



<http://kefad.ahievran.edu.tr>

Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi

ISSN: 2147 - 1037

Learning Difficulties Encountered by Students Regarding Angles and Medians of Triangles

Orhan Çiftçi
Tevfik İşleyen

Article Information



CrossMark

DOI: 10.29299/kefad.943663

Received: 27.05.2021

Revised: 24.09.2021

Accepted: 20.10.2021

Keywords:

Difficulties Encountered in Learning,
Geometry,
Teaching Geometry,
Triangle,
Bisector,
Median

Abstract

It is known that many students face various difficulties in learning geometry, which is one of the sub-branches of mathematics. Knowing the difficulties encountered in teaching a subject is important for a quality and efficient teaching. The aim of this study is to determine the difficulties that students encounter while learning about the bisector and median of triangle. The case study design, one of the qualitative research methods, was used in the study. The study group consists of 86 secondary school 9th grade students. The data of the study were obtained through the Triangles Knowledge Test prepared by the researchers and face-to-face interviews with the participants in 2014-2015. In the study, descriptive statistics were used in the analysis of the quantitative data obtained and the descriptive analysis method was used in the analysis of qualitative data. As a result of the analysis of the data obtained in the study, 22 different difficulties faced by the students regarding the bisectors and medians of the triangle were identified. It was determined that the difficulties of "not being able to form the bisector of an angle" in the issue of the bisector and "not being able to comprehend whether a point in a triangle is the center of gravity" in the issue of the median are the most encountered difficulties by the students. It is thought that knowing these difficulties about triangle bisectors and medians will contribute to the development of methods and techniques to be applied for better understanding of the subject.

Üçgenin Açortayları ve Kenarortayları Konusunda Öğrencilerin Karşılaştıkları Öğrenme Güçlükleri

Makale Bilgileri



CrossMark

DOI: 10.29299/kefad.943663

Yükleme: 27.05.2021

Düzeltilme: 24.09.2021

Kabul: 20.10.2021

Anahtar Kelimeler:

Öğrenmede Karşılaşılan Güçlükler,
Geometri,
Geometri Öğretimi,
Üçgen,
Açortay,
Kenarortay

Öz

Matematiğin alt dallarından biri olan geometrinin öğreniminde birçok öğrencinin çeşitli zorluklarla karşılaştıkları bilinmektedir. Bir konunun öğretiminde karşılaşılan güçlüklerin bilinmesi kaliteli ve verimli bir öğretimin yapılmasında önemlidir. Bu çalışmanın amacı, öğrencilerin üçgenin açortay ve kenarortayları konusunu öğrenirken karşılaştıkları güçlükleri tespit etmektir. Çalışmada, nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması deseni kullanılmıştır. Çalışma grubunu 86 ortaöğretim 9. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışmanın verileri araştırmacılar tarafından hazırlanan Üçgenler Bilgi Testi ve katılımcılarla yapılan yüz yüze görüşmelerle 2014-2015 yıllarında elde edilmiştir. Çalışmada elde edilen nicel verilerin analizinde betimsel istatistikler, nitel verilerin analizinde ise betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Çalışmada elde edilen verilerin analizleri sonucunda, üçgenin açortayları ve kenarortayları konusunda öğrencilerin karşılaştığı 22 farklı güçlük tespit edilmiştir. Açortay konusunda "Bir açının açortayını oluşturamama", kenarortay konusunda ise "Üçgenin içinde verilen bir noktanın ağırlık merkezi olup olmama durumunu kavrayamama" güçlüklerinin öğrenciler tarafından en çok karşılaşılan güçlükler olduğu belirlenmiştir. Üçgenin açortayları ve kenarortayları konusunda elde edilen bu güçlüklerin bilinmesinin konunun daha iyi anlaşılması yönünde uygulanacak yöntem ve tekniklerin geliştirilmesine katkı sunacağı düşünülmektedir.

Sorumlu Yazar : Orhan Çiftçi, Dr., Milli Eğitim Bakanlığı, Türkiye, orciftci@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-5969-9464.

Tevfik İşleyen, Doç. Dr., Atatürk Üniversitesi, Türkiye, tevfikisleyen@gmail.com, ORCID ID: 0000-0001-9349-4078.

Atf için: Çiftçi, O., & İşleyen, T. (2022). Üçgenin açortayları ve kenarortayları konusunda öğrencilerin karşılaştıkları öğrenme güçlükleri. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23(Özel Sayı), 509-560.

Giriş

Öğrenme güçlüklerinin en çok yaşandığı derslerden birisi olan matematik dersini birçok öğrenci zor olarak görmektedir (Tall ve Razali, 1993). Ön-şart oluş ilişkilerinin güçlü olduğu matematik dersinde bir konuda güçlük yaşayan öğrencinin bu konuyu da kapsayan ileriki konularda başarılı olması zordur (Çiftci, 2018). Genelde matematikte kavramsal bilgiyi anlamadan yapılan işlem öğretimi hatalara ve matematiğin sevilmemesine sebep olabilmektedir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2010). Matematik eğitimi alanyazını incelendiğinde öğrencilerin herhangi bir konuyu öğrenirken karşılaştıkları güçlükler “kavram yanılgısı” ve “hata” terimleri başlıkları altında ele alınmıştır (Bingölbali ve Özmantar, 2014). Kavram yanılgısı bir öğrencinin uzun zamandır kabul ettiği, birden fazla durumlarda ortaya çıkan, öğrenci tarafından kolay değiştirilemeyen, bilimsel gerçeklerle çelişen kavramalar iken hata ise matematiksel ifadelerin, fikirlerin yanlış kullanılmasıdır (Erbaş, Çetinkaya ve Ersoy, 2009).

Matematiğin önemli alt dallarından biri olan, öğretim programlarının ayrılmaz bir parçası olan geometri alanında; öğrenciler geometrik şekilleri, bu şekillerin özelliklerini ve birbirleriyle olan ilişkilerini öğrenirler. İlişkileri keşfetme, modelleme, problem çözme ve analiz etme gibi üst düzey becerilerin kazandırıldığı geometride öğrenciler genellikle zorlanırken bazı öğrenciler ise başarısız olurlar (Duatepe, 2004). Duval (1998)’e göre geometri öğretmek rakamsal işlemleri öğretmekten daha zordur. Geometride matematiğin diğer alanlarına göre öğrenciler daha çok zorluk yaşamaktadırlar (Chen, 2021). Geometrinin cebire göre karmaşık görülmesinin sebebi geometride görselliğin fazla olması ve kavramları akılda canlandırmanın zor olmasıdır (Karakuş, 2008).

Fransız bilim adamı Raymond Duval geometrik aktiviteleri bilişsel açıdan incelemiştir. Duval (1998)’e göre geometri üç çeşit bilimsel süreç içermektedir. Bu süreçlerden ilki olan görselleştirme süreci, bir durumun gösterimi, bir karmaşık durumun sezgisel keşfi, bütüncül bakış ve öznel doğrulama gibi süreçleri içerir. Diğer bir süreç olan oluşturma süreci, matematiksel araçlar kullanarak geometrik inşaların yapılmasını içerir. Bu araçlar pergel, cetvel veya dinamik yazılım gibi araçlardır. Son olarak muhakeme süreci ise, bir açıklama ya da ispat için bilginin genişletilmesini içermektedir. Bir zorluğu aşabilmek için yapılan her taşıma, deneme ve hata muhakemenin bir şeklidir.

