}}$	$y_{\text{düz.}}-y$	$(y_{\text{düz.}}-y)^2$
3	3,036	0,036	0,001 296
5	4,363	0,637	0,405 769
4	5,273	1,273	1,620 529
6	6,618	0,618	0,381 924
8	6,618	1,382	1,909 924
11	11,091	0,091	0,008 281
			4,327 723

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\,(y_{\text{düz.}} - y)^2}{n}} = \sqrt{\frac{4.327\ 723}{6}} = \sqrt{0{,}721\ 287} = 0{,}849$$

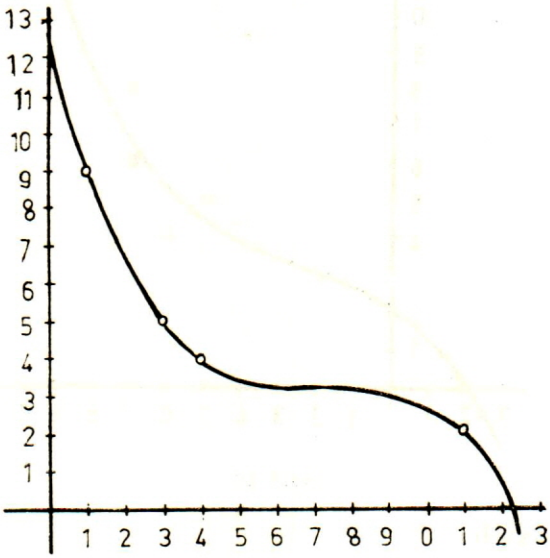
İkinci veri takımı,

x	y
1	9
3	5
4	4
11	2

için denklem,

$$y = \frac{20652 - 6379\,x + 888\,x^2 - 41\,x^3}{1680}$$

dir. Şekil 17.



Şekil 17

Eğri tam noktalardan geçmekte olup $\sigma = 0$ dır.

İKİZKENAR HİPERBOLLER

x ve y eksenlerini asimptotları kabul eden bir ikizkenar hiperbolün denklemi,

$$y = \frac{c}{x}$$

şeklindedir. (6. S. 69).

Hiperbol a kadar yukarı kaydırılmak istenirse, denklem

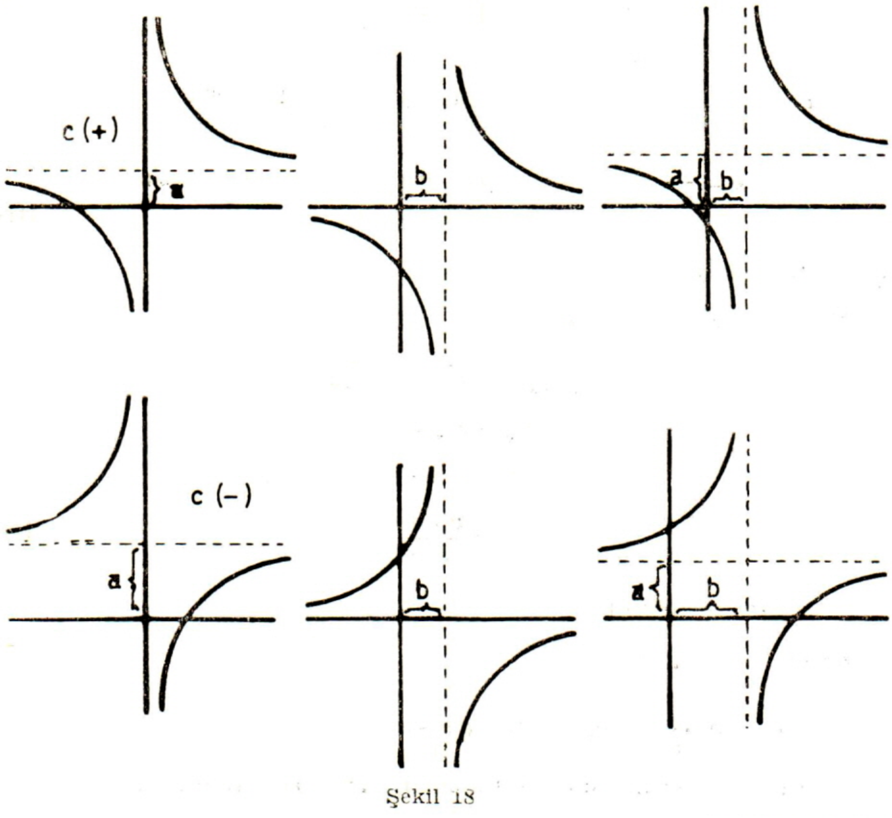
$$y - a = \frac{c}{x} \quad \text{yada} \quad y = a + \frac{c}{x} \qquad \text{I-A}$$

olacaktır. Burada yatay asimptot artık x ekseni değil, $y = a$ doğrusudur. Şekil 18 a.

Benzer biçimde hiperbol ,b kadar sağa kaydırılmak istenirse, denklem

$$y = \frac{c}{x - b} \qquad \text{II-A}$$

şekline girecektir ki burada da düşey asimptot, y ekseni değil, $x = b$ doğrusudur. Şekil b.



Şekil 18

Üçüncü olarak hiperbol, a kadar yukarı, b kadar sağa kaydırılmak istenirse, bu halde de denklem,

$$y - a = \frac{c}{x - b} \qquad \text{III-A}$$

olacaktır ki bu hiperbolün asimptotları $y = a$ ve $x = b$ doğrularıdır. Şekil c.

Son üç denklemi, şimdi biraz daha yakından inceleyelim :

İlk denklemde, eşitliğin her iki tarafı x ile çarpılırsa, denklem

$$y = a + \frac{c}{x} \quad \text{den} \quad yx = a\,x + c \qquad \text{I-B}$$

şeklini alır.

