SERİ SERIES SERIE SÉRIE	B	CİLT VOLUME BAND TOME	27	SAYI NUMBER HEFT FASCICULE	2	1977

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ

ORMAN FAKÜLTESİ

DERGİSİ

REVIEW OF THE FACULTY OF FORESTRY, UNIVERSITY OF ISTANBUL

ZEITSCHRIFT DER FORSTLICHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT ISTANBUL

REVUE DE LA FACULTÉ FORESTIÈRE DE L'UNIVERSITÉ D'ISTANBUL

GAUSS'UN EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ VE ORMANCILIKTA KULLANILAN BAZI EĞRİLERE UYGULANMASI ÜZERİNE BİR DENEME (II)*

Yazan

A. Necati AKGÜR

HİPERBOLLER

$y = \frac{c}{x}$ ikizkenar hiperbolü ile $y = a + d\,x$ doğrusunu toplayacak olursak denklemi $y = \frac{c}{x} + a + d\,x$ olan ve y ekseniyle $y = a + d\,x$ doğrusunu asimptotları kabul eden bir hiperbol eğrisi elde ederiz. Şekil 26.

$y - a_1 = \frac{c}{x}$ ikizkenar hiperbolüyle, aynı doğrunun toplamı da yine aynı sonucu verir:

$$y = \frac{c}{x} + a_1 + a_2 + d\,x$$

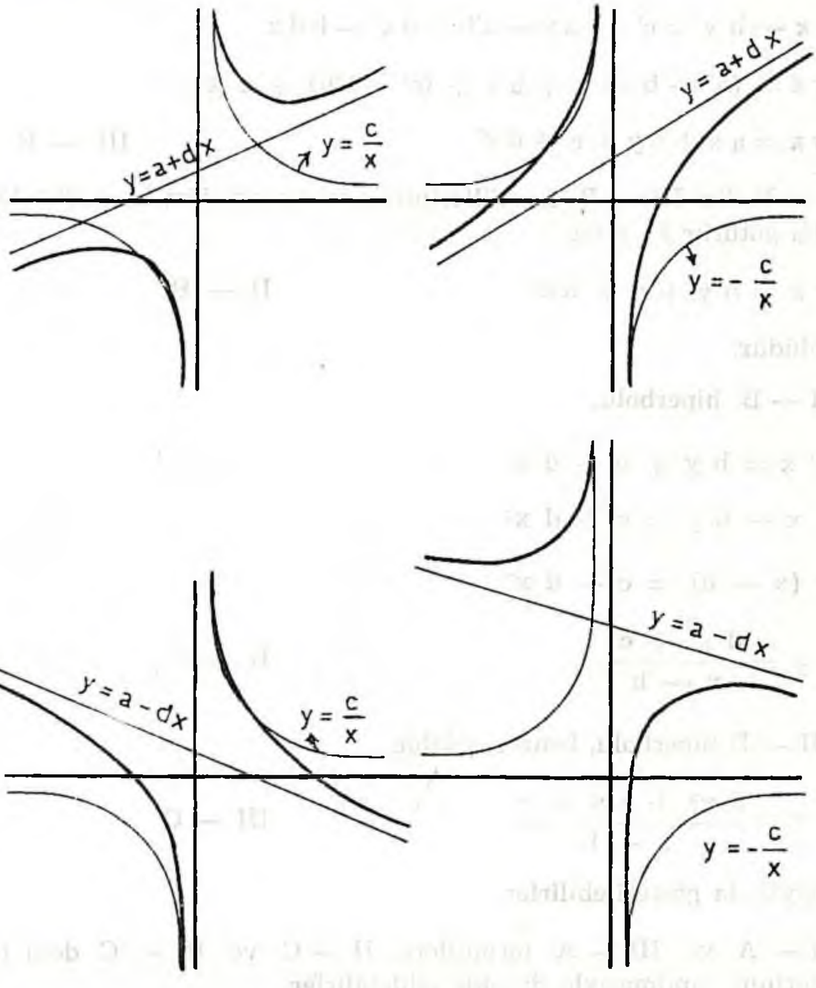
$$y = \frac{c}{x} + a + d\,x \qquad \text{I — A}$$

Her iki taraf x ile çarpılırsa, fonksiyon

$$y\,x = a\,x + c + d\,x^2 \qquad \text{I — B}$$

şeklini alır.

(*) Bu denemenin birinci bölümü, İ. Ü. Orman Fakültesi Dergisi, seri B, 1976, sayı 2 de yayınlanmıştır.



Şekil 26

$y = \dfrac{c'}{x - b}$ ile $y = a' + d\,x$ in toplamı ve yine $y = \dfrac{c'}{x - b} + a_1$ ile $y = a_1 + d\,x$ in toplamı, benzer şekilde, $x = b$ düşeyi ile $y = a + d\,x$ doğrusunu asimptotları kabul eden hiperbolü verir:

$$y = \frac{c'}{x-b} + a' + d\,x \qquad \text{II — A} \quad \text{ve} \quad \text{III — A}$$

$$y\,x - b\,y = c' + a'x - a'b + d\,x^2 - b\,d\,x$$

$$y\,x = (a' - b\,d)\,x + b\,y + (c' - a'b) + d\,x^2$$

$$y\,x = a\,x + b\,y + c + d\,x^2 \qquad \text{III — B}$$

I — B ile III — B formüllerinin incelenmesi, bizi bir başka formüle daha götürür ki, o da

$$y\,x = b\,y + c + d\,x^2 \qquad \text{II — B}$$

formülüdür.

II — B hiperbolü,

$$y\,x = b\,y + c + d\,x^2$$

$$y\,x - b\,y = c + d\,x^2$$

$$y\,(x - b) = c + d\,x^2$$

$$y = \frac{d\,x^2 + c}{x - b} \qquad \text{II — C}$$

III — B hiperbolü, benzer şekilde

$$y = \frac{d\,x^2 + a\,x + c}{x - b} \qquad \text{III — C}$$

yazılışıyla da gösterilebilirler.

II — A ve III — A formülleri, II — C ve III — C deki bölme işlemlerinin yapılmasıyla da elde edilebilirler.

Özetlersek :

$$y = a + \frac{c}{x} + dx \qquad \text{I — A}$$

$$y\,x = a\,x + c + d\,x^2 \qquad \text{I — B}$$

denklemleri, y ekseniyle $y = a + d\,x$ doğrusunu asimptotları kabul eden bir hiperbolü,

$$y\,x = b\,y + c + d\,x^2 \qquad \text{II — B}$$

$$y = \frac{d\,x^2 + c}{x - b} \qquad \text{II — C}$$

$$y\,x = a\,x + b\,y + c + d\,x^2 \qquad \text{III — B}$$

$$y = \frac{d\,x^2 + a\,x + c}{x - b} \qquad \text{III — C}$$

$$y = \frac{c'}{x - b} + a' + d\,x \qquad \text{II — III — A}$$

denklemleri de, $x = b$ düşeyi ile $y = a' + d\,x$ doğrusunu asimptotları kabul eden bir hiperbolü gösterirler.

İkinci ve üçüncü tip hiperboller arasındaki fark, II — C ve III — C yazılış şekillerinden de anlaşılacağı üzere, ikincide köklerin (eğer varsa) yani hiperbolün x eksenini kestiği noktaların y eksenine göre simetrik oluşudur.

7) $y = a + \dfrac{c}{x} + d\,x$ yada $y\,x = a\,x + c + d\,x^2$ hiperbolü

$y\,x = z$ dersek,

$$\Sigma\,(z - z_1)^2 = \Sigma\,(a\,x + c + d\,x^2 - y\,x)^2 = \min.$$

ve buradan a, c ve d ye göre parça türevleri alınmak yoluyla,

$$\frac{\delta\,\Sigma}{\delta\,a} = 2\,\Sigma\,(a\,x + c + d\,x^2 - y\,x).\;x = 0$$

$$\frac{\delta\,\Sigma}{\delta\,c} = 2\,\Sigma\,(a\,x + c + d\,x^2 - y\,x).\;1 = 0$$

$$\frac{\delta\,\Sigma}{\delta\,d} = 2\,\Sigma\,(a\,x + c + d\,x^2 - y\,x).\;x^2 = 0$$

buradan da,

$$a\,.\,\Sigma\,x^2 + c\,.\,\Sigma\,x + d\,.\,\Sigma\,x^3 = \Sigma\,y\,x^2$$

$$a\,.\,\Sigma\,x + c\,.\,n + d\,.\,\Sigma\,x^2 = \Sigma\,y\,x$$

$$a\,.\,\Sigma\,x^3 + c\,.\,\Sigma\,x^2 + d\,.\,\Sigma\,x^4 = \Sigma\,y\,x^3$$

üç bilinmeyenli - üçlü denklem sistemi elde edilir.

Birinci veri takımına uygulama :

x	y	x^2	x^3	x^4	$y\,x$	$y\,x^2$	$y\,x^3$
2	3	4	8	16	6	12	24
5	5	25	125	625	25	125	625
6	4	36	216	1 296	24	144	864
7	6	49	343	2 401	42	294	2 058
7	8	49	343	2 401	56	392	2 744
9	11	81	729	6 561	99	891	8 019
36	37	244	1 764	13 300	252	1 858	14 334

$$\begin{aligned} 244\,a + 36\,c + 1\,764\,d &= 1\,858 \\ 36\,a + 6\,c + 244\,d &= 252 \\ 1\,764\,a + 244\,c + 13\,300\,d &= 14\,334 \end{aligned}$$

Bu üçlü denklem sisteminin çözümü, yine aynen bir normal parabol denklem sisteminde yapıldığı gibidir.

Kolaylık olsun deye, birinciyle ikincinin sırası değiştirilip, denklemlerde mümkün olan sadeleştirmeler yapıldıktan sonra, birinciden a bulunup, ikinci ve üçüncüde yerlerine konulmak yoluyla,

$$\begin{aligned} 18\,a + 3\,c + 122\,d &= 126 \\ 122\,a + 18\,c + 882\,d &= 929 \\ 882\,a + 122\,c + 6\,650\,d &= 7\,167 \end{aligned}$$

$$a = \frac{126 - 3\,c - 122\,d}{18}$$

$$122 \cdot \frac{126 - 3\,c - 122\,d}{18} + 18\,c + 882\,d = 929$$

$$882 \cdot \frac{126 - 3\,c - 122\,d}{18} + 122\,c + 6\,650\,d = 7\,167$$

$$61 \cdot \frac{126 - 3\,c - 122\,d}{9} + 18\,c + 882\,d = 929$$

$$49 \cdot (126 - 3\,c - 122\,d) + 122\,c + 6\,650\,d = 7\,167$$

$$7\,686 - 183\,c - 7\,442\,d + 162\,c + 7\,938\,d = 8\,361$$
$$6\,174 - 147\,c - 5\,978\,d + 122\,c + 6\,650\,d = 7\,167$$

$$-21\,c + 496\,d = 675$$
$$-25\,c + 672\,d = 993$$

ikili denklem sistemine inilir. Bu da katsayıların eşitlenmesi yoluyla çözümlenirse,

$$\pm 525\,c \mp 12\,400\,d = \mp 16\,875$$
$$-525\,c + 14\,112\,d = 20\,853$$

$$1\,712\,d = 3\,978$$
$$d = \frac{3\,978}{1\,712} = \frac{1\,989}{856} \cong 2{,}323\,598$$

$$\pm 14\,112\,c \mp 333\,312\,d = \mp 453\,600$$
$$-12\,400\,c + 333\,312\,d = 492\,528$$

$$1\,712\,c = 38\,928$$
$$c = \frac{38\,928}{1\,712} = \frac{19\,464}{856} \cong 22{,}738\,318$$

bulunur. c ve d nin bu değerleri a da yerine konulmak suretiyle de,

$$a = \frac{1}{18}\left(126 - 3 \cdot \frac{19\,464}{856} - 122 \cdot \frac{1\,989}{856}\right)$$

$$a = \frac{1}{18} \quad \frac{107\,856 - 58\,392 - 242\,658}{856} = \frac{-193\,194}{18 \cdot 856}$$

$$a = -\frac{10\,733}{856} \cong -12{,}538\,551$$

olarak elde edilirler.