Geometri öğretiminde temel olarak kabul edilebilecek kavramlardan biri olan üçgen kavramı, daha karmaşık yapıdaki geometrik kavramların öğretiminde sık sık kullanılır (Kaplan ve Hızarcı, 2015). Tam öğrenilemeyen üçgen kavramı geometrinin ilerleyen konularında güçlüklerle karşılaşmaya sebep olabilir. Üçgen kavramının tam öğrenilebilmesi için üçgene ait elemanların ve bu elemanların özelliklerinin eksiksiz öğrenilmesi gerekmektedir (Çiftci, 2018). Bir üçgenin açılara ait açıortaylar, kenarlarına ait kenarortaylar, kenar orta dikmeler, yükseklikler ve bu kavramların özellikleri üçgenin yardımcı elemanları olarak okul müfredatlarında yer almaktadır (MEB, 2013; MEB, 2017). Üçgen kavramının önemli elemanları olan bu kavramlarda öğrenci çeşitli güçlüklerle karşılaşmakta (Altıntaş

ve İlgün, 2017; Gül, 2014; Güreffe ve Gültekin, 2016; Kılıç, 2013) ve bu sebepten dolayı üçgen kavramının öğrenimini tam olarak gerçekleştirememektedir. Herhangi bir konuyu öğrenirken yaşanan güçlükleri bilmek, etkili bir şekilde anlamayı sağlayacak öğrenme ortamlarının tasarlanmasında önemli bir adım olup (Rasmussen, 1998; Yetkin, 2003) öğrencilere verimli öğretim yaklaşımlarını seçmede faydalı olacaktır (Tatar ve Dikici, 2008).

Alanyazında geometri alanında güçlükleri tespit etmeye yönelik yapılan çalışmalar, cebir alanında yapılan çalışmalara nazaran daha azdır. Yapılan çalışmalar incelendiğinde öğrencilerin geometride çeşitli öğrenme güçlüklerine sahip oldukları görülmüştür. Gutierrez ve Jaime (1999), 190 öğretmen adayı üzerinde yazılı bir testle bir üçgenin yükseklik kavramı ile ilgili kavram imajlarını, zorluklarını ve hatalarını araştırmışlardır. Elde edilen sonuçlarda, öğrencilerin çizilmesi istenen yükseklik yerine kenarortay ya da kenar orta dikme çizme, tepeden tabana dik olmayan herhangi bir doğru parçası çizme, istenilen tabandan farklı tabana yükseklik çizme gibi hatalar yaptıkları tespit edilmiştir. Baran (2011) öğrencilerin üçgenler konusunda sahip oldukları güçlükleri araştırdığı tez çalışmasında; öğrencilerin üçgenlerde kavram, tanım ve genellemeleri birbirleriyle ilişkilendirmelerinde çeşitli güçlüklerle sahip olduklarını tespit etmiştir. Üçgenlerde karşılaşılan güçlüklerin araştırıldığı bir diğer çalışmada, İç ve Demirkol (2008) ortaöğretim öğrencilerinin üçgenler konusunda temel hatalarını ve kavram yanlışlarını araştırmışlardır. Araştırmacılar bu çalışmalarında, öğrencilerin sorulardaki verileri iyi analiz edemediğini, doğrudan açılar, üçgende açılar ve açı-kenar konusunda işlem hataları yaptıklarını ve doğrudan açı ile üçgende açı konularının özelliklerini karıştırdıklarını belirlemişlerdir. Bu çalışmanın sonuçlarına benzer olarak; Özsoy ve Kemankaşlı (2004) da öğrencilerin çemberler konusunda yaptıkları hata ve yanlışları inceledikleri çalışmada; öğrencilerin, konuların özelliklerini karıştırdığını ve verileri analiz etmede zorluklar yaşadıklarını tespit etmişlerdir. Bununla beraber öğrencilerin birçok işlem hatası yaptıkları ve kavramlar arasında bağlantı kurmakta zorlandıkları sonuçlarına ulaşılmıştır.

Geometride öğrenciler tarafından tam anlaşılmayan temel kavramlar, ileriki zamanlarda öğrencilerin çeşitli güçlüklerle karşılaşmalarına sebep olur. Öğrencilerin temel geometri konularındaki hataları ve kavram yanlışlarını açılar konusunu baz alarak araştıran Ubuz (1999) yaptığı çalışmada, öğrencilerin geometriksel kavramları özellikleri ile birlikte ele almayı, sadece onları fiziksel görünümüne göre algıladıklarını belirtmiştir. Ayrıca bu çalışmada öğrencilerin “doğru”, “kenarları paralel açılar”, “üçgen”, “çokgen” ve “paralelkenar” gibi temel geometri konularında kavramsal yanlışlara sahip olduklarını belirtmiştir. Ubuz (1999) öğrencilerin yaptığı hataların hemen hemen her soruda aynı olduğunu, hataların yapılmasının en önemli nedeninin Van Hiele teorisinin ilk geometriksel düşünme seviyesi olan görsellik olduğunu belirtmiştir. Hershkowitz (1987), Gutierrez ve Jaime (1999), Blanco (2001) da çalışmalarında öğrencilerin geometrideki temel kavramlarda karşılaştıkları güçlüklerle dikkat çekmişlerdir. Öksüz (2010)’ün çalışmasına göre, öğrenciler geometrik kavramları günlük hayat durumlarıyla ilişkilendirme konusunda güçlükler yaşamaktadır. Kavramsal

yanılguların araştırıldığı başka bir çalışmada Yenilmez ve Yaşa (2008) öğrencilerin, “doğru, doğru parçası, ışın” konularındaki kavram yanılgularını tespit etmiş ve bu yanılguların bazı demografik değişkenler açısından farklılaşıp farklılaşmadığını belirlemişlerdir. Çalışmanın sonuçlarına göre, matematik başarısı yüksek öğrenciler, daha düşük başarılı öğrencilere göre daha az yanılgıya düşmüşlerdir. Bunun yanı sıra geometriye ilgisi yüksek olan öğrencilerin, daha az ilgili öğrencilere göre; Türkçe başarısı yüksek öğrencilerin de daha düşük başarılı öğrencilere göre yanılgularının daha az olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca yanılgular cinsiyet açısından da incelenmiş kız öğrencilerin erkek öğrencilere göre testteki daha çok soruyu cevapladığı ve kavram yanılgularına daha az düştüğü tespit edilmiştir. Ubuz (1999) ise çalışmasında kız öğrencilerin erkek öğrencilere göre daha başarılı olduğunu fakat daha çok yanılgıya düştüklerini tespit etmiştir.

Uzamsal düşüncenin önemli yer tuttuğu geometride öğrenciler üç boyutlu cisimleri düşünmede ve kavramada çeşitli zorluklarla karşılaşmaktadırlar. Özerem (2012) yaptığı çalışmada öğrencilerin uzunluk, açı, dönüşümler, inşa ve üç boyutlu şekiller konularında kavram yanılgularına, geçmiş bilgi eksikliklerine, muhakeme ve temel işlem hatalarına sahip olduklarını elde etmiş ve bu güçlüklerin ortadan kaldırılması için öneriler sunmuştur. Üç boyutlu geometrik cisimler konusunun ele alındığı Küçükaydın ve Gökbulut (2013)'un yaptığı çalışmada ise, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının hiçbiri çalışmada yer alan geometrik cisimlerin tamamının açılımını doğru olarak yapamamış, ayrıca öğretmen adayları geometrik cisimleri tanımlama ve örnekleme kısmında da zorlanmışlardır. Türnüklü ve Ergin (2016)'in yaptıkları çalışmada da öğrencilerin üç boyutlu cisimlerle ilgili aşırı özelleme ve aşırı genelleme yanılgularına düştükleri görülmüştür.

Öğrenciler öğretim hayatlarında konu ve kavramları öğrenirken çeşitli güçlüklerle karşı karşıya kalırlar. Karşılaştıkları bu güçlükler konunun eksik öğrenilmesine; dolayısıyla ileriki konularda da daha farklı güçlüklerle karşılaşmalarına sebep olabilir. Bir konu ya da kavramı öğrenirken karşılaşılabilecek güçlükleri bilmek, etkili bir şekilde öğrenmeyi sağlayacak öğretim-öğrenme ortamlarının tasarlanmasında önemli bir adımdır (Rasmussen, 1998; Yetkin 2003). Geometrinin önemli bir bölümünü oluşturan ve geometrik kavramların temeli olarak kabul edilen üçgen kavramı, geometrinin diğer kavramlarının öğretilmesinde önemli bir role sahiptir (Zeybek, 2013). Bu doğrultuda bu çalışmanın amacı, öğrencilerin üçgenin açıortay ve kenarortayları konusunu öğrenirken karşılaştıkları güçlükleri tespit etmektir.