İkinci denklem, aynı işlemle

$$y = \frac{c}{x - b} \quad \text{den} \quad yx = b\,y + c \qquad \text{II-B}$$

olduğu gibi, üçüncü denklem de yine aynı yol izlenerek

$$y - a = \frac{c}{x - b} \quad \text{den} \quad yx = a\,x + b\,y + c - ab \quad \text{yada,}$$

$$yx = a\,x + b\,y + c' \qquad \text{III-B}$$

şekline getirilebilir.

Üçüncü denklem ayrıca,

$$yx = a\,x + b\,y + c' \quad \text{den}$$

$$yx - b\,y = a\,x + c'$$

$$y\,(x - b) = a\,x + c'$$

$$y = \frac{a\,x + c'}{x - b} \qquad \text{III-C}$$

şeklinde de gösterilebilir.

Özetleyecek olursak :

1) $y - a = \dfrac{c}{x}$ yada $yx = a\,x + c$

$y = a$ şeklinde bir yatay asimptotu olan ikizkenar hiperbolü,

2) $y = \frac{c}{x-b}$ yada $yx = by + c$

$x = b$ şeklinde bir düşey asimptotu olan ikizkenar hiperbolü,

3) $y - a = \frac{c}{x-b}$ yada $yx = ax + by + c'$ yahutta $y = \frac{ax + c'}{x-b}$

$y = a$ ve $x = b$ şeklinde, yatay - düşey iki asimptotu olan ikizkenar hiperbolü göstermektedirler.

*
**

4. $y - a = \frac{c}{x}$ yada $yx = ax + c$ Yatay asimptotlu ikizkenar hiperbolü

Bu fonksiyonun hesaplanması için iki ayrı yol vardır.

Birinci yol: Fonksiyonun ilk yazılış şeklinden yararlanır. Şimdiye kadar verdiğimiz uygulamalar gibidir.

İkinci yol: Fonksiyonun ikinci gösteriliş şeklinden yararlanılır.

Bu ikinci uygulama biçimine D ö n ü ş t ü r m e (Transformasyon) formülleri yolu adı verilir. (7. S. 132).

Yukarıdaki fonksiyonun her iki yolla hesaplanabilmesine karşı, karmaşık şekiller gösteren birçok eğri fonksiyonlarının hesabı yalnızca transformasyon yoluyla gerçekleştirilebilir.

Her iki yolun da geçerli olduğu, yukarıdaki örnekteki gibi, durumlarda ise transformasyonla çözümün daha kolay ve sağlıklı yapılabileceği görülecektir.

Biz burada ilkin transformasyonla çözümü, ikinci olarak da diğer çözümü vereceğiz.

Birinci yol. T r a n s f o r m a s y o n l a ç ö z ü m

Fonksiyonun ikinci yazılış şeklinde,

$$yx = z$$

diyecek olursak,

$\Sigma (z - z_i)^2 = \text{min.}$ yada

$\Sigma (ax + c - yx)^2 = \text{min.}$ olur. a ve c ye göre parça türevleri alınıp sıfır'a eşitlenmekle,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta a}=2\cdot\Sigma(a\,x+c-y\,x)\cdot x=0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c}=2\cdot\Sigma(a\,x+c-y\,x)\cdot 1=0$$ **ve buradan,**

$$a\cdot\Sigma x^2+c\cdot\Sigma x=\Sigma y\,x^2$$
$$a\cdot\Sigma x+c\cdot n=\Sigma y\,x$$

bulunur. Bu denklemler, bu hesaplamayı yapmadan da elde edilebilir: Fonksiyon denklemi, bir doğru denklemini akla getirmektedir. Bu açıdan ele alınınca, doğruya ait denklemlerde y yerine $y\,x$ alınırsa yine bu sonuçlar elde edilir.

Birinci veri takımına uygulama :

x	y	x^2	xy	x^2y
2	3	4	6	12
5	5	25	25	125
6	4	36	24	144
7	6	49	42	294
7	8	49	56	392
9	11	81	99	891
36	37	244	252	1 858

$$\begin{array}{rrl}
244\,a+ & 36\,c= & 1\,858 \\
36\,a+ & 6\,c= & 252 \\
\hline
122\,a+ & 18\,c= & 929 \\
6\,a+ & 1\,c= & 42 \\
\hline
\mp 732\,a\mp & 108\,c= & \mp 5\,574 \\
732\,a+ & 122\,c= & 5\,124 \\
\hline
 & 14\,c= & -\,450
\end{array}$$

$$c=-\frac{450}{14}\cong -32{,}143$$

$$\begin{array}{rrl}
122\,a+ & 18\,c= & 929 \\
\mp 108\,a\mp & 18\,c=\mp & 756 \\
\hline
14\,a & = & 173
\end{array}$$

$$a=\frac{173}{14}\cong 12{,}357$$

Elde edilen bu iki bilinmeyenli-ikili denklem sistemi, aynen bir doğru denkleminde olduğu gibi çözülür.

Çözüm, doğru geçirme konusunda ayrıntılarıyla verilen, determinantlar yöntemiyle de aynı kolaylıkla yapılabilir.

Çözümün kontrolü

Bulunan a ve c değerleri, ilk denklem sisteminde yerlerine konursa:

$$\begin{array}{rcrcr} 244 \cdot \dfrac{173}{14} & - & 36 \cdot \dfrac{450}{14} & = & 1\,858 \\ 36 \cdot \dfrac{173}{14} & - & 6 \cdot \dfrac{450}{14} & = & 252 \\ \hline 42\,212 & - & 16\,200 & = & 26\,012 \\ 6\,228 & - & 2\,700 & = & 3\,528 \end{array}$$

İki eşitlik de gerçeklendiği için, çözüm doğru yapılmıştır.