Ç ö z ü m ü n kontrolü :

Çözüm sırasında düşülecek herhangi bir yanlışı önlemek yada sonuçların doğruluğunu kanıtlamak için, yine kontrol hesabına başvurulur. Kontrol, bulunan a, c ve d değerlerinin, en baştaki üçlü denklem sisteminde yerlerine konulmasıyla yapılır. Eşitliklerin gerçekleşmesi halinde çözüm doğru, aksi halde yanlış yapılmış demektir.

$$244 \cdot \left(-\frac{10\ 733}{856}\right) + 36 \cdot \frac{19\ 464}{856} + 1\ 764 \cdot \frac{1\ 989}{856} = 1\ 858$$

$$36 \cdot \left(-\frac{10\ 733}{856}\right) + 6 \cdot \frac{19\ 464}{856} + 244 \cdot \frac{1\ 989}{856} = 252$$

$$1\ 764 \cdot \left(-\frac{10\ 733}{856}\right) + 244 \frac{19\ 464}{856} + 13\ 300 \cdot \frac{1\ 989}{856} = 14\ 334$$

$$-\ 2\ 618\ 852 + 700\ 704 + 3\ 508\ 596 = 1\ 590\ 448$$

$$-\ 386\ 388 + 116\ 784 + 485\ 316 = 215\ 712$$

$$-\ 18\ 933\ 012 + 4\ 749\ 216 + 26\ 453\ 700 = 12\ 269\ 904$$

Fonksiyon Denklemi

Bulunan a, c, d değerlerinin fonksiyon denkleminde yerlerine konmasıyla denklem

$$y = \frac{1\ 989\ x^2 - 10\ 733\ x + 19\ 464}{856\ x}$$

yada yaklaşık denklem,

$$y = \frac{22{,}738}{x} - 12{,}539 + 2{,}3236\ x$$

olacaktır.

Düzeltilmiş değerler

x = 2, 5, 6, 7, 9 değerlerinin, fonksiyon denkleminde yerine konmasıyla, düzeltilmiş değerler

x	$y_{düz}$
2	3,478
5	3,627
6	5,193
7	6,975
9	10,900

olarak bulunur.

Çizim

1) Düşey asimptot: $x = 0$ iken $y = \frac{19464}{0} = \mp \infty$ olacağından, y ekseni eğrinin düşey asimptotudur.

2) Eğik asimptot: Fonksiyon, $y = \frac{c}{x}$ ikizkenar hiperbolüyle $y = a + d\,x$ doğrusunun toplamı olduğu için, $y = a + d\,x$ doğrusu, hiperbolün eğik asimptotu olacaktır.

Buna göre asimptot doğrusunun denklemi,

$$y = \frac{1\,989\,x - 10\,733}{856}$$

dır.

Bu doğrunun eksenler sistemine yerleştirilmesi için, herhangi iki noktasının bilinmesi yeterlidir. Doğru, bu iki noktanın bir cetvelle birleştirilmesiyle çizilir. Ancak kontrol için üçüncü bir nokta alınmalıdır. Bu nokta, çizilen doğru üzerinde bulunmalıdır. Böylece asimptot doğrusu denkleminde,

$$x = 0 \text{ için } y = -\frac{10\,733}{856} \cong -12{,}539$$

$$y = 0 \quad » \quad 1\,989\,x - 10\,733 = 0 \text{ dan } x = \frac{10\,733}{1989} \cong 5{,}396$$

$$x = 10 \quad » \quad y \cong 10{,}697$$

noktalarının yardımıyla asimptotu çizebiliriz.

3) Maksimum-minimum noktaları: Bu noktaların absis (x) değerlerini bulmak için, fonksiyonun türevi alınarak sıfıra eşitlenir. Böylece,

$$y = a + \frac{c}{x} + dx \quad \text{de türev,}$$

$$y' = -\frac{c}{x^2} + d = \frac{dx^2 - c}{x^2} = 0 \quad \text{dan,}$$

$$dx^2 - c = 0 \quad \text{ve buradan da,}$$

$$x = \mp\sqrt{\frac{c}{d}}$$ olur. (Maksimum-minimum noktalarının absisleri).

Noktaların ordinat (y) değerlerini bulmak içinse, x in bu değeri fonksiyon denkleminde yerine konur. Böylece,

$$y = a \mp \frac{c}{\sqrt{\frac{c}{d}}} \mp d \sqrt{\frac{c}{d}}$$

$$y = a \mp 2\sqrt{cd} \qquad \text{olur.}$$

Böylece maksimum-minimum noktasının koordinatları,

$$x = \mp \sqrt{\frac{c}{d}}$$

$$y = a \mp 2\sqrt{cd}$$

dir.

Buna göre hiperbolümüzün maksimum-minimum noktaları,

$$x = \mp \sqrt{\frac{19\,464}{1\,989}} \cong \mp 3{,}128$$

$$y = -\frac{10\,733}{856} \mp 2\sqrt{\frac{19\,464}{856} \cdot \frac{1\,989}{856}}$$

$$= \frac{-10\,733 \mp 2\sqrt{19\,464 \cdot 1\,989}}{856} \text{ dan,}$$

$y_1 \cong 1{,}999$

$y_2 \cong -27{,}076$

olarak bulunur

4) Kökler (eğrinin x eksenini kestiği noktalar): Fonksiyon denklemi sıfır'a eşitlenerek bulunur. Böylece

$$dx^2 + ax + c = 0 \quad \text{dan,}$$

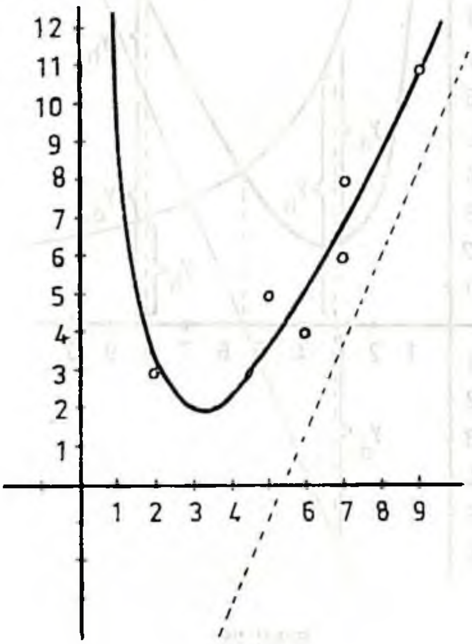
$$x_{1,2} = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 - 4cd}}{2d} = \frac{10\,733 \mp \sqrt{(10\,733)^2 - 4 \cdot 19\,464 \cdot 1\,989}}{2 \cdot 1\,989}$$

$$= \frac{10\,733 \mp \sqrt{115\,197\,289 - 154\,855\,584}}{2 \cdot 1\,989}$$

Karekök içi negatif olacağı nedeniyle kökler yoktur. Eğri x eksenini kesmemektedir.

5) Özel değerler: $x = 1$ için $y \cong 12,523$

Düzeltilmiş değerlerle bu bilgilere göre çizilen hiperbol şekil 27 de görülmektedir

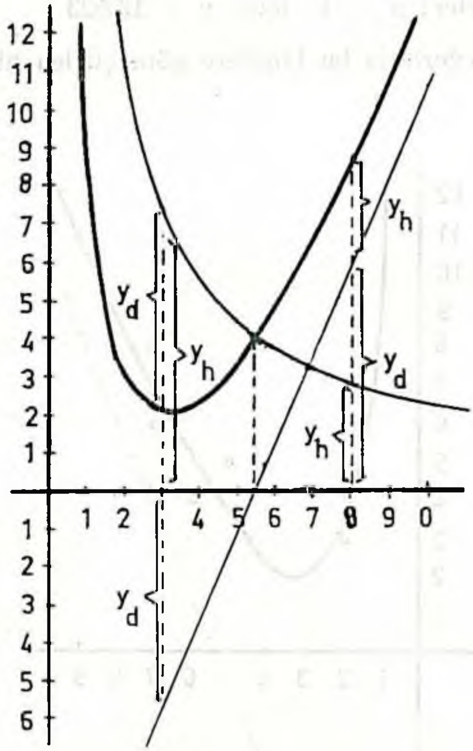


Şekil 27

Çizimi, $y = \dfrac{22,738}{x}$ ikizkenar hiperbolüyle $y = 2,3236\,x - 12,539$ doğrusunun toplamı olarakta yapmak mümkündür. Ancak bu halde, maksimum-minimum noktalarının yerleri tam tamına belirlenemez; çizim tam sağlıklı değildir. Bu bakımdan bu çizim, ilk çizimin kontrolü şeklinde düşünülebilir. Şekil 28.

σ nın hesabı

Noktaların, eğri boyunca serpilme derecesinin ölçüsü olan ve dolayısiyle noktalar arasından geçirilecek eğrinin seçiminde belirteç olarak kullanılan σ nın hesabı, yine daha önce görülen örneklerde yapıldığı gibidir



Şekil 28

x	y	$y_{düz}$	$y_{düz} - y$	$(y_{düz} - y)^2$
2	3	3,478	+ 0,478	0,228 484
5	5	3,627	— 1,373	1,885 129
6	4	5,193	+ 1,193	1,423 249
7	6	6,975	+ 0,975	0,950 625
7	8	6,975	— 1,025	1,050 625
9	11	10,900	— 0,100	0,010 000
				5,548 112

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (y_{düz} - y)^2}{n}} = \sqrt{\frac{5,548\ 112}{6}} = \sqrt{0,924\ 685}$$

$$\sigma = 0,962$$

Hatırlatma

Burada çözüm transformasyon yoluyla verilmiştir.

Çözüm düz yoldan da yapılabilir. Bunun için,

$$\Sigma\,(y - y_i)^2 = \Sigma\,(a + \frac{c}{x} + dx - y)^2 = \text{min.} \qquad \text{dan,}$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta a} = 2\,\Sigma\,(a + \frac{c}{x} + dx - y)\cdot 1 = 0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c} = 2\,\Sigma\,(a + \frac{c}{x} + dx - y)\cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta d} = 2\,\Sigma\,(a + \frac{c}{x} + dx - y)\cdot x = 0 \qquad \text{yoluyla elde edilen,}$$

$$a\cdot n + c\cdot\Sigma\frac{1}{x} + d\cdot\Sigma x = \Sigma y$$

$$a\cdot\Sigma\frac{1}{x} + c\cdot\Sigma\frac{1}{x^2} + d\cdot n = \Sigma\frac{y}{x}$$

$$a\cdot\Sigma x + c\cdot n + d\cdot\Sigma x^2 = \Sigma yx$$

normal denklemleri uygulanmalıdır.

Bu denklemlerin kullanılmasıyla elde edilen, birinci veri takımına ait fonksiyon,

$$y = \frac{18{,}659}{x} - 10{,}513 + 2{,}125\,x \qquad (\sigma = 0{,}936)$$

dır. Çizim ilkeleri transformasyonla elde edilen fonksiyon çiziminde yapıldığı gibi olup çizilecek şekil de yine şekil 27 nin benzeridir.