Yöntem

Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Durum çalışmaları bireylerin, grupların, kültürlerin, bölgelerin özel durumlarının derinlemesine incelendiği çalışmalardır (Patton, 2014). Durum çalışmalarında bir olay ya da bir durum ayrıntılı bir şekilde açıklanır (Merriam, 2013). Çalışmada, ortaöğretim 9. sınıf öğrencilerin üçgenin yardımcı elemanları

konusunu öğrenmede karşılaştıkları güçlükler derinlemesine incelendiğinden dolayı durum çalışması deseni tercih edilmiştir.

Çalışma Grubu

Bu araştırmanın çalışma grubunu, Erzurum ilinde 3 farklı okulda öğrenim gören 86 dokuzuncu sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışma grubunun belirlenmesi aşamasında uygun örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Uygun örnekleme yönteminde, çalışma grubu belirlenirken zaman, para ve işgücü kaybını önleme göz önünde bulundurulur (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2009). Çalışma grubu, Erzurum ili merkez ilçelerindeki 3 farklı okulda öğrenim gören öğrencilerden oluşturulmuştur. Çalışma grubunu oluşturan öğrencilerin 39'u (%45) kız, 47'si (%55) erkektir.

Veri Toplama Araçları

Bu çalışmada, araştırmanın problemi doğrultusunda nicel ve nitel veri toplama araçlarından faydalanılmıştır. Çalışmanın nicel verileri araştırmacı tarafından geliştirilen Üçgenler Bilgi Testi (ÜBT) ile nitel verileri öğrencilerle yapılan görüşmelerle toplanmıştır.

Üçgenler bilgi testi (ÜBT): Çalışmada öğrencilerin karşılaştıkları güçlükleri tespit etmek için, 17 açık uçlu, 5 boşluk doldurma ve 2 tane doğru-yanlış sorularından oluşan ÜBT hazırlanmıştır. ÜBT'de yer alan sorular, Ortaöğretim Matematik Dersi (9-12. sınıflar) Öğretim Programı'nda yer alan üçgenler ünitesi altındaki üçgenin yardımcı elemanları konusu ile ilgili kazanımlar ve kazanım açıklamaları doğrultusunda oluşturulmuştur. Ortaöğretim Matematik Dersi (9-12. sınıflar) Öğretim Programı'nda yer alan ilgili kazanımlar ve kazanım açıklamaları şu şekildedir (MEB, 2013):

1. Bir açının açıortayını çizer ve özelliklerini açıklar.

✓ *Açıortay üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunluklarının eşit olduğu keşfettirilir.*

✓ *Pergel-cetvel veya dinamik geometri yazılımlarında bunların karşılığı kullanılır.*

2. Üçgenin iç ve dış açıortaylarının özelliklerini gösterir

✓ *Üçgende iç ve dış açıortayların kesişimlerine dair ilişkiler ile iç ve dış açıortay teoremlerine yer verilir.*

✓ *Üçgenin iç teğet ve dış teğet çemberleri çizdirilir.*

✓ *Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanır.*

3. Üçgenin kenarortaylarının bir noktada kesiştiğini gösterir ve kenarortayla ilgili özellikleri açıklar.

✓ *Kenarortayların kesiştiği noktanın üçgenin ağırlık merkezi olduğu vurgulanır; üçgenin ağırlık merkeziyle ilgili özellikler incelenir.*

✓ *Cetvel-pergel veya dinamik geometri yazılımlarında bunların karşılığı kullanılır.*

ÜBT hazırlanırken 2014-2015 eğitim öğretim yılında Millî Eğitim Bakanlığına bağlı eğitim kurumlarında okutulan 9. sınıf matematik ders kitaplarından (Erbaş, Çetinkaya, Güven, Karataş ve

Çinkır, 2015; Karakuyu ve Bağcı, 2015) yararlanılmıştır. Oluşturulan test her bir kazanımı en az bir soru kapsayacak şekilde geliştirilmiştir. Testin kapsam geçerliğine yönelik, ÜBT içindeki sorular ilgili oldukları kazanımları gösteren belirtke tablosu hazırlanmıştır. Bu belirtke tablosu ile birlikte hazırlanan ÜBT, matematik eğitiminde uzman 5 öğretim üyesi ve deneyimli 4 lise matematik öğretmeni tarafından incelenmiştir. Uzmanlardan gelen dönütler sonrasında testlerde gerekli düzenlemeler yapılarak kapsam geçerliği sağlanmıştır.

Uzman görüşleri sonrasında geliştirilen ÜBT, güvenilirlik çalışmaları için 2014-2015 eğitim öğretim yılının ilk döneminde üç farklı okuldaki 130 onuncu sınıf öğrencisine pilot olarak uygulanmıştır. Araştırma konusu 9. sınıf ikinci dönemi konusu olduğundan pilot çalışmada 10. sınıf öğrencileri tercih edilmiştir. Bu öğrenciler seçilirken seviyelerinin liselere giriş puanlarına göre çalışmanın yapılacağı okullardaki öğrencilerin seviyeleri ile yakın olmalarına dikkat edilmiştir. Geliştirilen ÜBT'nin pilot uygulaması sonucunda her öğrencinin kâğıdı puanlandırılmıştır. Puanlandırma her soru için 0,1,2 şeklinde değerlendirilmiştir. Tamamen doğru cevaplar için 2, doğru cevabın bir kısmını içeren cevaplar için 1, yanlış ya da boş cevaplar için 0 puan verilmiştir. Yapılan değerlendirme sonucunda öğrencilerin aldığı puanlar büyükten küçüğe doğru sıralanarak üst grup (grubun %27'si) ve alt grup (grubun %27'si) belirlenmiştir. Oluşturulan bu gruplar göz önüne alınarak ÜBT'nin her bir maddesi için güçlük (P) ve madde ayırt edicilik (D) değerleri hesaplanmıştır. Ayrıca Pilot uygulama sonucunda toplanan verilerin analizi yapılarak ÜBT'nin KR-20 iç tutarlılık katsayısı için 0.99 olarak bulunmuştur.

Görüşme: Çalışmada öğrencilerin bilgi testinde verdikleri cevapların derinlemesine incelenmesi amacıyla yapılandırılmamış görüşmeler yapılmıştır. Her öğrencinin her bir soruya vereceği yanıt farklı olabileceğın dolayı görüşme formu kullanılmamış, bunun yerine her bir öğrencinin soruları cevaplandığı ÜBT kullanılmıştır. Hem kontrol hem deney grubunda öğrencilerin bilgi testinde verdikleri cevaplar "Nasıl?", "Neden?", "Açıklar mısınız?" gibi ifadelerle sorgulanarak öğrenme güçlükleri belirlenmiştir.

Araştırma Süreci

Çalışma 2014-2015 yılında yürütülmüştür. 34 öğrencinin bulunduğu birinci sınıfta (9-A), 27 öğrencinin bulunduğu ikinci sınıfta (9-B) ve 25 öğrencinin bulunduğu üçüncü sınıfta (9-C) öğretmenler kendi yöntemleriyle üçgenin yardımcı elemanları konusunun öğretimini gerçekleştirmişlerdir. Öğretmenlerin yaptıkları öğretim sonucunda ÜBT her gruba 2 ders saati süresince son test olarak uygulanmıştır. ÜBT'lerin son test olarak uygulanmasından sonra öğrencilerin öğrenmede karşılaştıkları güçlüklerin belirlenmesi aşamasına geçilmiştir. Öncelikle öğrencilerin kâğıtları incelenmiş, yanlış ve boş soruları tespit edilmiştir. Daha sonra öğrencilerin bilgi testinde verdikleri cevapların derinlemesine incelenmesi amacıyla 86 öğrencinin her biriyle görüşmeler yapılmıştır. 86 öğrenci ile yapılan görüşmeler son testin yapıldığı ertesi gün başlanarak sonrasındaki üç gün içerisinde bitirilmiştir.