Denklem

Bu eldelere göre denklem :

$$y - \frac{173}{14} = \frac{-\dfrac{450}{14}}{x} \quad \text{den} \quad 14\,y - 173 = -\frac{450}{x}$$

Yada yaklaşık denklem :

$$y - 12{,}357 = -\frac{32{,}143}{x}$$

Düzeltilmiş değerler

Düzeltilmiş değerler, $x = 2$; 5 ; 6 ; 7 ; 9 değerlerinin denklemde yerine konmasıyla bulunur :

x	$y_{düz.}$
2	—3,714
5	5,929
6	7,000
7	7,765
9	8,786

Çizim

İkizkenar hiperbolde maksimum - minimum noktaları yoktur.

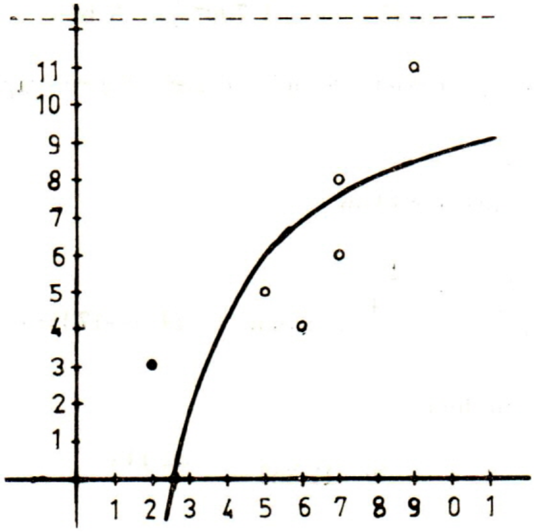
Çizim için ilk olarak yatay asimptot alınır. Bunun için $y=a=12{,}357$ den x eksenine bir paralel çizilir.

İkinci olarak eğrinin x eksenini kestiği nokta bulunur. Bunun için eğri denkleminde $y=0$ konursa,

$$173=\frac{450}{x} \qquad \text{den} \qquad x=\frac{450}{173}\cong 2{,}601$$

olur.

Çizilecek eğri şekil 19 da görülmektedir.



Şekil 19

σnın hesabı

y	$y_{\text{düz.}}$	$y_{\text{düz.}}-y$	$(y_{\text{düz.}}-y)^2$
3	—3,714	6,714	45,077 796
5	5,929	0,929	0,863 041
4	7,000	3,000	9,000 000
6	7,765	1,765	3,115 225
8	7,765	0,235	0,055 225
11	8,786	2,214	4,901 796
			63,013 083

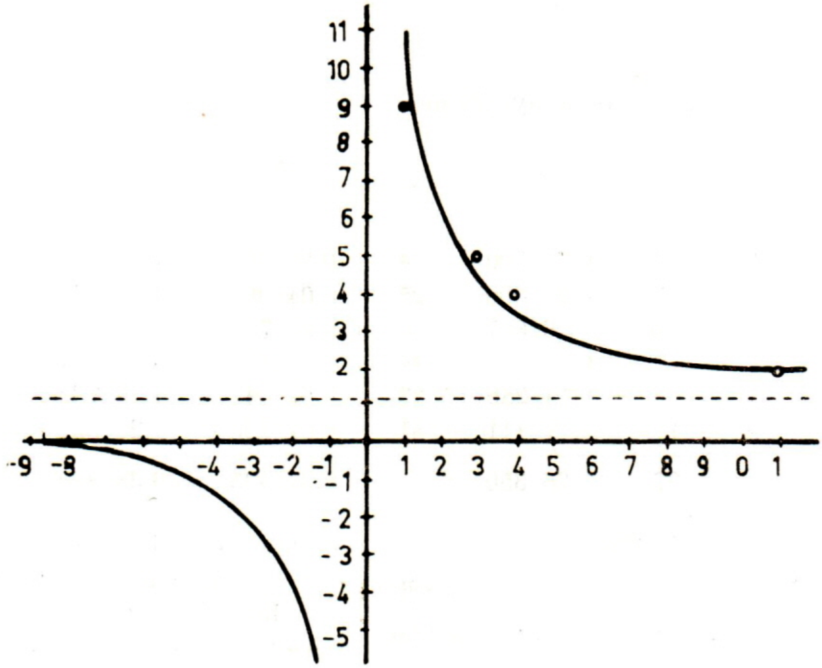
$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma\,(y_{\text{düz.}}-y)^2}{n}}=\sqrt{\frac{63{,}013\ 083}{6}}$$

$$\sigma=\sqrt{10{,}502\ 181}=3{,}241$$

İkinci veri takımına göre elde edilen denklem,

$$227\,y-262=\frac{2274}{x} \qquad \text{yada} \qquad y=\frac{262\,x+2\ 274}{227\,x} \qquad (\sigma=1{,}129)$$

dur. Şekil 20.



Şekil 20

İ k i n c i y o l

$$y=a+\frac{c}{x} \qquad \text{de,}$$

$$\Sigma\,(y-y_i)^2=\Sigma\left(a+\frac{c}{x}-y\right)^2=\text{min.}$$

yazılıp, *a* ve *c* ye göre parça türevleri alınmakla,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta a} = 2 \cdot \Sigma \left(a + \frac{c}{x} - y\right) \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c} = 2 \cdot \Sigma \left(a + \frac{c}{x} - y\right) \cdot \frac{1}{x} = 0$$

ve buradan,

$$a \cdot n + c \cdot \Sigma \frac{1}{x} = \Sigma y$$

$$a \cdot \Sigma \frac{1}{x} + c \cdot \Sigma \frac{1}{x^2} = \Sigma \frac{y}{x}$$

bulunur.