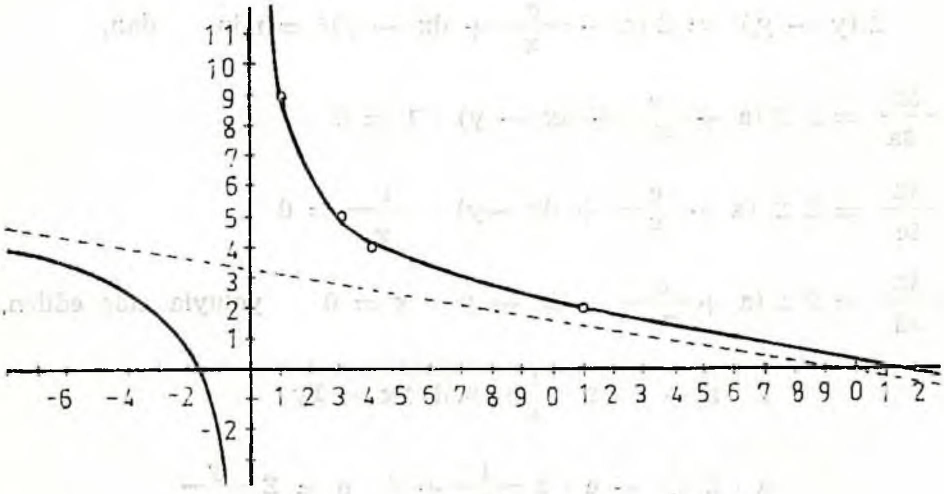
İkinci veri takımı,

x	y
9	1
3	5
4	4
11	2

için denklem,

$$y = \frac{221\ 172 + 118\ 871\ x - 6\ 015\ x^2}{36\ 436\ x} \qquad (\sigma = 0{,}147)$$

dir. Bu fonksiyon eğrisi şekil 29 da görülmektedir.



Şekil 29

8) $yx = by + c + dx^2$ yada $y = \dfrac{dx^2 + c}{x - b}$ hiperbolü

Fonksiyonun ilk yazılış şeklinde, $yx = z$ dersek,

$\Sigma (z - z_i)^2 = \Sigma (by + c + dx^2 - z)^2 = \min.$ ve buradan b, c, d ye göre parça türev yoluyla,

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta b} = 2 \Sigma (by + c + dx^2 - yx) \cdot y = 0$$

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta c} = 2 \Sigma (by + c + dx^2 - yx) \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta d} = 2 \Sigma (by + c + dx^2 - yx) \cdot x^2 = 0$$ buradan da,

$$\begin{aligned} b \cdot \Sigma y^2 + c \cdot \Sigma y + d \cdot \Sigma yx^2 &= \Sigma y^2 x \\ b \cdot \Sigma y + c \cdot n + d \cdot \Sigma x^2 &= \Sigma y x \\ b \cdot \Sigma yx^2 + c \cdot \Sigma x^2 + d \cdot \Sigma x^4 &= \Sigma yx^3 \end{aligned}$$

üç bilinmeyenli-üçlü denklem sistemi elde edilir.

Birinci veri takımıyla çizilen eğri, noktaların gidişine uygun düşmemektedir. Bu bakımdan bu verilerin sonuncusunu biraz değiştirerek denklemlere uygulayalım.

x	y	x^2	x^3	x^4	y^2	yx	yx^2	yx^3	y^2x
2	3	4	8	16	9	6	12	24	18
5	5	25	125	625	25	25	125	625	125
6	4	36	216	1 296	16	24	144	864	96
7	6	49	343	2 401	36	42	294	2 058	252
7	8	49	343	2 401	64	56	392	2 744	448
9	26	81	729	6 561	676	234	2 106	18 954	6 084
	52	244		13 300	826	387	3 073	25 269	7 023

$$\begin{aligned} 826\,b + 52\,c + 3\,073\,d &= 7\,023 \\ 52\,b + 6\,c + 244\,d &= 387 \\ 3\,073\,b + 244\,c + 13\,300\,d &= 25\,269 \end{aligned}$$

Bu üçlü denklem sisteminin çözümü, yine parabol denklem üçlüsünde olduğu gibi yapılacaktır. Böylece ikinci denklemden b yi bulup, birinci ve üçüncüde yerlerine koymakla,

$$b = \frac{387 - 6\,c - 244\,d}{52}$$

$$826 \cdot \frac{387 - 6\,c - 244\,d}{52} + 52\,c + 3\,073\,d = 7\,023$$

$$3\,073 \cdot \frac{387 - 6\,c - 244\,d}{52} + 244\,c + 13\,300\,d = 25\,269$$

$$413 \cdot \frac{387 - 6\,c - 244\,d}{26} + 52\,c + 3\,073\,d = 7\,023$$

$$3\,073 \cdot \frac{387 - 6\,c - 244\,d}{52} + 244\,c + 13\,300\,d = 25\,269$$

$$159\,831 - 2\,478\,c - 100\,772\,d + 1\,352\,c + 79\,898\,d = 182\,598$$

$$1\,189\,251 - 18\,438\,c - 749\,812\,d + 12\,688\,c + 691\,600\,d = 1\,313\,988$$

$$- 1\,126\,c - 20\,874\,d = 22\,767$$

$$- 5\,750\,c - 58\,212\,d = 124\,737$$

ikili denklem sistemine inilir. Bu ikili de, yine katsayıların eşitlenmesi yoluyla çözümlenir. Ancak burada,

$$1\,126 = 2 \cdot 563 \qquad 20\,874 = 2 \cdot 10\,437$$
$$5\,750 = 2 \cdot 2\,875 \qquad 58\,212 = 2 \cdot 29\,106$$

olduğu nedeniyle, ilk denklem 2 875 ve 29 106 ile, ikinci denklem 563 ve 10 437 ile genişletilebilir. Böylece,

$$\begin{array}{r}
\pm 3\,237\,250\,c \pm 60\,012\,750\,d = \mp 65\,455\,125 \\
-3\,237\,250\,c - 32\,773\,356\,d = 70\,226\,931 \\
\hline
27\,239\,394\,d = 4\,771\,806
\end{array}$$

$$d = \frac{4\,771\,806}{27\,239\,394} = \frac{122\,354}{698\,446} \cong 0{,}175\,180\,3$$

$$\begin{array}{r}
-32\,773\,356\,c - 607\,558\,644\,d = 662\,656\,302 \\
\pm 60\,012\,750\,c \pm 607\,558\,644\,d = \mp 1\,301\,880\,069 \\
\hline
27\,239\,394\,c = -639\,223\,767
\end{array}$$

$$c = -\frac{639\,223\,767}{27\,239\,394} = -\frac{16\,390\,353}{698\,446} \cong -23{,}466\,886$$

bulunur. Bu değerleri de b de yerine koymakla,

$$b = \frac{1}{52}\left(387 + 6 \cdot \frac{16\,390\,353}{698\,446} - 244 \cdot \frac{122\,354}{698\,446}\right)$$

$$b = \frac{338\,786\,344}{52 \cdot 698\,446} = \frac{6\,515\,122}{698\,446} \cong 9{,}328\,025\,3$$

olarak elde edilir.

H e s a b ı n kontrolu :

Çözümün kontrolu, bulunan b, c, d değerlerinin yukarıki ilk denklem üçlüsünde yerlerine konulmakla yapılır. Eşitlikler gerçekleşirse, çözüm doğru demektir. Böylece :

$$\begin{array}{llll}
826 \cdot \dfrac{6\,515\,122}{698\,446} & -52 \cdot \dfrac{16\,390\,353}{698\,446} & +3\,073 \cdot \dfrac{122\,354}{698\,446} & = 7\,023 \\
52 \cdot \quad » & 6 \cdot \quad » & 244 \cdot \quad » & = 387 \\
3\,073 \cdot \quad » & 244 \cdot \quad » & 13\,300 \cdot \quad » & = 25\,269
\end{array}$$

5 381 490 772 —	852 298 356 +	375 993 842 =	4 905 186 258
338 786 344 —	98 342 118 +	29 854 376 =	270 298 602
20 020 969 906 —	3 999 246 132 +	1 627 308 200 =	17 649 031 974

D e n k l e m

Üçüncü yazılış şekliyle fonksiyon denklemi,

$$y = \frac{dx^2 + c}{x - b} \qquad y = \frac{122\,354\,x^2 - 16\,390\,353}{698\,446\,x - 6\,515\,122}$$

dir.

Düzeltilmiş değerler

Düzeltilmiş y değerleri, bulunan denklemde $x = 2, 5, 6, 7, 9$ konularak hesaplanır. Böylece,

x	$y_{düz}$
2	3,107
5	4,410
6	5,156
7	6,393
9	28,282

olacaktır.

Ç i z i m

1) Düşey asimptot:

$y = \dfrac{dx^2 + c}{x - b}$ de paydayı sıfır yapan $x = b \cong 9{,}328$ için $y = \mp \infty$

2) Eğik asimptot:

$$y = \frac{dx^2 + c}{x - b} = dx + bd + \frac{c'}{x - b} \qquad \text{olup burada,}$$

$$y = dx + bd = 0{,}175\,18\,x + 9{,}328\,025\,3 \cdot 0{,}175\,180\,3$$

$$y = 0{,}175\,18\,x + 1{,}634$$

eğik asimptot doğrusu denklemini vermektedir

Bu doğruyu çizmek için,

$x = 0$ için $y \cong 1{,}634$

$y = 0$ » $x = -b \cong -9{,}328$ $\quad (dx + bd = 0$ dan) olacaktır. Bu iki noktayla asimptot doğrusu çizilirse de, kontrol bakımından üçüncü bir noktanın alınmasında yarar vardır. Böylece örneğin,

$$x = 10 \text{ için} \quad y \cong 3{,}386$$

olacaktır. Bu nokta da çizilen doğru üzerine gelmelidir.

3) Maksimum-minimum noktaları:

$$y = \frac{dx^2 + c}{x - b} \qquad \text{de türev almakla,}$$

$$y' = \frac{2d\,x\,(x - b) - (dx^2 + c)}{(x - b)^2} = \frac{dx^2 - 2bdx - c}{(x - b)^2} = 0 \quad \text{yada,}$$

$$dx^2 - 2bdx - c = 0 \qquad \text{ve buradan,}$$

$$x_{1,2} = \frac{bd \mp \sqrt{b^2d^2 + dc}}{d} = b \mp \sqrt{b^2 + \frac{c}{d}}$$

Max.-min. noktalarının x değerleri bulunur.

Bulunan bu x değerlerinin, fonksiyon denkleminde yerine konulmasıyla da max.-min. noktalarının y değerleri bulunur:

$$y = \frac{dx^2 + c}{x - c} = \frac{d\left(b^2 \mp 2b\sqrt{b^2 + \frac{c}{d}} + b^2 + \frac{c}{d}\right) + c}{b \mp \sqrt{b^2 + \frac{c}{d}} - b}$$

$$y = \frac{2d\left(b^2 + \frac{c}{d} \mp b\sqrt{b^2 + \frac{c}{d}}\right)}{\sqrt{b^2 + \frac{c}{d}}}$$

$$y = 2d\left(\sqrt{b^2 + \frac{c}{d}} \mp b\right)$$

$$y = 2dx$$

Böylece maksimum-minimum noktalarının koordinatları,

$$x_{1,2} = b \mp \sqrt{b^2 + \frac{c}{d}}$$

$$y_{1,2} = 2dx$$

olacaktır.

Örneğimizde,

$$x_{1,2} = b \mp \sqrt{b^2 + \frac{c}{d}} = 9{,}328 \mp \sqrt{\left(\frac{6\,515\,122}{698\,446}\right)^2 + \frac{-16\,390\,353}{122\,354}}$$

$$= 9{,}328 \mp \sqrt{87{,}012\,057 - 133{,}958\,457}$$

bulunur. Karekök içi negatif olduğu nedeniyle kökler, dolayısıyla maksimum-minimum noktaları yoktur.