Sonraki süreçte görüşmeler bilgisayar ortamında transkript edilerek yazıya dökülmüştür. Öğrencilere uygulanan testler ve yapılan görüşmeler birlikte analiz edilerek 9. sınıf öğrencilerinin üçgenin yardımcı elemanları konusunda karşılaştıkları güçlükler tespit edilmiştir.

Verilerin Analizi

Öğrencilerin ÜBT’de sorulara verdikleri yanıtları ayrıntılı değerlendirerek öğrenme güçlüklerinin tespit edilmesi amacıyla her öğrenciyle gerçekleştirilen görüşmeler öğrencilerin izinleri doğrultusunda öncelikle kayıt altına alınmıştır. Daha sonra bilgisayar ortamında transkript edilen veriler betimsel analiz tekniği kullanılarak analiz edilmiştir. Betimsel analiz tekniğinde elde edilen veriler önceden belirlenen kategorilere göre özetlenir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Öğrencilerin transkript edilen görüşmeleri araştırmacı tarafından tekrar tekrar okunarak yaşadıkları zorluklara ve sahip oldukları kavram yanlışlarına göre belirli güçlük başlıkları altında toplanmıştır. Elde edilen güçlüklerin her birine bir kod verilmiştir (ÖG₁, ÖG₂, ...). Elde edilen kodlar önceden belirli olan, öğretim programındaki üçgenin yardımcı elemanları konusuna ait kazanımların başlıkları (kategori) altında sınıflandırılmıştır. Her bir belirlenen güçlük Duval’ın bilişsel modelindeki “görselleştirme”, “oluşturma”, “muhakeme” süreçleri açısından ele alınarak öğrencilerin karşılaştıkları güçlükler göre hangi bilişsel süreçlerinde sıkıntı ile karşılaştığı tespit edilmiştir. Ortaya çıkan güçlükler yüzde ve frekans tabloları yardımıyla sunularak bu güçlüğü yaşayan öğrencilerle yapılan görüşmeler betimsel olarak verilmiştir. Öğrenme güçlükleri belirlenirken öğrenciler Ö1, Ö2, ... Ö86 şeklinde kodlanmıştır.

Araştırmanın Etik İzinleri

Yapılan bu çalışmada “Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler” başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

25 Şubat 2020 tarihli ULAKBİM kararına göre 2020 yılı öncesi araştırma verileri kullanılan çalışmalarda geriye dönük etik kurul belgesi gerekmemektedir. Araştırmanın verileri 2014-2015 yıllarında elde edildiğinden etik kurul belgesi alınmamıştır.

Bulgular ve Yorum

2014-2015 Eğitim Öğretim yılında üç farklı okulda öğrenim gören toplam 86 öğrencinin üçgenin yardımcı elemanları konusunda karşılaştıkları öğrenme güçlükleri ile ilgili bulgular, ilgili konuya ait öğretim programında yer alan kazanım başlıkları altında verilmiştir. Elde edilen öğrenme güçlükleri, öğrencilerin ÜBT sorularına verdikleri cevaplar ve her bir öğrenciyle yapılan görüşmeler eşliğinde incelenerek tespit edilmiştir. Öğrencilerin en az bir soruda karşılaşmasıyla kayıt altına alınan öğrenme güçlüklerinin yüzde ve frekansları, öğrencilerle yapılan görüşmelerin betimsel analizi ve öğrencilerin ilgili güçlüklerle karşılaştıkları sorulara verdikleri yanıtlar eşliğinde aşağıdaki başlıklar altında sunulmuştur.

“Bir açının açıortayını çizer ve özelliklerini açıklar.” Kazanımı ile İlgili Bulgular

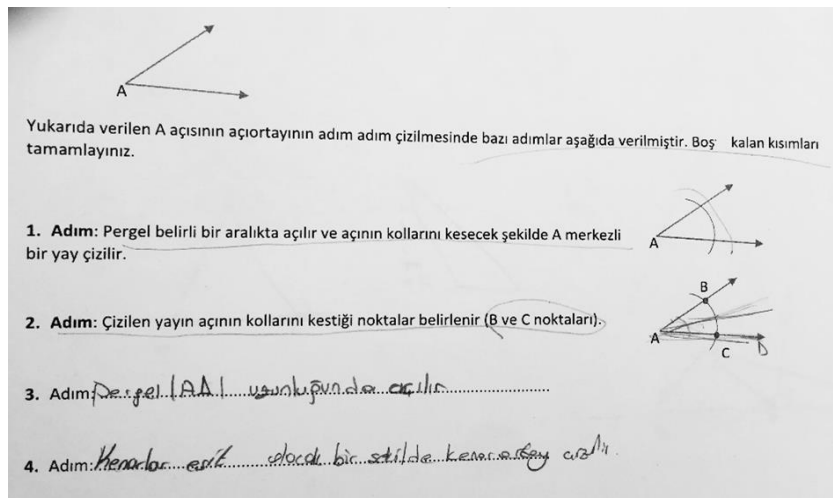
“Bir açının açıortayını çizer ve özelliklerini açıklar.” kazanımına (1. kazanım) yönelik öğrencilerin karşılaştıkları güçlükleri belirlemek amacıyla ÜBT'nin 1, 20, 23 ve 24. soruları hazırlanmıştır. Öğrencilerin bu sorulara verdikleri yanıtlarının ve görüşmelerinin analizleri sonucunda, bu kazanımla ilgili karşılaşılan öğrenme güçlüklerinin frekans ve yüzde değerleri Tablo 2'de sunulmuştur:

Tablo 1. Öğrencilerin 1. kazanım ile ilgili karşılaştıkları öğrenme güçlüklerinin frekans ve yüzde değerleri

Öğrenme Güçlüğü	Frekans	Yüzde
Bir açının açıortayını oluşturamama (ÖG ₁)	86	%100
Bir D noktasının A açısının açıortayı üzerinde olup olmadığını kavrayamama (ÖG ₂)	80	%93
Bir A açısının başlangıç noktasından çizilen doğru parçasının, açının açıortayı olup olmadığını kavrayamama (ÖG ₃)	79	%92
Bir açının açıortayı üzerindeki bir noktanın açının kollarına olan uzaklığının eşit olduğunu kavrayamama (ÖG ₄)	56	%65

Tablo 1 incelendiğinde 1. kazanımla ilgili olarak hazırlanan sorulara ilişkin verilen yanıtlardan elde edilen bulgulara göre, 4 farklı öğrenme güçlüğü tespit edilmiştir. Bu güçlüklerden ÖG₁ güçlüğüne öğrencilerin hepsinin, ÖG₂ güçlüğüne öğrencilerin %93'ünün, ÖG₃ güçlüğüne öğrencilerin %92'sinin ve ÖG₄ güçlüğüne ise öğrencilerin %65'nin sahip olduğu görülmüştür.

Bir açının açıortayını oluşturamama güçlüğü (ÖG₁): Öğrencilerin ÜBT kâğıtları ve görüşmeleri incelendiğinde bütün öğrencilerin, bir açının açıortayını oluşturamama güçlüğüne sahip oldukları tespit edilmiştir. Elde edilen bu güçlük ÜBT'nin 1. kazanıma yönelik hazırlanan 24. sorusundan elde edilmiştir. Öğrencilerin 24. soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde, bütün öğrencilerin verilen boşlukları ya boş bıraktığı ya da yanlış doldurduğu gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda öğrencilerin tamamının pergel-cetvel araçlarını kullanarak bir açının açıortayını adım adım oluşturma basamaklarını kavrayamadıkları tespit edilmiştir. Bu güçlüğü yaşayan öğrenciler, özellikle matematiksel araçlar kullanılarak geometrik yapıların inşasını içeren “oluşturma” sürecinde sıkıntı yaşamaktadırlar. ÖG₁ güçlüğüne sahip Ö7'nin ÜBT'de soruya verdiği cevap (Şekil 1) ve öğrenci ile yapılan görüşme şu şekildedir:



Şekil 1. Ö7'nin ÜBT'de 24. soru cevabı

...

Görüşmeci: Peki 24. soruyu nasıl düşündün?

Ö7: Hangisi? Buydu demi?

Görüşmeci: Üçüncü adım demişsin ki: Pergel AD uzunluğu...