Birinci veri takımına uygulama :

x	y	$\frac{1}{x}$	x^2	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{y}{x}$
2	3	0,50 000	4	0,25 000	1,50 000
5	5	0,20 000	25	0,04 000	1,00 000
6	4	0,16 667	36	0,02 778	0,66 667
7	6	0,14 286	49	0,02 041	0,85 714
7	8	0,14 286	49	0,02 041	1,14 286
9	11	0,11 111	81	0,01 235	1,22 222
	37	1,26 350		0,37 095	6,38 889

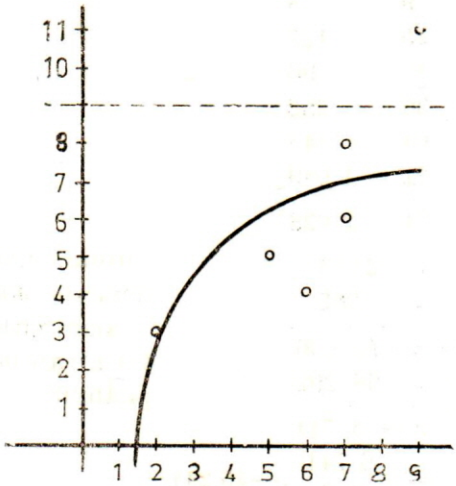
$$
\begin{array}{rl}
6 \quad a + 1{,}26\,350 \cdot c = & 37 \\
1{,}26\,350 \cdot a + 0{,}37\,095 \cdot c = & 6{,}38\,889 \\
\hline
\mp 7{,}58\,100\, a \mp 1{,}59\,643\, c = & \mp 46{,}74\,950 \\
7{,}58\,100\, a + 2{,}22\,570\, c = & 38{,}33\,334 \\
\hline
0{,}62\,927\, c = & -\ 8{,}41\,616 \\
c \cong & -13{,}3745 \\
2{,}22\,570\, a + 0{,}46\,870\, c = & 13{,}72\,515 \\
\mp 1{,}59\,643\, a \mp 0{,}46\,870\, c = & \mp\ 8{,}07\,236 \\
\hline
0{,}62\,927\, a \quad = & 5{,}65\,279 \\
a \cong 8{,}983 &
\end{array}
$$

Çözüm, yine bir doğru denklemler sisteminde yapıldığı gibidir. Katsayıların eşitlenmesiyle yada determinantlarla.

Bu eldelere göre denklem :

$$y = 8{,}983 - \frac{13{,}3745}{x} \qquad (\sigma = 2{,}003)$$

Düzeltilmiş değerler ve σ nın hesabı ile çizim ilkeleri bir önceki örnekte yapıldığı gibidir. Fonksiyon eğrisi şekil 21 de görülmektedir.



Şekil 21

Görüldüğü üzere, iki ayrı yolla bulunan denklemler, grafikleri ve σ değerleri birbirini tutmamaktadır.

Hesaplama kolaylığı bakımından, transformasyon yolu tercih edilmektedir.

5. $y = \dfrac{c}{x-b}$ yada $yx = by + c$ **Düşey asimptotlu ikizkenar hiperbol**

Yine $yx = z$ diyoruz. Böylece,

$\Sigma\,(z - z_i)^2 = \text{min.}$ yada,

$\Sigma\,(by + c - yx)^2 = \text{min.}$ b ve c ye göre parça türevleri alınmakla,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b} = 2 \cdot \Sigma\,(by + c - yx) \cdot y = 0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c} = 2 \cdot \Sigma\,(by + c - yx) \cdot 1 = 0$$

Buradan da,

$$b \cdot \Sigma y^2 + c \cdot \Sigma y = \Sigma y^2 x$$
$$b \cdot \Sigma y + c \cdot n = \Sigma yx$$

iki bilinmeyenli - ikili denklem sistemi elde edilir.

Birinci veri takımına uygulama :

x	y	yx	y^2	y^2x
2	3	6	9	18
5	5	25	25	125
6	4	24	16	96
7	6	42	36	252
7	8	56	64	448
9	11	99	121	1 089
36	37	252	271	2 028

$$\begin{array}{rrr}
271\,b + & 37\,c = & 2\,028 \\
37\,b + & 6\,c = & 252 \\
\hline
\mp 10\,027\,b \mp & 1\,369\,c = & \mp 75\,036 \\
10\,027\,b + & 1\,626\,c = & 68\,292 \\
\hline
 & 257\,c = & -\,6\,744
\end{array}$$

$$c = -\frac{6\,744}{257} \cong -26{,}241$$

$$\begin{array}{rrr}
1\,626\,b + & 222\,c = & 12\,168 \\
\mp 1\,369\,b \mp & 222\,c = & \mp\,9\,324 \\
\hline
257\,b & = & 2\,844
\end{array}$$

$$b = \frac{2\,844}{257} \cong 11{,}066$$

Çözüm, yine bir doğru denkleminde olduğu gibidir. Katsayıların eşitlenmesi ile yada determinantlar kullanılarak yapılabilir.

Çözümün kontrolü

Çözümün kontrolü, daha önce de belirttiğimiz üzere, bulunan b ve c değerlerinin, ikili denklem sisteminde yerlerine konulmasıyla yapılır. Eşitlikler gerçeklenirse çözüm doğrudur. Böylece :

$$271 \cdot \frac{2\,844}{257} - 37 \cdot \frac{6\,744}{257} = 2\,028$$

$$37 \cdot \frac{2\,844}{257} - 6 \cdot \frac{6\,744}{257} = 252$$

$$\begin{array}{rrr}
\hline
770\,724 - & 249\,528 = & 521196 \\
105\,228 - & 40\,464 = & 64764
\end{array}$$

Denklem

b ve c değerlerinin, fonksiyon denkleminde yerlerine konmasıyla, denklem,

$$y=\frac{-\dfrac{6\ 744}{257}}{x-\dfrac{2\ 844}{257}} \quad \text{den} \quad y=\frac{6\ 744}{257\left(\dfrac{2\ 844}{257}-x\right)}$$

yoluyla

$$y=\frac{6\ 744}{2\ 844-257\,x}$$

yaklaşık denklemse,

$$y=\frac{26{,}241}{11{,}066-x}$$

olarak elde edilir.