4) Kökler: Hiperbolün x eksenini kestiği noktalar,

$$y = 0 = dx^2 + c \qquad \text{den,}$$

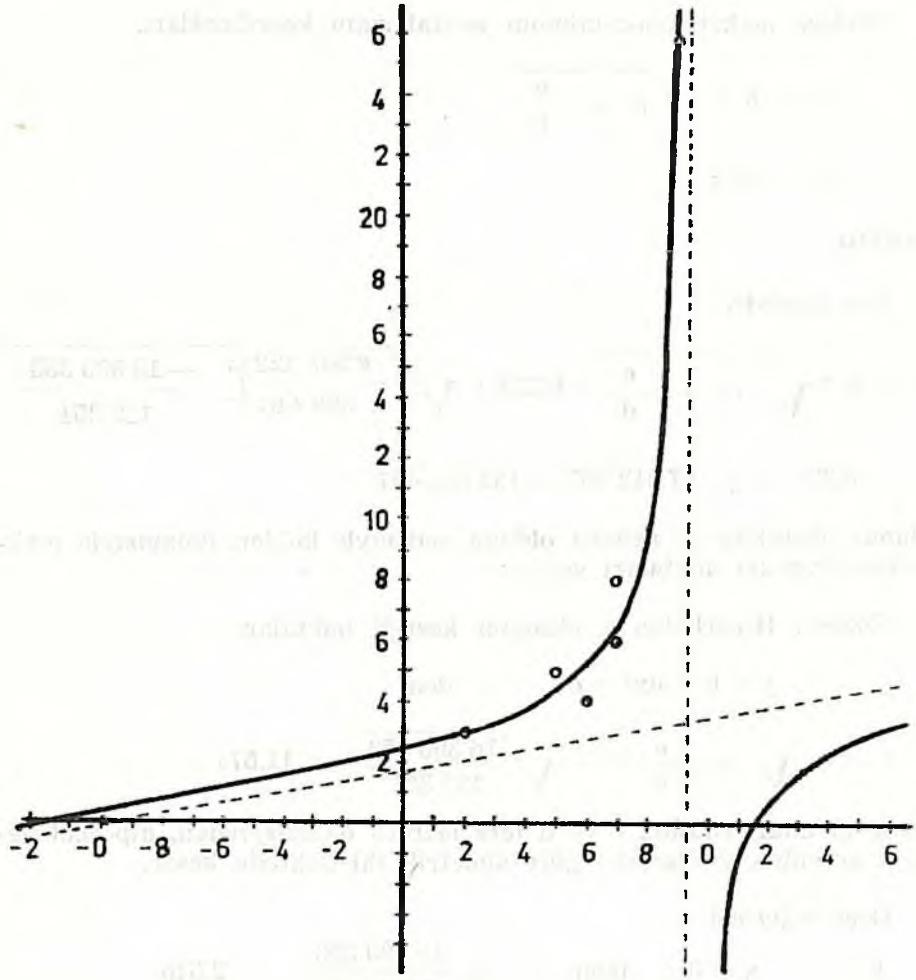
$$x = \mp \sqrt{-\frac{c}{d}} = \mp \sqrt{\frac{16\,390\,353}{122\,354}} \cong \mp\, 11{,}574$$

olarak bulunur. Burada c ve d ters işaretli olduklarından, hiperbol eğrisi x eksenini, y eksenine göre simetrik iki noktada keser.

5) Özel değerleri

$$y = - \qquad x = 0 \qquad \text{iken} \quad \frac{c}{b} = \frac{16\,390\,353}{6\,515\,122} \cong 2{,}516$$

İki asimptot koordinat sistemine yerleştirildikten sonra, düzeltilmiş değerlerle, çizim özel değerleri yardımıyla hiperbol çizilebilir. Şekil 30.



Şekil 30

σ nın h e s a b ı

x	y	$y_{düz}$	$y_{düz} - y$	$(y_{düz} - y)^2$
2	3	3,107	+ 0,107	0,011 449
5	5	4,410	— 0,590	0,348 100
6	4	5,156	+ 1,156	1,336 336
7	6	6,393	+ 0,393	0,154 449
7	8	6,393	— 1,607	2,582 449
9	26	28,282	+ 2,282	5,207 524
				9,640 307

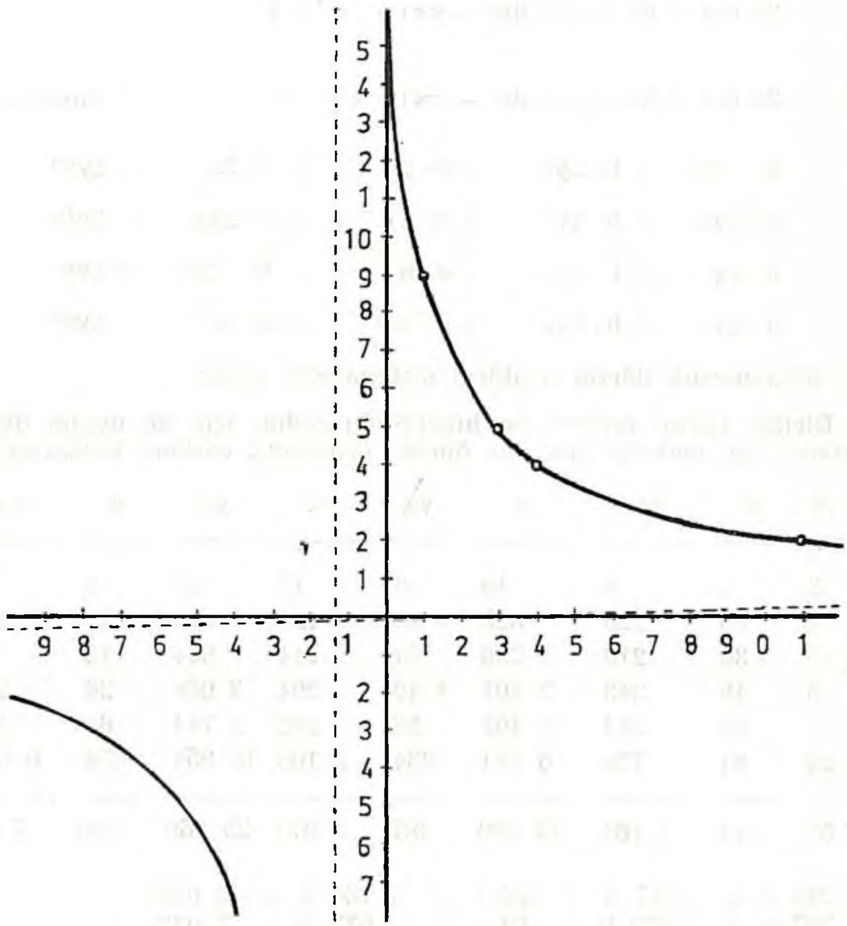
$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (y_{düz} - y)^2}{n}} = \sqrt{\frac{9{,}640\,307}{6}} = \sqrt{1{,}606\,718}$$

$\sigma \cong 1{,}268$

İkinci veri takımı için fonksiyon denklemi,

$$y = \frac{6\,242\,x^2 + 4\,597\,272}{216\,741\,x + 293\,436} \qquad (\sigma = 0{,}036)$$

olup eğri şekil 31 de görülmektedir.



Şekil 31

9) $yx = ax + by + c + dx^2$ yada $y = \dfrac{dx^2 + ax + c}{x - b}$ hiperbolü

$yx = z$ dersek,

$\Sigma (z - z_i)^2 = \Sigma (ax + by + c + dx^2 - yx)^2 = min$ ve buradan,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta a} = 2\Sigma (ax + by + c + dx^2 - yx) \cdot x = 0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b} = 2\Sigma (ax + by + c + dx^2 - yx) \cdot y = 0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c} = 2\Sigma (ax + by + c + dx^2 - yx) \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta d} = 2\Sigma (ax + by + c + dx^2 - yx) \cdot x^2 = 0$$ buradan da,

$$\begin{aligned}
a \cdot \Sigma x^2 &+ b \cdot \Sigma yx + c \cdot \Sigma x + d \cdot \Sigma x^3 = \Sigma yx^2 \\
a \cdot \Sigma yx &+ b \cdot \Sigma y^2 + c \cdot \Sigma y + d \cdot \Sigma yx^2 = \Sigma y^2x \\
a \cdot \Sigma x &+ b \cdot \Sigma y + c \cdot n + d \cdot \Sigma x^2 = \Sigma yx \\
a \cdot \Sigma x^3 &+ b \cdot \Sigma yx^2 + c \cdot \Sigma x^2 + d \cdot \Sigma x^4 = \Sigma yx^3
\end{aligned}$$

dört bilinmeyenli dörtlü denklem sistemi elde edilir.

Birinci takım verileri bu hiperbolün çizimi için de uygun düşmemektedir. Bu nedenle yine bir önceki örnekteki verileri kullanacağız.

x	y	x^2	x^3	x^4	yx	yx^2	yx^3	y^2	y^2x
2	3	4	8	16	6	12	24	9	18
5	5	25	125	625	25	125	625	25	125
6	5	36	216	1 296	24	144	864	16	96
7	6	49	343	2 401	42	294	2 058	36	252
7	8	49	343	2 401	56	392	2 744	64	448
9	26	81	729	6 561	234	2 106	18 954	676	6 084
36	52	244	1 764	13 300	387	3 073	25 269	826	7 023

$$\begin{aligned}
244\,a &+ 387\,b + 36\,c + 1\,764\,d = 3\,073 \\
387\,a &+ 826\,b + 52\,c + 3\,073\,d = 7\,023 \\
36\,a &+ 52\,b + 6\,c + 244\,d = 387 \\
1\,764\,a &+ 3\,073\,b + 244\,c + 13\,300\,d = 25\,269
\end{aligned}$$

Bu dört bilinmeyenli-dörtlü denklem sisteminin çözümü, üçüncü derece genel denklemi'ndeki gibi yapılacaktır. Bunun için denklemlerin herhangi birinden, örneğin en küçük katsayılı olan üçüncüden a bulunarak, diğer üç denklemde yerlerine konur ve gereken hesaplamalar yapılırsa, dörtlü denklem sistemi, üçlü sisteme indirgenmiş olur:

$$a = \frac{387 - 52\,b - 6\,c - 244\,d}{36}$$

$$244 \cdot \frac{387 - 52\,b - 6\,c - 244\,d}{36} + 387\,b + 36\,c + 1\,764\,d = 3\,073$$

$$387 \cdot \frac{387 - 52\,b - 6\,c - 244\,d}{36} + 826\,b + 52\,c + 3\,073\,d = 7\,023$$

$$1\,764 \cdot \frac{387 - 52\,b - 6\,c - 244\,d}{36} + 3\,073\,b + 244\,c + 13\,300\,d = 25\,269$$

$$61 \cdot \frac{387 - 52\,b - 6\,c - 244\,d}{9} + 387\,b + 36\,c + 1\,764\,d = 3\,073$$

$$43 \cdot \frac{387 - 52\,b - 6\,c - 244\,d}{4} + 826\,b + 52\,c + 3\,073\,d = 7\,023$$

$$49 \cdot (387 - 52\,b - 6c - 244\,d) + 3\,073\,b + 244\,c + 13\,300\,d = 25\,269$$

$$23\,607 - 3\,172b - 336\,c - 14\,884\,d + 3\,483\,b + 324\,c + 15\,876\,d = 27\,657$$

$$16\,641 - 2\,236\,b - 258\,c - 10\,492\,d + 3\,304\,b + 208\,c + 12\,292\,d = 28\,092$$

$$18\,963 - 2\,548\,b - 294\,c - 11\,956\,d + 3\,073\,b + 244\,c + 13\,300\,d = 25\,269$$

$$311\,b - 42\,c + 992\,d = 4\,050$$

$$1\,068\,b - 50\,c + 1\,800\,d = 11\,451$$

$$525\,b - 50\,c + 1\,344\,d = 6\,306$$

Bu üçlü denklem sistemi de, yine örneğin ilk denklemden b bulunmak ve ikinci, üçüncü denklemlerde yerlerine konulmak yoluyla ikili sisteme dönüştürülür:

$$b = \frac{4\,050 + 42\,c - 992\,d}{311}$$

$$1\,068 \cdot \frac{4\,050 + 42\,c - 992\,d}{311} - 50\,c + 1\,800\,d = 11\,451$$

$$525 \cdot \frac{4\,050 + 42\,c - 992\,d}{311} - 50\,c + 1\,344\,d = 6\,306$$

$$4\,325\,400 + 44\,856\,c - 1\,059\,456\,d - 15\,550\,c + 559\,800\,d = 3\,561\,261$$

$$2\,126\,250 + 22\,050\,c - 520\,800\,d - 15\,550\,c + 417\,984\,d = 1\,961\,166$$

$$29\,306\,c - 499\,656\,d = -764\,139$$

$$6\,500\,c - 102\,816\,d = -165\,084$$

$$29\,306\,c - 499\,656\,d = -764\,139$$

$$1\,625\,c - 25\,704\,d = -41\,271$$

Bu ikili denklem de, katsayıların eşitlenmesi yoluyla çözümlenir:

$$\mp 47\,622\,250\,c \pm 811\,941\,000\,d = \pm 1\,241\,725\,875$$

$$47\,622\,250\,c - 753\,281\,424\,d = -1\,209\,487\,926$$

$$58\,659\,576\,d = 32\,237\,949$$

$$d = \frac{32\,237\,949}{58\,659\,576} = \frac{3 \cdot 311 \cdot 34\,553}{3 \cdot 311 \cdot 62\,872} = \frac{34\,553}{62\,872}$$

$$d \cong 0{,}549\,576\,9$$

$$\mp 753\,281\,424\,c \pm 12\,843\,157\,824\,d = \pm 19\,641\,428\,856$$

$$811\,941\,000\,c - 12\,843\,157\,824\,d = -20\,621\,302\,776$$

$$58\,659\,576\,c = -979\,873\,920$$

$$c = -\frac{979\,873\,920}{58\,659\,576} = -\frac{1\,050\,240}{62\,872} \cong -16{,}704\,415\,32$$

c ve d nin bulunan değerleri, yukarıda, b de yerlerine konularak b bulunur:

$$b = \frac{1}{311}\left(4\,050 - 42 \cdot \frac{1\,050\,240}{62\,872} - 992 \cdot \frac{34\,553}{62\,872}\right)$$

$$b = \frac{176\,244\,944}{311 \cdot 62\,872} = \frac{566\,704}{62\,872} \cong 9{,}013\,614\,9$$