Ö7: ...uzunluğunda açılır.

Görüşmeci: Tamam. AD uzunluğunda D'yi sen yazmışsın!

Ö7: Burada biz açıortay mı oluşturacaktık?

Görüşmeci: Evet.

Ö7: O yüzden... Mesela bu kadar aç... Yok, bir dakika... Ben ne yaptım nasıl düşünmüştüm. Hah o kadar açacağız ki burayı da o kadar uzatıp açıortayı bulabilelim.

Görüşmeci: Nasıl yani uzatacağız orayı? Tam ortasını nasıl bulacağız ki açıortay olduğunu bilelim? 4. adımda "Kenarlar eşit olacak şekilde kenarortay çizilir." demişsin?

Ö7: Kenarların eşit olduğunu bulacağız başta.

Görüşmeci: Nasıl yani? Cetvel yok elimizde pergelimiz var.

Ö7: Sadece pergel var. Yok [cevap yok anlamında].

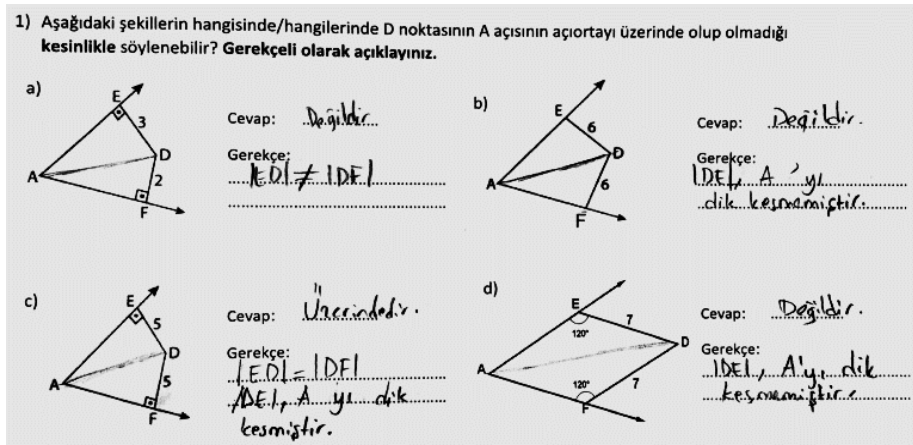
Görüşmeci: Peki.

Öğrencilerin 24. soruya verdikleri cevaplarının ve yapılan görüşmelerinin analizleri sonucunda çözüme yaklaşan, mantık yürütebilen hiçbir öğrencinin olmadığı görülmüştür. Öğrencilerin hepsinin ÖG₁ güçlüğüne sahip olmalarının sebeplerinden en önemlisi, derslerde pergel-cetvel araçlarıyla veya gelişen teknolojik araçlarla (örneğin dinamik yazılım) öğrencilerin adım adım geometrik çizim etkinlikleri yapmaya alışkın olmamaları düşünülebilir.

Bir D noktasının A açısının açıortayı üzerinde olup olmadığını kavrayamama güçlüğü (ÖG₂):

Öğrencilerin ÜBT'nin 1. sorusuna verdikleri yanıtları analiz edildiğinde, birçok öğrencinin herhangi bir D noktasının A açısının açıortayı üzerinde olup olmadığını tam anlamıyla kavrayamadığı tespit edilmiştir. 4 seçenekten oluşan 1. sorunun bütün seçeneklerini doğru yapan 7 öğrenci haricindeki 80 öğrencinin bu güçlüğü yaşadığı tespit edilmiştir. ÖG₂ güçlüğüne sahip olan öğrencilerden bazıları, D noktasının A açısının açıortayı üzerinde olması için D noktasından açıortay kollarına indirilen doğru parçalarının uzunluklarının eşit ve açıortay kollarıyla 90 derecelik açı yapması gerektiğini belirtmektedir. Bu öğrencilere göre, D noktasından açıortay kollarına 90 dereceden farklı, aynı ölçüde

açı ile indirilen doğru parçaları eşit uzunlukta olsa bile (ÜBT 1. soru d şıkkı), D noktası açıortay üzerinde değildir. ÖG₂ gücüyle karşılaşan öğrenciler, bir noktanın bir açının açıortayı üzerinde olup olmadığını kavramsal olarak inceleyemediğinden, bu konuda herhangi bir bilgisi olmadığından veya yanlış bilgisi olduğundan dolayı “muhakeme” sürecinde sıkıntı yaşamaktadırlar. Bu öğrencilerden biri olan Ö38’in soruya verdiği cevap (Şekil 2) ve öğrenci ile yapılan görüşme şu şekildedir:



Şekil 2. Ö38'in ÜBT'de 1. soru cevabı

Görüşmeci: 1. soruda D'nin A açısının açıortayı üzerinde olup olmadığını sorduk. Neye göre cevapladın bu soruları?

Ö38: Şimdi şöyle düşündüm. Eğer bu çizgiden (açıortay doğrusu) geçirdiğimizde dik olacak (AED ve AFD açılarını kastediliyor) ve iki kenar (DE ve DF kenarları kastediliyor) eşitse bence öyle.

Görüşmeci: Yani açıortay olması için hem dik hem de uzunluklarının eşit mi olması lazım?

Ö38: Evet bence öyle.

Görüşmeci: "b şıkkında değildir." demişsin. Dik olduğunu demediği için mi?

Ö38: Hı hı [onaylıyor].

Görüşmeci: d şıkkında?

Ö38: Yine aynı dik olmadığı için.

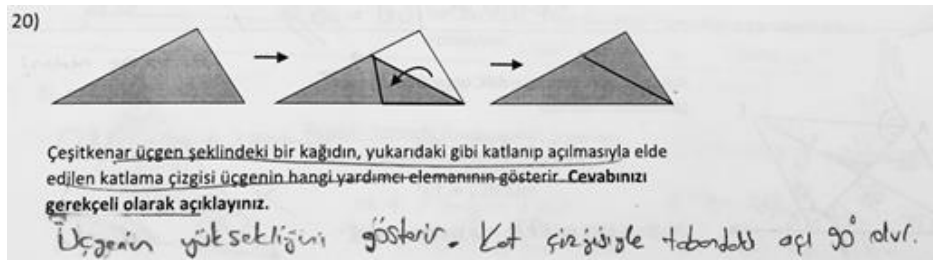
Görüşmeci: Açılar dik olmadığı için?

Ö38: Evet

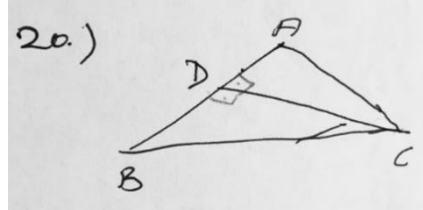
Şekil 2'deki Ö38'in cevabı ve görüşmesi incelendiğinde, bu cevabı veren öğrencilerin herhangi bir D noktasından açının kollarına 90 dereceden farklı açılarla eşit uzunlukta doğru parçaları indirildiğinde iki eş üçgen oluştuğunu ve dolayısıyla D noktasının açının açıortayı üzerinde olduğunu kavrayamadıkları görülmüştür.

Bir A açısının başlangıç noktasından çizilen doğru parçasının, açının açıortayı olup olmadığını kavrayamama gücü (ÖG₃): ÜBT'nin 20. sorusunda, öğrencilerin bir açının açıortayını keşfedebilme bilgileri sorgulanmıştır. Bu soruda öğrencilerden, katlama çizgisinin her iki tarafında kalan üçgenler eş olduklarından katlama çizgisinin açıortay olduğunu belirtmeleri beklenmiştir. Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde 79 öğrencinin, bir açının başlangıç noktasından çizilen doğru parçasının, açının açıortayı olduğunu kavramsal olarak gösteremedikleri tespit edilmiştir. ÖG₃ gücüne sahip öğrenciler bir açının açıortayı konusunda yeterli kavramsal bilgiye sahip olmadıklarından veya sahip oldukları bilgiyi görsel şekilde kullanamadıklarından dolayı “muhakeme” ve “görselleştirme”

süreçlerinde sıkıntı yaşamaktadırlar. Bu öğrencilerden biri olan Ö20'nin 20. soruya verdiği cevap (Şekil 3), görüşme esnasında yaptığı çizim (Şekil 4) ve Ö20 ile yapılan görüşme şu şekildedir:



Şekil 3. Ö15'in ÜBT'de 20. soru cevabı



Şekil 4. Ö15'in 20. sorunun cevabını açıklarken görüşme esnasında yaptığı çizim

...