Düzeltilmiş değerler

Fonksiyon denkleminde, $x=2$; 5 ; 6 ; 7 ; 9 değerlerinin yerine konulmasıyla, düzeltilmiş değerler,

x	$y_{\text{düz.}}$
2	2,894
5	4,326
6	5,180
7	6,454
9	12.701

olarak bulunur.

$x=2$ için örnek hesaplama

$$y=\frac{6\ 744}{2\ 844-257\cdot 2}=\frac{6\ 744}{2\ 844-514}=\frac{6\ 744}{2\ 330}\cong 2{,}894$$

Özel değerler ve çizim

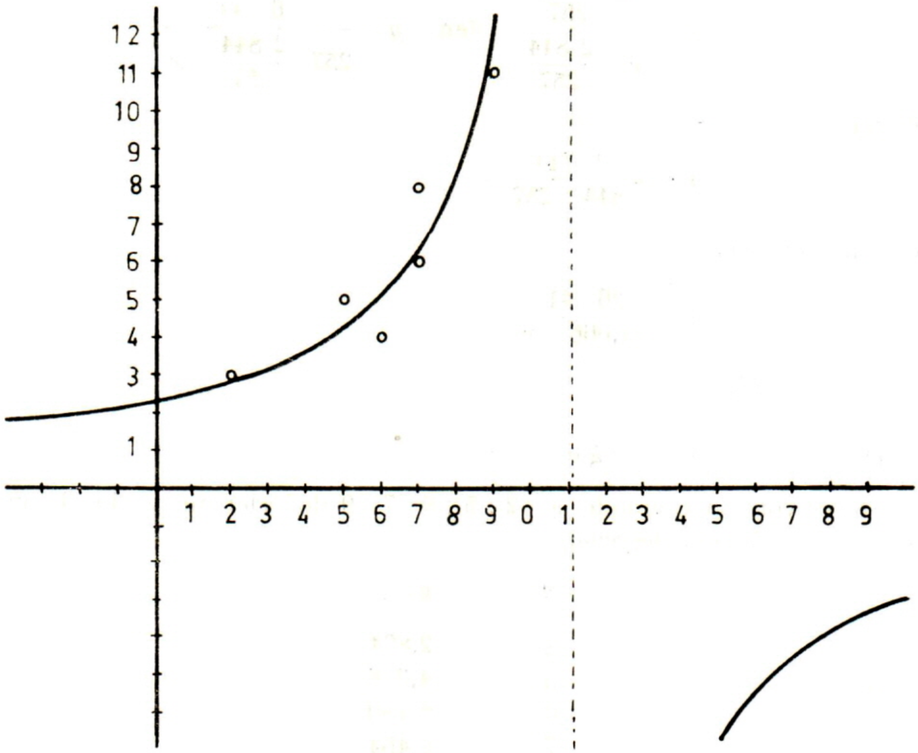
1) Eğri bir ikizkenar hiperbol olduğuna göre maksimum ve minimum'u yoktur.

2) Paydayı sıfır yapan $x=11{,}066$ için $y=\mp\infty$ dur. (Düşey asimptot).

3) İkinci asimptot x eksenidir.

4) $x=0$ için $y=\dfrac{6\,744}{2\,844}\cong 2{,}371$ dir.

Bu özel değerlerle, düzeltilmiş değerlere göre yapılan çizim, şekil 22 de görülmektedir.



Şekil 22

σ nın hesabı

x	y	$y_{düz.}$	$y_{düz.}-y$	$(y_{düz.}-y)^2$
2	3	2,894	0,106	0,011 236
5	5	4,326	0,674	0,454 276
6	4	5,180	1,180	1,392 400
7	6	6,454	0,454	0,206 116
7	8	6,454	1,546	2,390 116
9	11	12,701	1,701	2,893 401
				7,347 545

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma\,(y_{düz.}-y)^2}{n}}=\sqrt{\frac{7{,}347\,545}{6}}=\sqrt{1{,}224\,591}=1{,}107$$