Son olarak ta, bulunan b, c ve d nin bu değerleri, a da yerlerine konularak, a bulunur:

$$a = \frac{1}{36}\left(387 - 52\cdot\frac{566\,704}{62\,872} + 6\cdot\frac{1\,050\,240}{62\,872} - 244\cdot\frac{34\,553}{62\,872}\right)$$

$$a = -\frac{7\,266\,636}{36\cdot 62\,872} = -\frac{201\,851}{62\,872} \cong -3{,}210\,507$$

Ç ö z ü m ü n kontrolu

Dört bilinmeyenli-dörtlü bir denklem sisteminde, çözüm bir hayli uzun ve karışıktır; hesaplamalarda hataya düşme olasılığı yüksektir. Bu bakımdan, çözümün sağlama yada kontrol hesabına mutlak bir gereksinme vardır. Kontrol, bulunan a, b, c, d değerlerinin, ilk denklem dörtlüsünde yerlerine konulması yoluyla yapılır. Eşitliklerin gerçeklenmesi, çözümün doğruluğunu kanıtlar.

$$\begin{array}{rlrlrl}
-\;244\cdot & \dfrac{201\,851}{62\,872} & +\;387\cdot & \dfrac{566\,704}{62\,872} & -\;36\cdot & \dfrac{1\,050\,240}{62\,872} \\
-\;387\cdot & \text{»} & 826\cdot & \text{»} & 52\cdot & \text{»} \\
-\;36\cdot & \text{»} & 52\cdot & \text{»} & 6\cdot & \text{»} \\
-1\,764\cdot & \text{»} & 3\,073\cdot & \text{»} & 244\cdot & \text{»}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlrr}
+\;1\,764\cdot & \dfrac{34\,553}{62\,872} & = & 3\,073 \\
3\,073\cdot & \text{»} & = & 7\,023 \\
244\cdot & \text{»} & = & 387 \\
13\,300\cdot & \text{»} & = & 25\,269
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
-\;49\,251\,644 & +\;219\,314\,448 & -\;37\,808\,640 & +\;60\,951\,492 \\
-\;78\,116\,337 & +\;468\,097\,504 & -\;54\,612\,480 & +\;106\,181\,369 \\
-\;7\,266\,636 & +\;29\,468\,608 & -\;6\,301\,440 & +\;8\,430\,932 \\
-\;356\,065\,164 & +\;1\,741\,481\,392 & -\;256\,258\,560 & +\;459\,554\,900
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
= & 193\,205\,656 \\
= & 441\,550\,056 \\
= & 24\,331\,464 \\
= & 1\,588\,712\,568
\end{array}$$

F o n k s i y o n denklemi

Üçüncü yazılış şekline göre denklem, bulunan a, b, c, d değerlerinin yerlerine konmasıyla,

$$y = \frac{dx^2 + ax + c}{x - b}$$

$$y = \frac{34\,553\,x^2 - 201\,851\,x - 1\,050\,240}{62\,872\,x - 566\,704}$$

olarak elde edilir.

D ü z e l t i l m i ş değerlerin hesabı

Düzeltilmiş değerler, $x = 2, 5, 6, 7, 9$ değerlerinin denklemde yerine konmasıyla bulunur. Böylece,

x	$y_{düz}$
2	2,984
5	4,738
6	5,370
7	6,083
9	79,563

olacaktır.

Ç i z i m

1) Düşey asimptot : $y = \dfrac{dx^2 + ax + c}{x - b}$ de paydayı sıfır kılan, $x = b \cong 9{,}014$ için $y = \mp \infty$ olur.

2) Eğik asimptot: Eğik asimptot doğrusu denklemi,

$$y = \frac{dx^2 + ax + c}{x - b} = dx + (a + bd) + \frac{(a + bd) \cdot b + c}{x - b} \text{den}$$

$$y = dx + (a + bd)$$

$$y = 0{,}5496\,x + (-3{,}210\,507 + 9{,}013\,614\,9 \cdot 0{,}549\,576\,9)$$

$$y = 0{,}5496\,x + 1{,}743$$

Asimptot doğrusunu çizmek için,

$x = 0$ iken $y \cong 1{,}743$

$y = 0$ iken $x = -\dfrac{1{,}743\,167\,5}{0{,}549\,576\,9} \cong -3{,}172$

$x = 10$ iken $y \cong 7{,}239$

noktaları alınabilir. Bu üç noktadan, iki uçta yer alan ikisi, bir cetvelle birleştirilirse asimptot doğrusu çizilmiş olur. Kontrol noktası olarak alınmış olan ortadaki nokta da, bu doğru üzerinde bulunmalıdır.

3) Maksimum-minimum noktaları: Fonksiyonun türevi sıfıra eşitlenerek kökler aranırsa,

$$y = \frac{dx^2 + ax + c}{x - b}$$

$$y' = \frac{(2dx + a)\,(x - b) - 1\,(dx^2 + ax + c)}{(x - b)^2} = 0 \quad \text{yada,}$$

$$dx^2 - 2bdx - (ab + c) = 0$$

$$x^2 - 2bx - \frac{ab + c}{d} = 0 \quad \text{dan,}$$

$$x_{1,2} = b \mp \sqrt{b^2 + \frac{ab + c}{d}}$$

olarak maksimum-minimum noktalarının x değerleri bulunur.

Bu değerin de $y = \dfrac{dx^2 + ax + c}{x - b}$ fonksiyon denkleminde yerine konmasıyla, maksimum-minimum noktalarının y değerleri,

$$y_{1,2} = \frac{d\left(b \mp \sqrt{b^2 + \frac{ab + c}{d}}\right)^2 + a\left(b \mp \sqrt{b^2 + \frac{ab + c}{d}}\right) + c}{b \mp \sqrt{b^2 + \frac{ab + c}{d}} - b}$$

$$= 2d\left(\sqrt{b^2 + \frac{ab + c}{d}} + b\right) + a$$

$$= 2dx_{1,2} + a$$

olarak elde edilir.

Örneğimizde,

$$x_{1,2} = 9{,}014 \mp \sqrt{(9{,}013\,615)^2 + \frac{-3{,}210\,507 \cdot 9{,}013\,615 - 16{,}704\,415}{0{,}549\,577}}$$

$$= 9{,}014 \mp \sqrt{81{,}245\,255 - 83{,}050\,581}$$

dir. Karekök içi negatif çıktığından, kökler yada max.-min. noktaları yoktur

4) Kökler (eğrinin x eksenini kestiği noktalar):

$dx^2 + ax + c = 0$ dan,

$x_{1,2} = \dfrac{-a \mp \sqrt{a^2 - 4cd}}{2d}$ ile bulunur. Böylece,

$$x_{1,2} = \frac{201\,851 \mp \sqrt{(201\,851)^2 - 4 \cdot (-1\,050\,240)\,(34\,553)}}{2 \cdot 34\,553}$$

$x_1 \cong 9{,}160$

$x_2 \cong -3{,}318$ dir.

5) Özel değerler

$x = 0$ için $y = \dfrac{1\,050\,240}{566\,704} \cong 1{,}853$

Asimptotlar, maksimum-minimum noktaları, kökler, özel değerler ve düzeltilmiş değerler yardımıyla hiperbol eğrisi çizilebilir. Şekil 32.

σ nın hesabı

x	y	$y_{düz}$	$y_{düz} - y$	$(y_{düz} - y)^2$
2	3	2,984	— 0,016	0,000 256
5	5	4,738	— 0,262	0,068 644
6	4	5,370	+ 1,370	1,876 900
7	6	6,083	+ 0,083	0,006 889
7	8	6,083	— 1,917	3,674 889
9	26	79,563	+ 53,563	2868,994 969
				2874,622 547

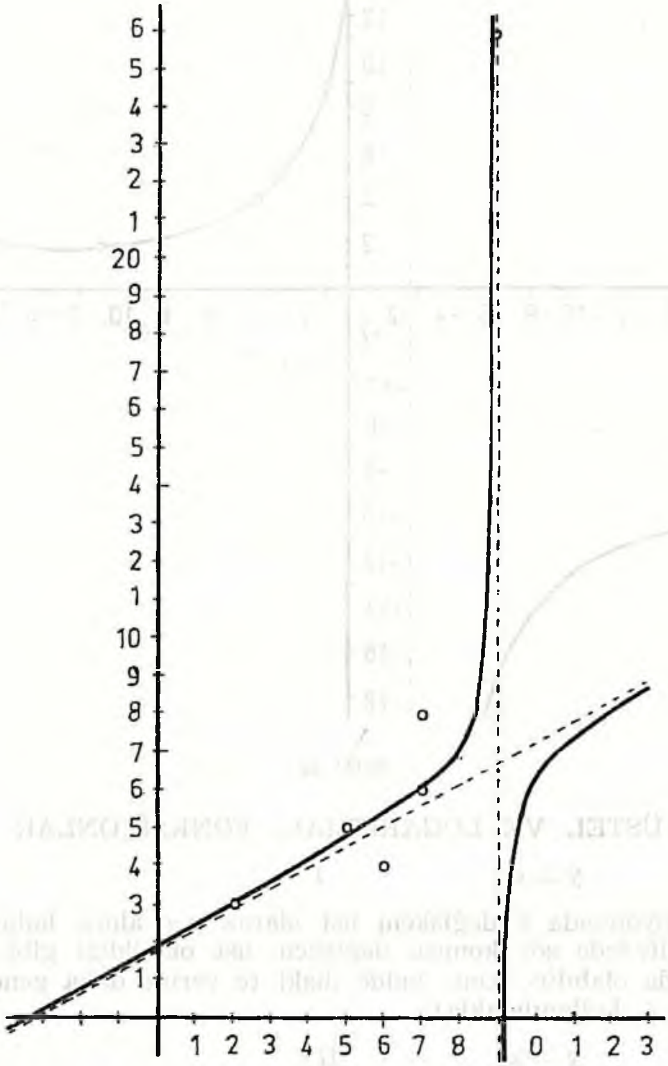
$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\,(y_{düz} - y)^2}{n}} = \sqrt{\frac{2\,874{,}622\,547}{6}} = \sqrt{479{,}103\,758}$$