Görüşmeci: 20. soruya demişsin ki "Üçgenin yüksekliğini gösterir. Kat çizgisiyle tabandaki açı 90 derece olur.". Yani neresi 90 derece olur?

Ö15: Şurası hocam (katlama çizgisinin tabanla yaptığı açığı kastediyor).

Görüşmeci: Yani o zaman şöyle mesela şuraya aynı şekli çizelim (Şekil 4). Ben isimlendireyim. A, B, C şura D olsun. Dediğin yeri göster bana 90 derece olan yeri?

Ö15: Burası hocam üçgenin en dik noktasından çizilen yükseklik olur hocam (Şekil 4).

Görüşmeci: Ha orası 90 derece. Yani neresi CDA ve CDB açıları?

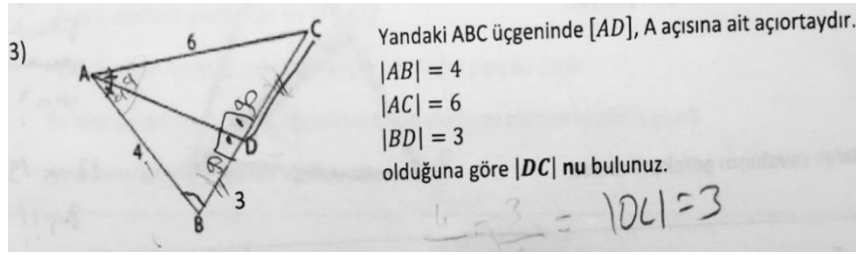
Ö15: Evet hocam.

Görüşmeci: Peki.

...

Bir açının açıortayı üzerindeki bir noktanın açının kollarına olan uzaklığının eşit olduğunu kavrayamama güçlüğü (ÖG₄): ÜBT'nin 23. sorusunda öğrencilerden, bir açının açıortayı üzerinde alınan bir noktadan açıortay kollarına çizilen dikmelerin uzunluklarının eşit olması bilgisini kullanarak çözüme ulaşmaları beklenmiştir. Öğrencilerin cevapları ve görüşmeleri incelendiğinde, 37 öğrencinin bir açının açıortayı üzerindeki bir noktanın açının kollarına olan uzaklıklarının eşit olduğunu kavrayamadıkları gözlemlenmiştir. ÖG₄ güçlüğüyle karşılaşan öğrenciler, bir açının açıortayı kavramıyla ilgili yeterli kavramsal bilgiye sahip olmadıklarından veya bu kavramsal bilgiyi görsel şekil üzerinde uygulayamadıklarından dolayı "muhakeme" ve "görselleştirme" süreçlerinde sıkıntı yaşamaktadırlar. Bu güçlüğe sahip öğrencilerden biri olan Ö13'ün 23. soruya soruya verdiği cevap Şekil 5'de verilmiştir:

“muhakeme” süreçlerinde sıkıntı yaşamaktadırlar. Bu öğrencilerden biri olan Ö17'nin ilgili soruya verdiği yanıt (Şekil 6) ve Ö17 ile yapılan görüşme aşağıdaki gibidir:



Şekil 6. Ö17'nin ÜBT'de 3. soru cevabı

...

Görüşmeci: Peki 3. soruya bakalım? 3. soruya da demişsin ki $|DC|=3$ olur. Neye göre?

Ö17: Burada şey vermişim sanırım. Kenar vermişim a, a diye ismini.

Görüşmeci: Peki bir şey sorayım öncelikle: AD'nin BC'nin yüksekliği olduğunu vermiş miyiz biz sana?

Ö17: Vermemişsiniz.

Görüşmeci: Peki neden 90° yazdın?

Ö17: Yani ikiye böler diye $90, 90$ diye.

Görüşmeci: Yani A açısı ikiye bölünmüş diye AD'de aşağıyı ikiye böler diye düşünüyorsun?

Ö17: Evet.

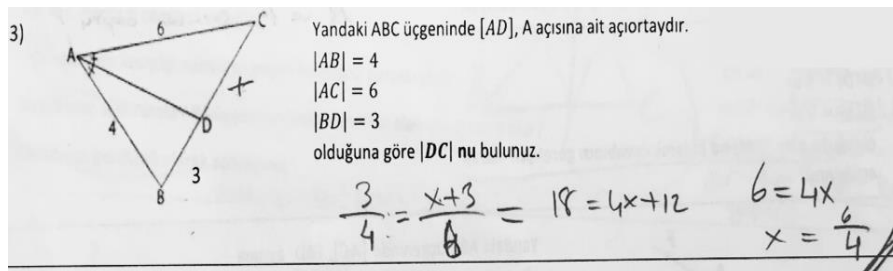
Görüşmeci: Peki BD ile DC'nin eşit olduğunu nereden biliyoruz?

Ö17: İkiye böldüğü için yani iki eş şey oluyor.

Görüşmeci: Peki.

Şekil 6'daki Ö17'nin soru çözümü ve görüşmesi incelendiğinde, verilen üçgen eşkenar veya ikizkenar üçgen olmamasına rağmen açıortayı hem yükseklik hem kenarortay aldığı görülmektedir. Bu hatayı yapan öğrenciler, bir üçgenin bir iç açısına ait açıortayının her zaman kenarortay veya yükseklik olmadığını kavrayamadıklarından dolayı ÖG₅ güçlüğüne sahip olarak değerlendirilmiştir.

İç açıortay teoremini kavrayamama güçlüğü (ÖG₆): Öğrencilerin iç açıortay teoremine yönelik bilgilerini sorgulamak amacıyla ÜBT'nin 3. sorusu hazırlanmıştır. Bu soruya verilen yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin %65'inin ÖG₆ güçlüğü yaşadığı tespit edilmiştir. ÖG₆ güçlüğüne sahip olan öğrencilerin çoğunluğu kenarlar arasında yanlış orantı kurmuşlardır. İç açıortay teoremiyle ilgili kavramsal bilgileri eksik ya da yanlış olan bu öğrenciler “muhakeme” süreçlerinde sıkıntı yaşamaktadırlar. Bu öğrencilerden biri olan Ö15'in 3. soruya verdiği yanıt ve Ö15 ile yapılan görüşme aşağıdaki gibidir:



Şekil 7. Ö15'in ÜBT'de 3. soru cevabı

...

Görüşmeci: Peki 3. sorudan devam edelim. 3.soruya da demişsin ki $\frac{3}{4} = \frac{x+3}{6}$. Neden böyle bir şey söyledin? Nerden kurdun bu orantıyı?

Ö15: İlk önce hocam küçüklerle küçüklerin oranı, büyüklerle büyüğün oranı hocam. Yani BC'nin tümünü aldım $x+3$, AC büyük olduğu için AC'yi aldım hocam.

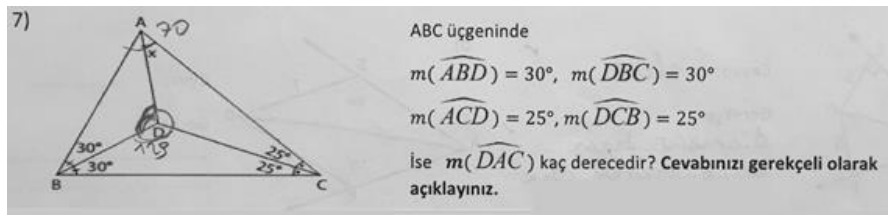
Görüşmeci: Neden bu formül nerden geliyor? Yani bu bir formül mü?

Ö15: Şöyleydi ama hocam! Hocam küçüklerle küçüklerin çarpımı eşit olmalı, büyüklerle büyüklerin çarpımına. Öyle bir kural vardı ama tam hatırlayamadım hocam.