İkinci veri takımı,

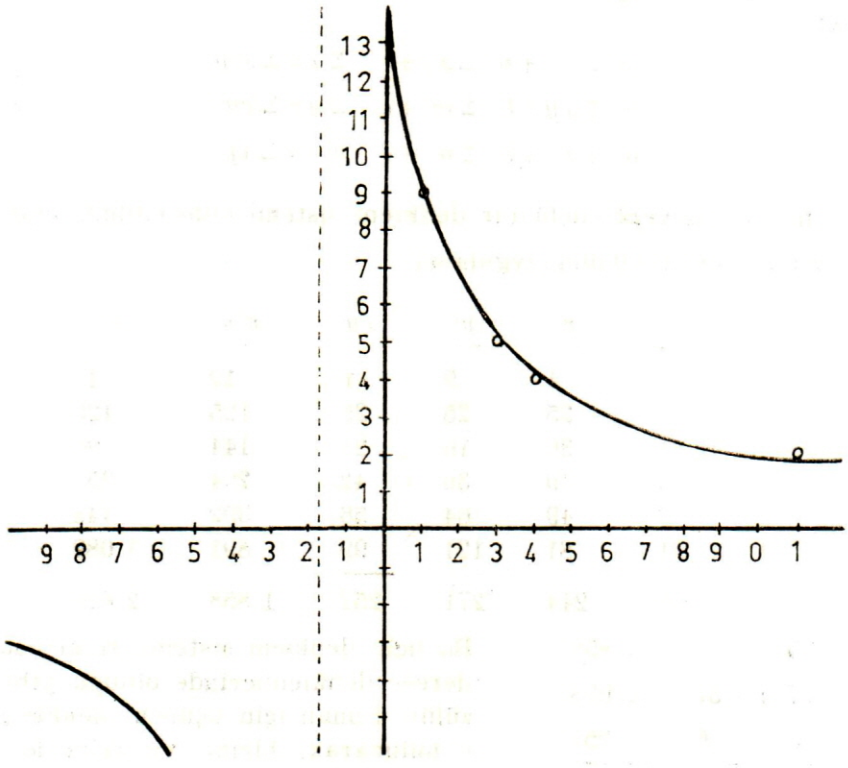
x	y
1	9
3	5
4	4
11	2

için, denklem

$$y=\frac{633}{26\,x+46} \qquad (\sigma=0{,}167)$$

olup eğrisi şekil 23 dedir.

Eğrinin ormancılıktaki uygulaması için, Çanakçıoğlu'nun «Böceklerde Üreme Enerjisi ve Bunu Sınırlayan Tabii Faktörler» konulu incelemesi iyi bir örnektir. (3. S. 136).



Şekil 23

6) $y-a=\dfrac{c}{x-b}$ Çift asimptotlu ikizkenar hiperbol

Yine denklemin ikinci yazılış şekli kullanılacaktır. Bu z ile gösterilirse,

$$z=y\,x=a\,x+b\,y+c' \qquad (c'=c-ab)$$

ve buradan

$$\Sigma\,(z-z_i)^2=\Sigma\,(ax+b\,y+c'-xy)^2=\min.$$

buradan da, a, b ve c' e göre parça türevleri alınmakla,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta a}=2\cdot\Sigma\,(ax+b\,y+c'-xy)\cdot x=0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b}=2\cdot\Sigma\,(ax+b\,y+c'-xy)\cdot y=0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c'}=2\cdot\Sigma\,(ax+b\,y+c'-xy)\cdot 1=0$$

ve sonuçta

$$\begin{aligned} a\cdot\Sigma\,x^2+b\cdot\Sigma\,xy+c'\cdot\Sigma\,x&=\Sigma\,x^2y\\ a\cdot\Sigma\,xy+b\cdot\Sigma\,y^2+c'\cdot\Sigma\,y&=\Sigma\,xy^2\\ a\cdot\Sigma\,x+b\cdot\Sigma\,y+c'\cdot n&=\Sigma\,xy \end{aligned}$$

olarak üç bilinmeyenli - üçlü bir denklem sistemi elde edilmiş olur.

Birinci veri takımına uygulama :

x	y	x^2	y^2	xy	x^2y	xy^2
2	3	4	9	6	12	18
5	5	25	25	25	125	125
6	4	36	16	24	144	96
7	6	49	36	42	294	252
7	8	49	64	56	392	448
9	11	81	121	99	891	1 089
36	37	244	271	252	1 858	2 028

$$\begin{aligned} 244\,a+252\,b+36\,c'&=1\ 858\\ 252\,a+271\,b+37\,c'&=2\ 028\\ 36\,a+37\,b+6\,c'&=252 \end{aligned}$$

$$a=\frac{252-37\,b-6\,c'}{36}$$

Bu üçlü denklem sistemi, tıpkı üçüncü derece denklemlerinde olduğu gibi çözülür. Bunun için üçüncü denklemden a bulunarak, birinci ve ikincide yerlerine konur.

$$244 \cdot \frac{252-37\,b-6\,c'}{36}+252\,b+36\,c'=1\ 858$$

$$252 \cdot \frac{252-37\,b-6\,c'}{36}+271\,b+37\,c'=2\ 028$$

$$61 \cdot \frac{252-37\,b-6\,c'}{9}+252\,b+36\,c'=1\ 858$$

$$7 \cdot (252-37\,b-6\,c')+271\,b+37\,c'=2\ 028$$

$$15\ 372-2\ 257\,b-366\,c'+2\ 268\,b+324\,c'=16\ 722$$

$$1\ 764-\ 259\,b-\ 42\,c'+\ 271\,b+\ 37\,c'=\ 2\ 028$$

$$\begin{aligned} 11\,b-\ 42\,c' &= 1\ 350 \\ 12\,b-\ 5\,c' &= 264 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mp\ 132\,b \mp 504\,c' &= \mp 16\ 200 \\ 132\,b-\ 55\,c' &= 2\ 904 \end{aligned}$$

$$449\,c'=-13\ 296$$

$$c'=-\frac{13\ 296}{449}\cong -29{,}612$$

$$\begin{aligned} \mp\ 55\,b \mp 210\,c' &= \mp\ 6\ 750 \\ 504\,b-210\,c' &= 11\ 088 \end{aligned}$$

$$449\,b = 4\ 338$$

$$b=\frac{4\ 338}{449}\cong 9{,}661$$

Böylece üçlü denklem sistemi, ikili denklem sistemine indirgenmiş olur. Bu da yine, katsayıların eşitlenmesi yoluyla çözümlenir.

b ve c' nün a da yerlerine konmasıyla a bulunur:

$$a=\frac{1}{36}\left(252-37 \cdot \frac{4\ 338}{449}+6 \cdot \frac{13\ 296}{449}\right)=\frac{113\ 148-160\ 506+79\ 776}{36 \cdot 449}$$

$$a=\frac{32\ 418}{36 \cdot 449}=\frac{900{,}5}{449}=\frac{1\ 801}{898}\cong 2{,}006$$

Çözüm determinantlar yöntemiyle de yapılabilir.