$\sigma \cong 21{,}888$

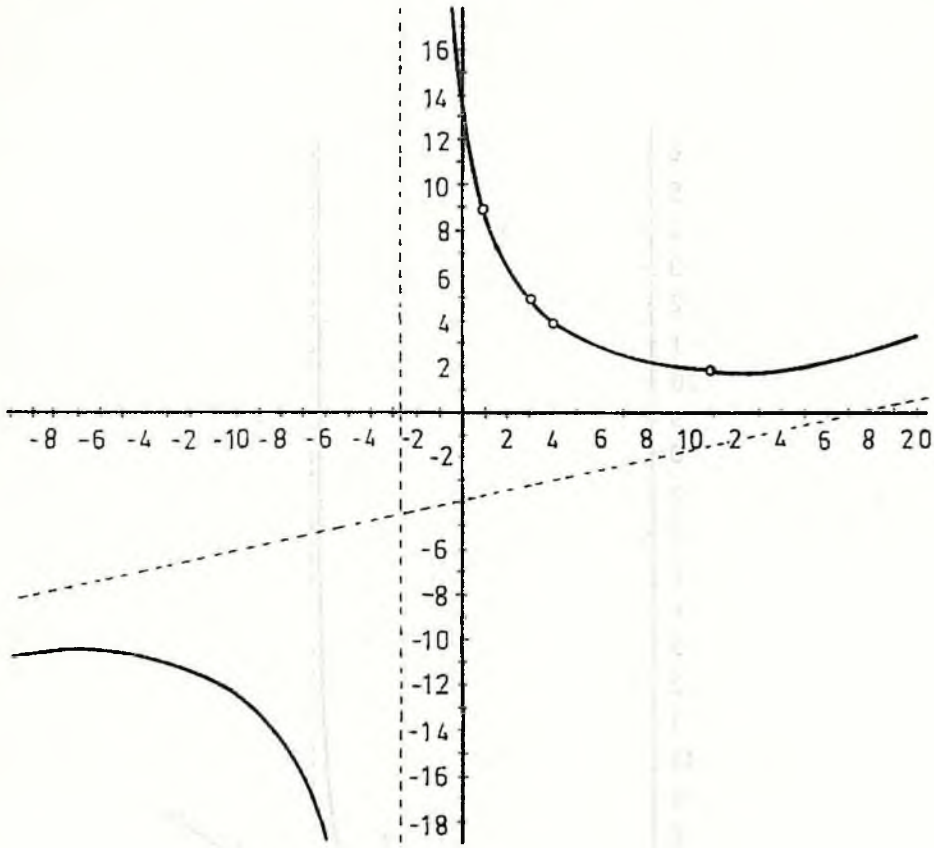
İkinci veri takımına ait denklem,

$$y = \frac{9\,x^2 - 131\,x + 1\,472}{41\,x + 109}$$

dir. Bu hiperbol eğrisi şekil 33 de görülmektedir.



Şekil 32



Şekil 33

ÜSTEL VE LOGARİTMALI FONKSİYONLAR

$$y = e^x \qquad \text{I}$$

üstel fonksiyonunda x değişkeni üst olarak yer almış bulunmaktadır. Böyle bir ifadede söz konusu değişken, üst olabildiği gibi, taban da fonksiyon da olabilir. İkinci halde ilişki (e yerine daha genel bir gösterim için a kullanılmakla),

$$y = x^a \qquad \text{II}$$

üçüncü haldeyse $x = e^y$ olacaktır. Bu sonuncu halde ifade, neperyen logaritması alınmakta, $y = \ln x$ yada daha alışkın olduğumuz gösterimle,

$$y = \log x \qquad \text{III}$$

şeklini alacaktır.

Üstel, üstlü ve logaritma fonksiyonları, ancak logaritma yardımıyla hesaplanabilmeleri nedeniyle, üstel ve logaritma fonksiyonları ailesini oluştururlar.

İlk iki ifadenin logaritmalarını alalım ve üçüncüyle birlikte yazalım:

$$\log y = a' \cdot x \qquad \text{I} \qquad (\log e = a')$$

$$\log y = a \cdot \log x \qquad \text{II}$$

$$y = \log x \qquad \text{III}$$

Görüldüğü gibi, ilk ve sonuncu ifadelerin yalnız bir tarafları logaritmalı olduğu halde, ikinci ifadenin iki tarafı da logaritmalıdır. Bu yüzden, ilk ve üçüncü ifadelere yarı logaritmalı, ikinci ifadeye tam logaritmalı fonksiyonlar adı da verilmektedir. (4. S. 220).

Biz burada inceleyeceğimiz üstel ve logaritmalı fonksiyonları, yukarıda gösterilen en basit ifadeleriyle değil, kullanılan şekilleri olan,

$$y = a \cdot e^{bx} \qquad \text{yada} \qquad \log y = a' + b' \cdot x$$

$$y = a \cdot x^{b} \qquad \text{»} \qquad \log y = a' + b \cdot \log x$$

$$y = \log a \cdot x^{b} \qquad \text{»} \qquad y = a' + b \cdot \log x$$

ifadeleriyle ele alacağız.

10) $y = ae^{bx}$ Üstel fonksiyonu

Fonksiyon, logaritması alınırsa,

$$\underbrace{\log y}_{z} = \underbrace{\log a}_{a'} + x \cdot \underbrace{b \log e}_{b'}$$

$$\log y = a' + b' x$$

doğru denklemi şekline getirilmiş olur. Buradan doğru denklemleri ikilisi sistemine benzeterek,

$$a' \cdot n \quad + b' \cdot \Sigma x = \Sigma \log y$$

$$a' \cdot \Sigma x + b' \cdot \Sigma x^2 = \Sigma x \cdot \log y$$

şeklindeki Gauss denklemleri elde edilir.

Birinci veri takımına uygulama :

x	y	x^2	log y	x · log y
2	3	4	0,47 712	0,95 424
5	5	25	0,69 897	3,49 485
6	4	36	0,60 206	3,61 236
7	6	49	0,77 815	5,44 705
7	8	49	0,90 309	6,32 163
9	11	81	1,04 139	9,37 251
36	37	244	4,50 078	29,20 264

$$\begin{aligned}
6a' + 36b' &= 4{,}50\,078\\
36a' + 244b' &= 29{,}20\,264\\
\hline
a' + 6b' &= 0{,}75\,013\\
9a' + 61b' &= 7{,}30\,066\\
\hline
\mp 9a' \mp 54b' &= \mp 6{,}75\,117\\
9a' + 61b' &= 7{,}30\,066\\
\hline
7b' &= 0{,}54\,949\\
b' &= 0{,}07\,849\,857
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
61a' + 366b' &= 45{,}75\,793\\
\mp 54a' \mp 366b' &= \mp 43{,}80\,396\\
\hline
7a' &= 1{,}95\,397\\
a' &= 0{,}27\,914
\end{aligned}$$

Bu ikili denklem sistemi, yine doğru denklemlerinde yapıldığı gibi çözümlenecektir. Burada ilk denklem 6 ile, ikincisi 4 ile sadeleştirilebileceğinden önce bu işlemin yapılması, daha küçük sayılarla çalışılacağı yönünden çözüme bir kolaylık getirir. Daha sonra ilk denklemin katsayıları ikinciyle, ikincinin katsayıları birinciyle çarpılmak yoluyla katsayılar eşitlenir. Böylece,

bulunur.

Ç ö z ü m ü n kontrolu

Çözümün kontrolu, yine bulunan a′ ve b′ değerlerinin, yukarıdaki ilk denklem ikilisinde yerlerine konulmasıyla yapılır. Eşitliklerin gerçeklenmesi, çözümün doğruluğunu kanıtlar. Böylece:

$$\begin{aligned}
6 \cdot 0{,}27\,914 + 36 \cdot 0{,}07\,849\,857 &= 4{,}50\,078\\
36 \cdot 0{,}27\,914 + 244 \cdot 0{,}07\,849\,857 &= 29{,}20\,264\\
\hline
1{,}67\,484 \quad + \quad 2{,}82\,595 &= 4{,}50\,079\\
10{,}04\,904 \quad + 19{,}15\,365 &= 29{,}20\,269
\end{aligned}$$

a ve b nin bulunması :

$a' = \log a = 0{,}27\,914$ den, $a = 1{,}9017$	$b' = b \cdot \log e = 0{,}43\,429\, b = 0{,}07\,849\,857$ den de, $b = 0{,}180\,752$

bulunur.

Fonksiyon denklemi

Bulunan a (a') ve b (b') üstel fonksiyonda yerlerine konursa, fonksiyon denklemi,

$$y = 1{,}9017 \cdot e^{0{,}180\,752\, x} \qquad \text{yada,}$$

$$\log y = 0{,}27\,914 + 0{,}7\,849\,86 \cdot x$$

olarak elde edilir.

Düzeltilmiş değerler

Fonksiyon denkleminin ikinci yazılış şeklinde $x = 2, 5, 6, 7, 9$ konularak elde edilen düzeltilmiş değerlerin hesaplaması, yine logaritma yardımıyla olur.

$x = 2$ için örnek hesaplama:

$$\log y = 0{,}27\,914 + 0{,}07\,849\,86 \cdot 2 \quad (*)$$

$$\begin{array}{rr} & 0{,}27\,914 \\ + & 0{,}15\,700 \\ \hline \log y = & 0{,}43\,614 \\ y = & 2{,}730 \end{array}$$

(*) Burada x in katsayısının, virgülden sonra kaç hane uzatılacağı konusu. Örneğin 0,0785 alınması uygun olur mu? Önce gelen değişmez sayı, logaritma sayısı olarak, virgülden sonra beş basamaklı olduğu için, bu ikinci sayı da böyle olmalıdır.

5 ile çarpım halini düşünürsek,

$5 \,.\, 0{,}078\,5 = 0{,}39\,250$

$5 \,.\, 0{,}078\,499 = 0{,}39\,249\,5$

$5 \,.\, 0{,}078\,498\,6 = 0{,}39\,249\,30$

$5 \,.\, 0{,}078\,498\,57 = 0{,}39\,249\,285$ olacaktır. Görüldüğü gibi, burada aranan sayı olan 0,39 249, ancak virgülden sonraki yedinci rakamla elde edilebilmektedir.

Böylece bulunan düzeltilmiş değerler aşağıdadır:

x	$\log y_{\text{düz}}$	$y_{\text{düz}}$
2	0,43 614	2,730
5	0,67 163	4,695
6	0,75 013	5,625
7	0,82 863	6,740
9	0,98 563	9,675

Çizim

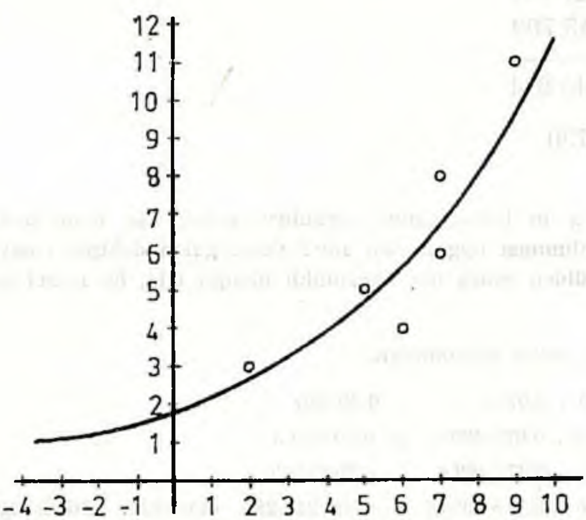
$x = -\infty$ için $y = 0$ $\left(e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0\right)$

$x = +\infty$ » $y = +\infty$

$x = 0$ » $y = a \cong 1{,}9017$ $(e^0 = 1)$

Eğri kesiksizdir.

Bu özel değerler ve düzeltilmiş değerler yardımıyla çizilen eğri şekil 34 de görülmektedir.