Görüşmeci: Tam hatırlayamıyorsun. Peki.

Öğrencilerin 3. soruya verdikleri cevapları incelendiğinde öğrencilerin iç açıortay teoremini kavrayamadığı tespit edilmiş olup bu öğrenciler ÖG₆ güçlüğüne sahip olarak değerlendirilmiştir.

Üçgenin iki iç açıortayının kesim noktasından üçüncü iç açıortayın geçeceğini kavrayamama güçlüğü (ÖG₇): ÜBT'nin 7. sorusunda öğrencilerden, üçgenin iki köşesinden gelen iç açıortaylarının kesim noktasına üçüncü köşeden çizilen doğru parçasının da açıortay olduğu bilgisini kullanarak sonuca ulaşmaları beklenmektedir. Öğrencilerin soru cevapları ve görüşmeleri incelendiğinde öğrencilerin %74'ünün ÖG₇ güçlüğüne sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu güçlüğe sahip öğrenciler iki iç açıortayın kesim noktasından üçüncü iç açıortayın da geçeceğini kavrayamadıkları için 7. soruyu çözememişlerdir. ÖG₇ güçlüğüne sahip öğrenciler, üçgenin açılara ait açıortaylarının bir noktada kesiştiği bilgisini kavrayamadıklarından veya bu bilgiyi ilgili soruda uygulayamadıklarından dolayı "muhakeme" ve "görselleştirme" süreçlerinde sıkıntı yaşamaktadırlar. Bu öğrencilerden biri olan Ö3'ün ÜBT'de soruya verdiği yanıt (Şekil 8) ve öğrenci ile yapılan görüşme şu şekildedir:



Şekil 8. Ö3'ün ÜBT'de 7. soru cevabı

...

Görüşmeci: Peki, 7. soruya baktığımda, tam çözememişsin. Yani A açısını 70° bulmuşsun. Devamını getirememişsin. Neden?

Ö3: Hocam büyük üçgende 70 buldum da...

Görüşmeci: Tamam.

Ö3: Gerisini getiremedim.

Görüşmeci: Niye acaba? Ya şu AD'nin özelliği ne ki acaba burada?

Ö3: AD'nin... [düşünüyor]

Görüşmeci: Bilmiyorsun?

Ö3: Hiçbir fikrim yok hocam.

Görüşmeci: Peki.

Şekil 8 ve öğrencinin görüşmesi incelendiğinde Ö3, üçgenin köşelerinden gelen [BD] ve [CD]'nin kesim noktası olan D noktasının iç açıortayların kesim noktası olduğunu kavrayamamış, dolayısıyla [AD]'nin de açıortay olması gerektiğini düşünememiştir. Bu şekilde iç açıortayların bir noktada kesişeceğini kavrayamayan öğrenciler ÖG₇ güçlüğüne sahip olarak değerlendirilmiştir.

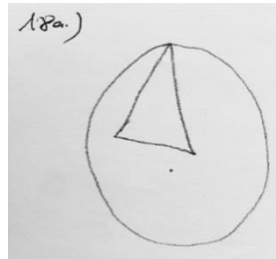
İç teğet çemberi kavrayamama güçlüğü (ÖG₈): Öğrencilerin ÜBT’de ilgili sorulara verdiği yanıtlar ve görüşmeleri analiz edildiğinde, öğrencilerin %95’inin üçgenin iç teğet çemberi kavramında güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. ÖG₈ güçlüğüne sahip olan bu öğrenciler bir üçgenin iç teğet çemberinin şeklini veya özelliklerini bilmemektedir. Kavramsal bilgilerinde eksiklik olan bu öğrencilerin karşılaştığı ÖG₈ güçlüğü “muhakeme” süreçlerinden kaynaklanmaktadır. Öğrencilerin karşılaştıkları ÖG₈ güçlüğü, ÜBT’de cevapladıkları 6, 12, 14 ve 18. sorulardan elde edilmiştir. Bu öğrencilerden biri olan Ö14 ile yapılan görüşme ve öğrencinin görüşme esnasında yaptığı çizim şu şekildedir:

Görüşmeci: 18. soruya da demişsin ki bir üçgenin 1 tane iç teğet çemberi vardır. Gösterir misin bana 1 tane iç teğet çember? Bir tane üçgen çiz onunda bir tane iç teğet çemberi olsun.

Ö14: Merkezi buraysa...[çiziyor] (Şekil 9)

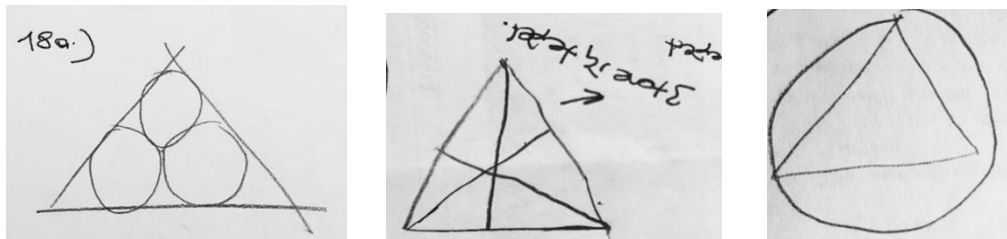
Görüşmeci: Bu mesela şu çizdiğin üçgenin iç teğet çemberi bu mu?

Ö14: Bilmiyorum.



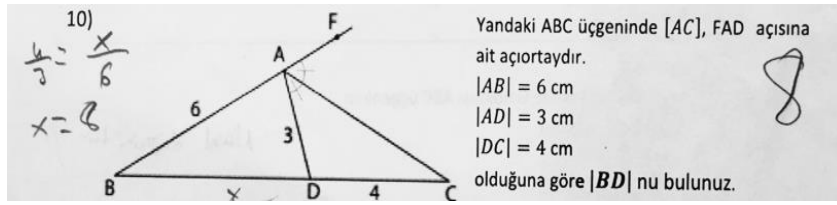
Şekil 91. Ö14’ün bir üçgenin iç teğet çemberini gösterimi

Şekil 9 incelendiğinde Ö14’ün bir üçgenin iç teğet çemberini bilmediği görülmektedir. ÖG₈ güçlüğüne sahip olan farklı öğrencilerin görüşmeler esnasında bir üçgenin iç teğet çemberini çeşitli şekillerde gösterimi Şekil 10’da verilmiştir:



Şekil 10. ÖG₈ güçlüğüne sahip bazı öğrencilerin bir üçgenin iç teğet çemberi gösterimi

Dış açortay teoremini kavrayamama güçlüğü (ÖG₉): Öğrencilerin ÜBT’nin 10. sorusuna verdikleri yanıtları ve görüşmeleri incelendiğinde, öğrencilerin %71’inin ÖG₉ güçlüğüne sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu güçlüğe sahip öğrencilerin 10. soru çözümünde dış açortay teoremini uygularken kenarların uzunlukları arasında yanlış orantı kurdukları ya da dış açortay teoremini bilmedikleri görülmüştür. ÖG₉ güçlüğüne sahip öğrenciler dış açortay teoremi ile ilgili kavramsal bilgi eksikliğine sahip olduklarından dolayı karşılaştıkları, bu güçlük “muhakeme” sürecinde yaşadıkları sıkıntıdan kaynaklanmaktadır. Yanlış orantı kuran Ö3’ün soruya verdiği yanıt (Şekil 11) ve Ö3 ile yapılan görüşme aşağıdaki gibidir:



Şekil 21. Ö3'ün ÜBT'de 10. soru cevabı

...

Görüşmeci: Peki 10. soruyu nasıl 8 bulduk?

Ö3: 4'ün hocam, yine dış açıortay. Bir dakika... Şu hocam dış açıortay AC...

Görüşmeci: Evet.

Ö3: Dış açıortay. Dış açıortaydan 4'ün 3'e oranı, x'in 6'ya oranı dedim.

Görüşmeci: 4'ün 3'e oranı, x'in 6'ya oranı olur mu peki? Yani niye öyle düşünüyorsun?

Ö3: 4'ün gördüğü kenara, x'in gördüğü kenar dedim.