Çözümün kontrolü

Bulunan a, b ve c' değerlerinin, asıl denklem üçlüsünde yerlerine konmasıyla yapılır. Eşitliklerin doğrulanması halinde çözüm de doğrudur. Böylece :

$$
\begin{array}{rrrr}
244 \cdot \dfrac{1\ 801}{898} + 252 \cdot \dfrac{8\ 676}{898} - 36 \cdot \dfrac{26\ 592}{898} & = 1\ 858 \\
252 \cdot \quad » \qquad 271 \cdot \quad » \qquad 37 \cdot \quad » & 2\ 028 \\
36 \cdot \quad » \qquad 37 \cdot \quad » \qquad 6 \cdot \quad » & 252 \\
\hline
439\ 444 + 2\ 186\ 352 - 957\ 312 & = 1\ 668\ 484 \\
453\ 852 + 2\ 351\ 196 - 983\ 904 & = 1\ 821\ 144 \\
64\ 836 + 321\ 012 - 159\ 552 & = 226\ 296
\end{array}
$$

c nin bulunması

$c' = c - ab$ den $c = c' + ab$

$$c = -\frac{26\ 592}{898} + \frac{1\ 801}{898} \cdot \frac{8\ 676}{898} = \frac{-23\ 879\ 616 + 15\ 625\ 476}{898 \cdot 898}$$

$$c = -\frac{8\ 254\ 140}{898 \cdot 898} \approx -10.236$$

Denklem

a, b ve c nin yerlerine konmasıyla denklem,

$$y - \frac{1\ 801}{898} = \frac{-\dfrac{8\ 254\ 140}{898 \cdot 898}}{x - \dfrac{8\ 676}{898}}$$

olacaktır. Burada her iki taraf, 898 ile çarpılırsa, ikinci tarafta paydada bulunan 898 lerden biri gider. Böylece

$$898\,y - 1\ 801 = \frac{8\ 254\ 140}{898 \cdot \left(\dfrac{8\ 676}{898} - x\right)}$$

$$898\,y - 1\ 801 = \frac{8\ 254\ 140}{8\ 676 - 898\,x}$$

I bulunur.

Yaklaşık denklemse:

$$y - 2{,}006 = \frac{10{,}236}{9{,}661 - x}$$

Denklemin ikinci yazılış şekli,

$$xy = \frac{1\ 801}{898}x + \frac{8\ 676}{898}y - \frac{26\ 592}{898}$$

yada,

$$898\,xy = 1\ 801\,x + 8\ 676\,y - 26\ 592 \qquad \text{II}$$

üçüncü yazılış şekliyse, II den,

$$898\,xy - 8\ 676\,y = 1\ 801\,x - 26\ 592$$

$$(898\,x - 8\ 676)\,y = 1\ 801\,x - 26\ 592$$

$$y = \frac{1\ 801\,x - 26\ 592}{898\,x - 8\ 676} \qquad \text{III}$$

olacaktır.

D ü z e l t i l m i ş değerlerin hesabı

Denklemin üç değişik yazılış şeklinden birinde, en kolay olarak da III de, $x=2$; 5 ; 6 ; 7 ; 9 değerlerini yerine koymakla, düzeltilmiş değerler,

x	y_{duz}
2	3,342
5	4,201
6	4,801
7	5,851
9	17,480

olarak elde edilir.

Ö z e l d e ğ e r l e r v e ç i z i m

1) İkizkenar hiperbolde maksimum - minimum noktaları yoktur.

2) Yatay asimptot : $y = a \cong 2{,}006$

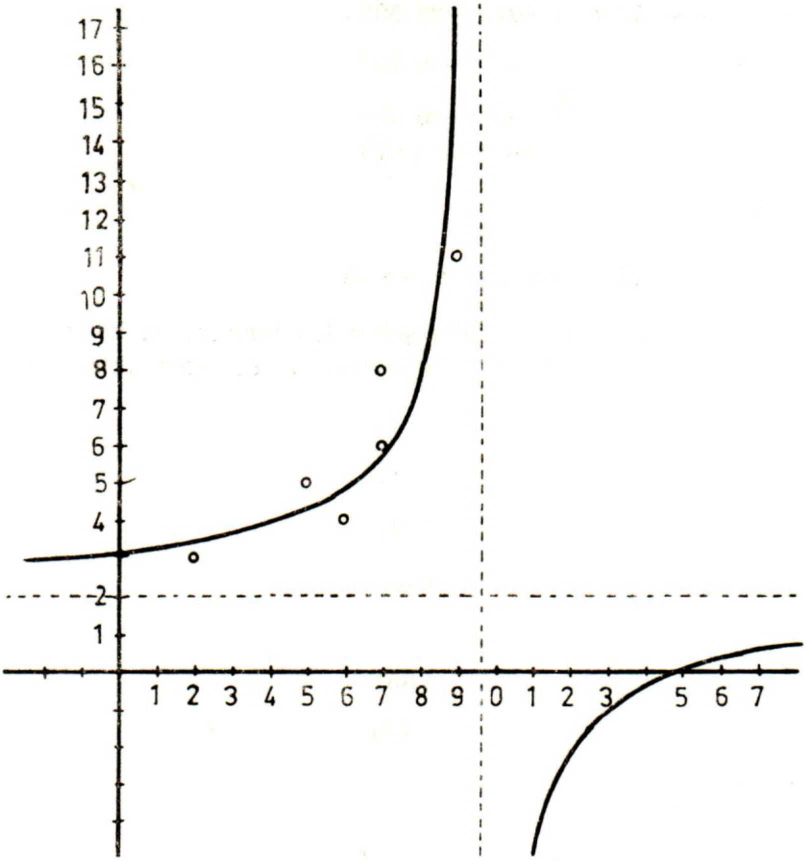
3) Düşey asimptot: $x = b \cong 9{,}661$

4) $x=0$ için $y = \dfrac{26\ 592}{8\ 676} \cong 3{,}065$ III den.