Şekil 34

σ nın h e s a b ı.

x	y	log $y_{düz}$	$y_{düz}$	$y_{düz} - y$	$(y_{düz} - y)^2$
2	3	0,43 614	2,730	— 0,270	0,072 900
5	5	0,67 163	4,695	— 0,305	0,093 025
6	4	0,75 013	5,625	+ 1,625	2,640 625
7	6	0,82 863	6,740	+ 0,740	0,547 600
7	8	0,82 863	6,740	— 1,260	1,587 600
9	11	0,98 563	9,675	— 1,325	1,755 625
	37	4,50 079	36,205	+ 2,365	6,697 375
			— 37	— 3,160	
			— 0,795	— 0,795	

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(y_{düz} - y)^2}{n}} = \sqrt{\frac{6{,}697\,375}{6}} = \sqrt{1{,}116\,229}$$

$\sigma = 1{,}057$

İstatistik yöntemler'de, verilerin aritmetik ortalamadan ayrılışları ölçüsü olan ve $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\bar{y} - y)^2}{n}}$ formülüyle hesaplanan standart ayrılış, bilindiği gibi, «Aritmetik ortalamadan ayrılışların cebirsel toplamının sıfır; ayrılış kareleri toplamının minimum olması» ilkesine dayandırılmaktadır.

Bu ilke, Gauss'un En küçük kareler yöntemi'yle hesaplanan, eğri değerlerinden (yada düzeltilmiş değerlerden) ayrılışlar için de söz konusudur. [$\Sigma(y - y_i)^2 = \text{min.}$ olarak alındığı hatırlanırsa]. Yani,

«Eğri değerlerinden ayrılışların cebirsel toplamı sıfır; ayrılış kareleri toplamı minimumdur.» [$\Sigma(y_{düz.} - y) = 0$ ve $\Sigma(y_{düz.} - y)^2 = \text{min.}$]

Eğri değerleri yada düzeltilmiş değerler, İstatistik yöntemler'de, teorik frekans yada beklenen değer olarak da adlandırılırlar.

$\Sigma(y_{düz.} - y) = 0$ yada $\Sigma y_{düz.} = \Sigma y$ dir. Doğru, parabol üçüncü derece eğrisi ile düz yoldan (ikinci yol) hesaplanan $y = a + \frac{c}{x}$ ikizkenar hiperbolü ve yine düz yoldan hesaplanan $y = a + \frac{c}{x} + d\,x$ hiperbolünde bulunan değerler için böyle olduğu, gerekli toplamalar yapılırsa, hemen gözlemlenebilir.

Ama transformasyonlar yoluyla elde edilen $y_{düz}$ değerleri için, bu doğru değildir (nitekim burada

$$\Sigma y = 37; \quad \Sigma y_{düz.} = 36{,}205 \quad \text{ve} \quad \Sigma y_{düz.} - \Sigma y = -0{,}795$$

olarak elde edilmişlerdir); doğru olan

$$\Sigma (z_{düz.} - z) = 0 \quad \text{yada} \quad \Sigma z_{düz.} = \Sigma z$$

dir (örneğimizde

$$\Sigma z_{düz.} = \Sigma \log y_{düz.} = 4{,}50\,079; \quad \Sigma z = \Sigma \log y = 4{,}50\,078$$

olduğu görülmektedir.)

Burada madem ki $\Sigma (y_{düz.} - y)$ cebirsel toplamı sıfır değildir; o halde $\Sigma (y_{düz.} - y)^2$ kareleri toplamı da minimum olmayacaktır. Dolayısıyle σ nın hesabının buna dayandırılması da doğru olmaz. Gerçekte, doğru olan $\Sigma (z_{düz.} - z)^2 = \Sigma (\log y_{düz.} - \log y)^2$ ye dayandırılması gerekir.

Benzer durum, transformasyonla hesaplanan ikizkenar hiperbollerle, hiperboller için de söz konusudur.

Ne var ki biz burada, gerçeği tam olarak yansıtmasa da, daha önce ele alınan eğrilerle karşılaştırma olanağı vermesi bakımından, σ nın hesabı için yine y değerlerini kullanmayı yeğleyoruz.

$\Sigma (\log y_{düz.} - \log y) = 0$ hesaplamasınında, bir kontrol hesabı olarak yapılmasını uygun buluyoruz.

Ü s t e l fonksiyonlar üzerine hatırlatmalar

1) Bazı eserlerde üstel fonksiyonun,

$$y = k \, . \, 10^{c\,x}$$

şekliyle, 10 tabanlı olarak gösterildiği görülmektedir. (7. S. 116).

Yukarıdanberi yapılan hesaplamalar bu fonksiyona göre düzenlenebileceği gibi, elde edilen fonksiyon denkleminden bu denkleme de geçilebilir. Bunun için,

$k = a$ dir ve $10^c = e^b$ yazılır ve logaritma alınırsa $(\log 10 = 1)$,

$$c = b \, . \log e = b'$$

olur. Böylece fonksiyonumuzun 10 tabanına göre yeni gösterilişi,

$$y = 1{,}9017 \; . \; 10^{0{,}07\,849\,86 \; . \; x} \qquad \text{yada,}$$

$$\log y = 0{,}27\,914 + 0{,}07\,849\,86 \; . \; x$$

olarak elde edilir.

Yine bazı eserlerdeyse, fonksiyon

$$y = A \, . \, B^x$$

şeklinde gösterilmektedir. (6. S. 127).

Fonksiyonu bu biçime getirmek için de,

$$A = a \quad \text{ve} \quad B^x = e^{bx} = (e^b)^x \quad \text{den} \quad B = e^b$$

$(\log B = b \, . \log e = b')$ alınması yeterlidir.

Örneğimizde,

$$\log B = b' = 0{,}07\ 850 \quad \text{olduğundan,}$$

$$B = 1{,}1981 \quad \text{bulunur.}$$

Buna göre örnek fonksiyonumuz,

$$y = 1{,}9017 \, . \, (1{,}1981)^x \quad \text{yada,}$$

$$\log y = 0{,}27\ 914 + 0{,}07\ 849\ 86 \, . \, x$$

olacaktır.

2) $y = a \, . \, e^{b\,x}$ üstel fonksiyonu,

$$y = e^{a_1 + b\,x}$$

şeklinde de gösterilebilir.

$(a = e^{a_1}$ dersek, $a \, . \, e^{bx} = e^{a_1} \, . \, e^{bx} = e^{a_1 + bx}$ olur).

Bu halde fonksiyonun ikinci yazılış şekli yine değişmeyecektir :

$$\log y = \underbrace{a_1 \, . \log e}_{a'} + x \, . \, \underbrace{b \, . \log e}_{b'}$$

$$\log y = a' + b' \, x$$

Yukarıda elde edilen fonksiyonu, bu şekle getirmek için

$$e^{a_1} = a \quad \text{dan} \quad a_1 \, . \log e = \log a$$

$$a_1 = \frac{\log a}{\log e} = \frac{a'}{\log e}$$

yi hesaplamak yeterlidir. Buna göre fonksiyonumuz,

$$a_1 = \frac{a'}{\log e} = \frac{0{,}27\ 914}{0{,}43\ 429} = 0{,}642\ 750\ 2 \quad \text{den,}$$

$$y = e^{0,64\ 275 + 0,18\ 075\ 2\ .\ x} \qquad \text{yada,}$$

$$\log y = 0,27\ 914 + 0,07\ 849\ 86\ .\ x$$

olacaktır.

Ü s t e l fonksiyon eğrisinin karakteri

Bileşik faizle çoğalan bir kapitalin, birinci, ikinci, üçüncü, ... n'inci yıllar sonundaki baliğlerinin (kapital + faiz),

$$k\ .\ 1{,}0p;\quad k\ .\ (1{,}0p)^2;\quad k\ .\ (1{,}0p)^3;\ \ldots\quad k\ .\ (1{,}0p)^n$$

şeklinde bir geometrik dizi oluşturdukları bilinir. (3. S. 176).

$k\ .\ (1{,}0p)^n$ genel ifadesiyse, $b\ .\ a^x$ şeklindeki bir üstel fonksiyondan başka bir şey değildir.

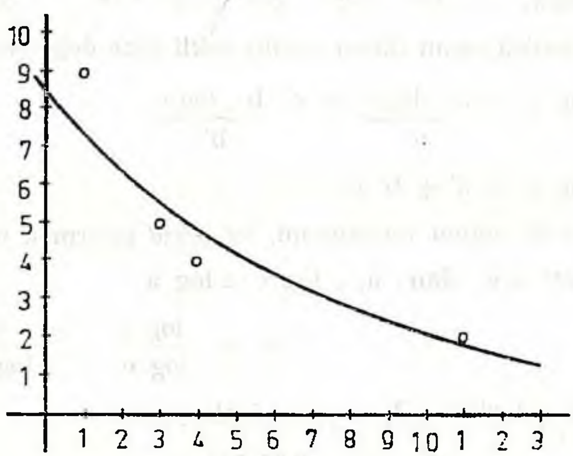
Canlılarda çoğalma (nüfus artışı) ve büyümenin zamana göre değişimi, hernekadar ölümler ve büyüme hızı yada yüzdesinin hep aynı kalmaması nedenleriyle, kapitalin bileşik faizle çoğalması haline tam olarak uymazsa da, aralarında yine de bir benzerlik düşünülebilir. Bu nedenle üstel fonksiyon eğrisine bileşik faiz yada biyolojik gelişme eğrisi de denilmektedir. (5. S. 162).

İkinci veri takımı için, azalan üstel fonksiyon

$$y = 8{,}3424\ .\ e^{-0{,}1368\ x} \qquad \text{yada,}$$

$$\log y = 0{,}92\ 129 - 0{,}05\ 941\ 3\ .\ x \qquad (\sigma = 0{,}993)$$

dir. Bu fonksiyona ait eğri şekil 35 de görülmektedir.



Şekil 35

e tabanlı üstel fonksiyon eğrisi, alçalan eğri olarak, ormancılıkta ilk defa de Liocourt tarafından, seçme ormanında göğüs çapı - ağaç sayısı ilişkisini göstermek amacıyla kullanılmıştır. (2. S. 249).

LOGARİTMİK GRAFİKLER

$$y = a \,.\, e^{b\,x} \qquad\qquad y = a \,.\, x^{b} \qquad \mathrm{I}$$

$$\log y = \underset{a'}{\log a} + x \,.\, \underset{b'}{b \log e} \qquad\qquad \log y = \underset{a'}{\log a} + b \,.\, \log x$$

$$\underset{Z}{\log y} = a' + b'\,x \qquad\qquad \underset{Z}{\log y} = a' + b \,.\, \underset{X}{\log x} \qquad \mathrm{II}$$

$$Z = a' + b'\,x \qquad\qquad Z = a' + b\,X \qquad \mathrm{III}$$

$$y = \log a \,.\, x^{b} \qquad \mathrm{I}$$

$$y = \underset{a'}{\log a} + b \,.\, \log x$$

$$y = a' + b \,.\, \underset{X}{\log x} \qquad \mathrm{II}$$

$$y = a' + b\,X \qquad \mathrm{III}$$

şekilleriyle verilen üstel ve logaritmik fonksiyon hesaplamalarının, ancak logaritma yardımıyla yapılabilmesi; ayrıca hesaplanabilir durumu getirildiklerinde bir doğru fonksiyonu şekli göstermeleri, doğru fonksiyonlarınınsa en kolay hesaplanır, üzerinde en çok çalışılmış ve ayrıntılarıyla tanınmış olması, söz konusu fonksiyonlara, doğrusal bir yaklaşımla açıklık getirilmesini olanaklı kılar. Böylece logaritmik grafikler düşünüşüne varıyoruz.

Daha önce de belirttiğimiz üzere, (fonksiyonların ikinci yazılış şekillerine bakalım) e tabanlı üstel fonksiyonun y si logaritmalıdır (solda); logaritma fonksiyonunun, benzer biçimde, xi logaritmalıdır (aşağıda); x tabanlı üstlü fonksiyonunsa hem y si, hem de xi logaritmalıdır (sağda).

Böylece e tabanlı (yada 10 tabanlı) üstel fonksiyon, y ekseni logaritma bölüntülü; üçüncü sütundaki logaritma fonksiyonu x ekseni logaritma bölüntülü; ortadaki x tabanlı üstlü fonksiyon da hem y, hem x ekseni logaritma bölüntülü bir dik koordinatlar sistemi üzerine getirilirse, ortaya çıkacak eğri, artık bir doğru olacaktır.