5) $y=0$ için $1\ 801\,x - 26\ 592 = 0$

$$x = \frac{26\ 592}{1\ 801} \cong 14{,}765$$

Özel değerlerle düzeltilmiş değerlere göre eğri çizilebilir. Şekil 24.



Şekil 24

σ nın hesabı

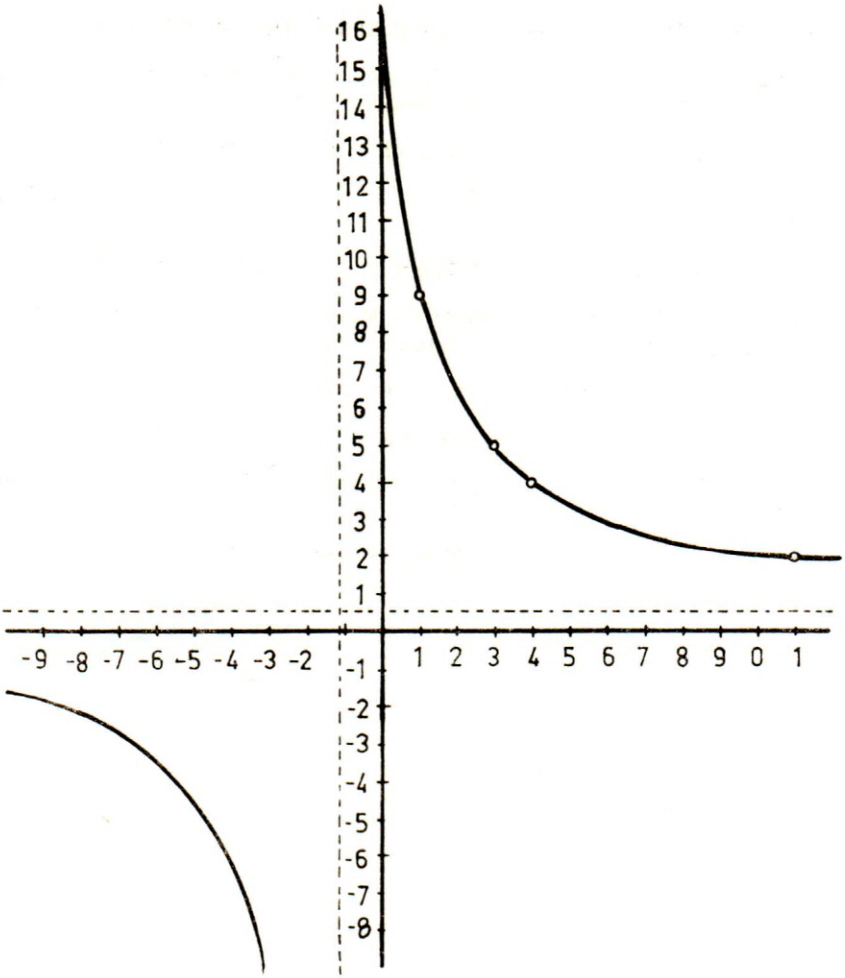
x	y	$y_{\text{düz.}}$	$y_{\text{düz.}} - y$	$(y_{\text{düz.}} - y)^2$
2	3	3,342	0,342	0,116 964
5	5	4,201	0,799	0,638 401
6	4	4,801	0,801	0,641 601
7	6	5,851	0,149	0,022 201
7	8	5,851	2,149	4,618 201
9	11	17,480	6,480	41,990 400
				48,027 768

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(y_{\text{düz.}} - y)^2}{n}} \sqrt{\frac{48{,}027\ 768}{6}} = \sqrt{8{,}004\ 628} \cong 2{,}829$$

İkinci veri takımı için denklem,

$$773\ y - 370 = \frac{11\ 041\ 662}{773\ x + 898} \qquad (\sigma = 0{,}052)$$

dir. Şekil 25.



Şekil 25

Bazı kitaplarda,

$$y = \frac{c\ x}{a + b\ x}$$

denklemi verilmektedir. Burada $x=0$ iken $y=0$ dır, yani eğri eksenlerin kesim noktasından geçer. Dolayısıyla bu fonksiyon, çift asimptotlu ikizkenar hiperbol için bir özel hal denklemidir.

LİTERATÜR

1. Aslantürk, Mehmet. Cebir, lise III. Milli Eğitim Basımevi. İstanbul 1967.
2. Bell, Eric Temple. Büyük Matematikçiler, cilt I. Milli Eğitim Basımevi, İstanbul 1945.
3. Çanakçıoğlu, Hasan, Doç. Dr. Orman Fakültesi Dergisi, 1968 B 1.
4. Granville, W.A. — Smith, P.F. — Longley, W.R. Diferensiyel ve İntegral Hesap. Şirketi Mürettibiye Basımevi, İstanbul 1954.
5. Guitton, Henri, Prof. Statistique et Econometrie. Paris 1964.
6. İlker, A. Nazmi — Terzioğlu, Nazım, Dr. Modern Geometri ve Problemleri, fasikül IV, İstanbul 1947.
7. Kalıpsız, Abdülkadir, Prof. Dr. Bilimsel Araştırma. İstanbul 1976.
8. Krenn, Karl — Çev. Doç. Dr. Muharrem Miraboğlu. Dikili Denemeağaçları Yardımile Meşcere Hacminin Tayini. İstanbul 1958.
9. Mihov, Ivan. Variatsionna Statistika. Sofia 1969
10. Prodan, Michail, Prof. Dr. Forstliche Biometrie. München 1961.
11. Prodan, Michail, Prof. Dr. — Çev. Doç. Dr. Abdülkadir Kalıpsız. Ormancılar İçin Biyometri, İstanbul 1964.
12. Tokmanoğlu, Tahsin, Dr. Orman Fakültesi Dergisi, 1962 B 1.