Bir cetvel üzerinde yer alan santimetre ve milimetre bölüntüsü, eşit aralıklı, sayısal bir bölümlemedir.

Logaritma bölüntüsü ise, eşit olmayan bir bölümlemedir.

Hesap cetveli üzerindeki bolüntü, bir logaritma bölüntüsüdür.

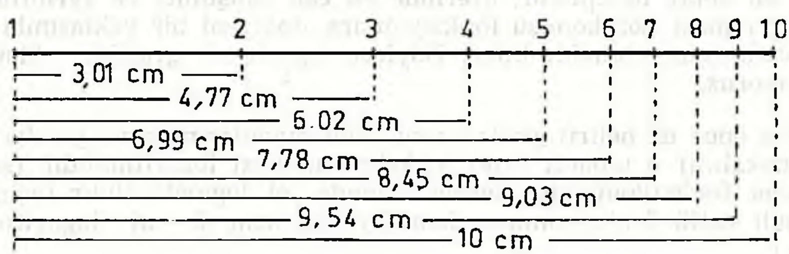
Logaritma bölüntülü bir eksen şöyle yapılmaktadır (birim uzunluk 1 dm = 10 cm kabulle): (1. S. 120).

Bir logaritma cetvelinden,

log 1 = 0	log 3 = 0,47 712	log 10 = 1
log 1,1 = 0,04 139	log 4 = 0,60 206	log 11 = 1,04 139
log 1,2 = 0,07 918	log 5 = 0,69 897	log 12 = 1,07 918
log 1,3 = 0,11 394	log 6 = 0,77 815	log 13 = 1,11 394
:	log 7 = 0,84 510	:
log 2 = 0,30 103	log 8 = 0,90 306	log 20 = 1,30 103
log 2,1 = 0,32 222	log 9 = 0,95 424	log 21 = 1,32 222
log 2,2 = 0,34 242		log 22 = 1,34 242
log 2,3 = 0,36 173		log 23 = 1,36 173
:		:

değerleri alınabilir.

Şimdi eksenin başlangıç yani sıfır noktasına, 0 = log 1 den alarak ve baştaki log kelimesini de atarak 1 yazalım. İkinci nokta olarak, log 2 = 0,30 103 olduğu nedeniyle, 0,30 103 dm, yaklaşık 3 cm uzaklığa, yine baştaki log kelimesini atarak 2 yazalım. Benzer şekilde, log 3 = 0,47 712 den yararlanmak suretiyle, baştan itibaren 0,47 712 dm ≅ 4,77 cm uzaklığa 3 yazalım... Böylece devamla 1 dm = 10 cm ye 10 yazacağız. Bu yolla elde edilen ilk 10 cm lik uzunluk bölüntüsü şekil 36 da görülmektedir.



Şekil 36

10 cm den sonraki uzunluğun bölümlenmesi de, yine aynı şekilde yapılır. Örneğin log 11 = 1,04 139 dan yaklaşık 10,4 cm uzaklığa 11; log 12 = 1,07 918 den, yaklaşık 10,8 cm uzaklığa 12 demekle.

Şimdi yine en başa dönelim. 1 ile 2 arası yaklaşık 3 cm dir. Bu aranın da bölüntülenmesi gerekir. Bölüntüleme ilkesiyse değişmez. Böylece log 1,1 = 0,04 139 dm, yaklaşık 0,4 cm uzaklığa 1,1; log 1,2 = 0,07 918 den yaklaşık 0,8 cm uzaklığa 1,2; ... yazılacaktır. Görüldüğü üzere 10 ilâ 20 arası uzaklığı bölümlemesi, 1 ilâ 2 arası bölümlemesiyle eşdeştir.

Benzer biçimde 2 ile 3 arası (4,7712 — 3,0103 = 1,7609 cm lik ara) da, 10 parçaya bölünebilirse de, 3 den sonraki aralığın, pek sıkışık olacağı nedeniyle, 5 parçaya bölünmesi ve 7 den sonraki uzunluğunsa 2 parça halinde bölüntülenmesi uygun olur. Piyasada satılan logaritmik bölüntülü kâğıtlarda, çokcası 1 ilâ 5 arası 10 a; 5 ilâ 10 arası 5 parçaya bölümlenmiştir.

Bu anlatılanlar birim uzunluk 10 cm olarak alındığı halde geçerlidir. Eğer birim uzunluk 8,7 yada 5 cm olarak alınırsa, sözü edilen logaritma sayılarını 0,8; 0,7; 0,5 ile çarpmak gerekir. Böylece bölüntü, bu ölçek oranında küçültülmüş olacaktır.

Burada dikkat edilmesi, unutulmaması gereken önemli husus, logaritma bölümlemesinde başlangıç noktasının sıfır değil (1) olması ve sıfır noktasının asla bulunmayışıdır. (1 den önceki bölümlemede başlangıç noktası 0,1; ondan öncekinde 0,01; ... dir).

Bir hesap cetveli üzerindeki bölüntüleme de benzer yolda yapılmıştır.

Bu anlatılanların ışığı altında,

$$y = 1{,}9017 \, . \, e^{0{,}180\ 752\ x} \qquad \text{yada,}$$

$$\log y = 0{,}27\ 914 + 0{,}07\ 849\ 86\ x$$

doğrusunu, y ekseni logaritma bölüntülü, fakat x ekseni sayısal bölüntülü dik koordinatlar sistemi üzerine taşıyabiliriz. Şekil 37. (Birim uzunluk 8 cm alınmıştır).

Elde edilecek eğri bir doğru olduğuna, bir doğru da herhangi iki noktasıyla belirlenebileceğine göre, fonksiyona ait herhangi iki noktayı, koordinatlar sistemi üzerine getirdikten sonra, bunları bir doğruyla birleştirmek yeterlidir. Ancak herhangi bir yanlışlığa düşmemek için, kontrol olmak üzere, üçüncü bir noktanın da işaretlenmesinde yarar vardır. Bu nokta, çizilen doğru üzerine gelmelidir.

Böylece,

$x = 0$ için $\log y_{düz.} = 0{,}27\ 914$ den $8 \, . \, 0{,}27\ 914 = 2{,}23\ 312 \cong 2{,}2$ cm

$x = 9$ » $\log y_{düz.} = 0{,}98\ 563$ » $8 \, . \, 0{,}98\ 563 = 7{,}88\ 504 \cong 7{,}9$ cm

$y = 1$ » $x = -\ 3{,}556$ (Doğrunun x eksenini kestiği nokta,

$\log 1 = 0 = 0{,}27\ 914 + 0{,}07\ 849\ 86\ x$ den $x = -\dfrac{0{,}27\ 914}{0{,}07\ 849\ 86} \cong -\ 3{,}556$)

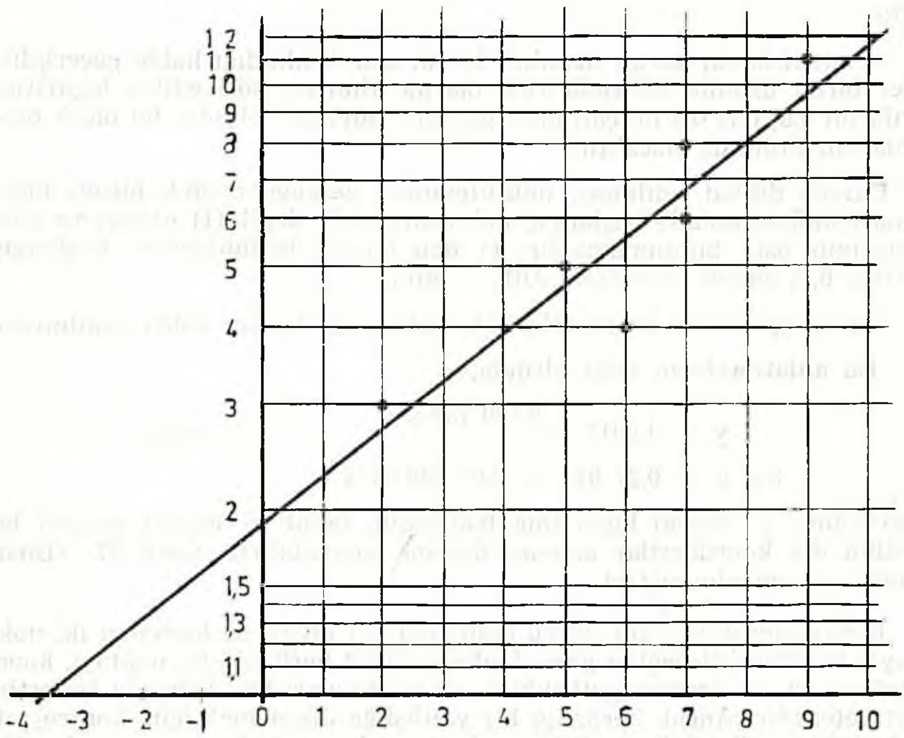
noktaları alınabilir. (Eğer elde muntazam çizilmiş yada piyasadan sağlanmış bir logaritmik grafik kâğıdı varsa, bu noktalar,

$$x = 0 \text{ için } y_{\text{düz.}} \cong 1{,}902$$

$$x = 9 \text{ için } y_{\text{düz.}} \cong 9{,}675 \quad \text{ve,}$$

$$y = 1 \text{ » } x \cong -3{,}556$$

değerleriyle ve göz kararıyla da alınabilirler).



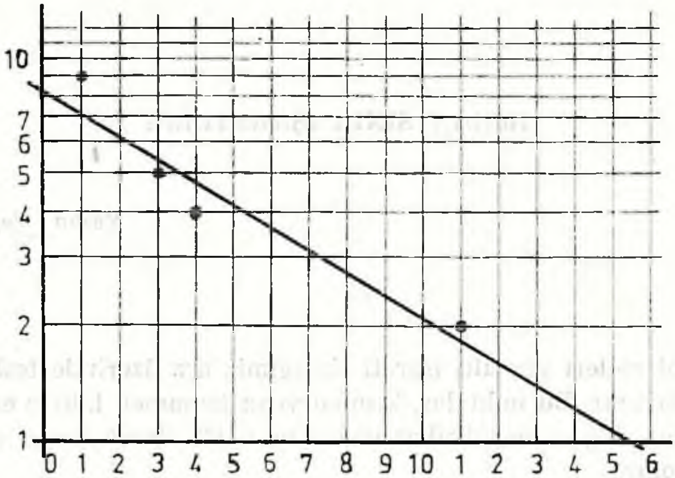
Şekil 37

İkinci veri takımı için bulunan,

$$y = 8{,}3424 \, . \, e^{-0{,}1368 \, x} \qquad \text{yada,}$$

$$\log y = 0{,}92\,129 - 0{,}05941\,3 \, . \, x$$

fonksiyonuna ait logaritmik grafik de şekil 38 de görülmektedir. Burada logaritma bölüntüsü için birim uzunluk 5 cm alınmıştır.



Şekil 38

LİTERATÜR

1. Akgür, A. Necati. Trigonometri. Orman Genel Müdürlüğü yayını, Ankara, 1970.

2. Eraslan, İsmail, Prof Dr. Orman Amenajmanı. İ. Ü. Orman Fakültesi yayını, İstanbul 1971.

3. Fırat, Fehim, Prof. Dr. Ormancılık İşletme İktisadı. İ. Ü. Orman Fakültesi yayını, İstanbul 1971.

4. Günel, Alptekin, Dr. Eğrisel İlişkilerin Doğrusal Hale Getirilmesi ve Doğrusal Çoğul Regresyon Analizi. İ. Ü. Orman Fakültesi Dergisi, Seri B. 1971 — Sayı 1.

5. Işıkara, Baki, Doç. Dr. Regresyon Yöntemleri ve Sorunları. İ. Ü. İktisat Fakültesi yayını, İstanbul 1975.

6. Jeffers, J. N. R. Experimental Design and Analysis in Forest Research. Uppsala 1960.

7. Masiéri, W. Nautions Essentielles de Statistique et Calcul des Probabilités. Paris 1967.