Görüşmeci: Hum. Peki.

...

Dış teğet çemberi kavrayamama güçlüğü (ÖG₁₀): Öğrencilerin ÜBT sorularına verdikleri yanıtlarının incelenmesi sonucunda, öğrencilerin %99'unun bir üçgenin dış teğet çemberinin şeklini veya özelliklerini bilmediği tespit edilmiştir. Bu öğrencilerin ÖG₁₀ güçlüğüne sahip oldukları ÜBT'nin 6, 14 ve 18. sorularına verdikleri yanıtlarda belirlenmiştir. Öğrencilerin ÖG₁₀ güçlüğüyle karşılaşma sebebi "muhakeme" süreçlerinde dış teğet çember ile ilgili kavramsal bilgi eksikliği yaşamasıdır. ÖG₁₀ güçlüğüne sahip olan Ö5 ile yapılan görüşme ve öğrencinin dış teğet çember gösterimi (Şekil 12) şu şekildedir:

...

Görüşmeci: 18'in b'sine geçelim. 1 tanede dış teğet çemberi vardır demişsin. 18b diyeyim buraya. Çizer misin bana dış teğet çemberi?

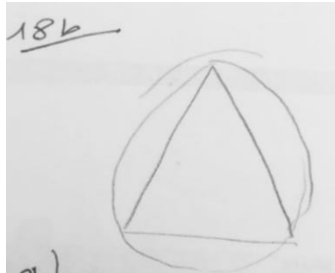
Ö5: ... [çevrel çember çiziyor] (Şekil 12)

Görüşmeci: Köşelerden geçen çember dış teğet çemberdir, öyle mi?

Ö5: Evet.

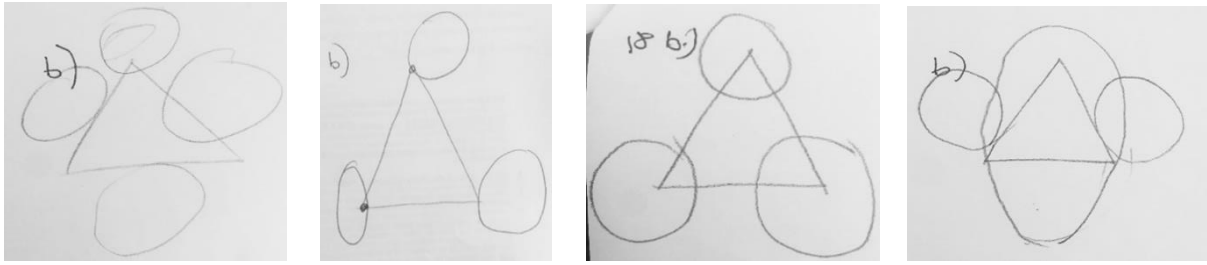
Görüşmeci: Peki.

...



Şekil 12. Ö5'in bir üçgenin dış teğet çemberi gösterimi

Şekil 12'de Ö5'in bir üçgenin dış teğet çemberi yerine üçgenin çevrel çemberini gösterdiği görülmektedir. ÖG₁₀ güçlüğüne sahip olan farklı öğrencilerin bir üçgenin çevrel çemberini çeşitli şekillerde gösterimi Şekil 13'de verilmiştir:



Şekil 13. ÖG₁₀ güçlüğüne sahip bazı öğrencilerin bir üçgenin dış teğet çemberi gösterimi

Üçgenin iki dış açıortayının kesişim noktasından üçüncü köşeye ait iç açıortayının geçeceğini kavrayamama güçlüğü (ÖG₁₁): Öğrencilerin ÜBT'nin 14. sorusuna verdiği yanıtlar ve görüşmeleri incelendiğinde, öğrencilerin %93'ünün, bir üçgenin iki dış açıortayının kesişim noktasından üçüncü köşeye ait iç açıortayının da geçeceği bilgisini kavrayamadıkları tespit edilmiştir. Bu kavramsal bilgi eksikliği "muhakeme" süreci ile ilgili bir durumdur. ÖG₁₁ güçlüğüne sahip öğrencilerden biri olan Ö24'ün görüşmesi aşağıdaki gibidir:

...

Görüşmeci: 14. soruyu da boş bırakmışsın. Neden?

Ö24: Dış açıların üç dış açısının... Bir dakika, ABC üçgeni. Şu iki taraftan gelen A'nın dış açısı, C'nin dış açısı. İkisinin birleşim noktası, Şuradan bir şey gelmiş de. O...

Görüşmeci: Açıortay olur mu? (İki dış açıortayın kesişim noktasına üçüncü köşeden gelen doğru parçası kastediliyor)

Ö24: Açıortay mı! Onu bilemiyorum.

Görüşmeci: Peki.

...

Öğrencinin görüşmesinde de görüldüğü gibi, ÖG₁₁ güçlüğüne sahip öğrenciler bir üçgenin iki dış açıortayının kesişim noktasından üçüncü köşeye ait iç açıortayının geçeceğini kavrayamadıkları için, öğrencilerin 14. soruyu çözemedikleri tespit edilmiştir.

"Üçgenin kenarortaylarının bir noktada kesiştiğini gösterir ve kenarortayla ilgili özellikleri açıklar." Kazanımı ile İlgili Bulgular

Öğrencilerin "Üçgenin kenarortaylarının bir noktada kesiştiğini gösterir ve kenarortayla ilgili özellikleri açıklar." kazanımını (3. kazanım) elde edip etmediklerini belirlemek amacıyla ÜBT'nin 4, 9, 13 ve 17. soruları hazırlanmıştır. Öğrencilerin bu sorulara verdikleri yanıtlarının ve görüşmelerinin analizleri sonucunda, bu kazanımla ilgili karşılaşılan öğrenme güçlüklerinin frekans ve yüzde değerleri Tablo 3'de sunulmuştur:

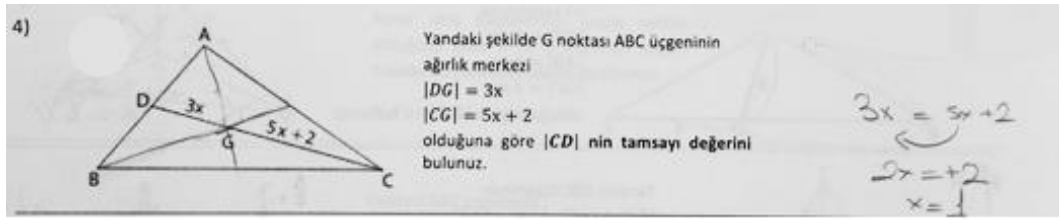
Tablo 3. Öğrencilerin 3. kazanım ile ilgili karşılaştıkları öğrenme güçlüklerinin frekans ve yüzde değerleri

Öğrenme Güçlüğü	Frekans	Yüzde
Ağırlık merkezinin özelliklerini kavrayamama (ÖG ₁₂)	48	%56
Üçgenin içinde verilen bir noktanın ağırlık merkezi olup olmama durumunu kavrayamama (ÖG ₁₃)	76	%88
Sözel ifade ile verilen soruyu şekle aktaramama (ÖG ₁₄)	36	%42

Tablo 3 incelendiğinde öğrencilerin 3. kazanımla ilgili olarak hazırlanan sorulara verdiği yanıtlarından ve görüşmelerinden elde edilen bulgulara göre, 3 farklı öğrenme güçlüğü tespit

edilmiştir. Bu güçlüklerden ÖG₁₂ güçlüğüne öğrencilerin %56'sının, ÖG₁₃ güçlüğüne öğrencilerin %88'inin ve ÖG₁₄ güçlüğüne de öğrencilerin %42'sinin sahip olduğu belirlenmiştir.

Ağırlık merkezinin özelliklerini kavrayamama güçlüğü (ÖG₁₂): Öğrencilerin ÜBT'de 4. soruya verdikleri yanıtları, görüşmeleri eşliğinde analiz edildiğinde 48 öğrencinin, ağırlık merkezinin özelliklerini kavrayamadığı ve ÖG₁₂ güçlüğüne sahip oldukları görülmüştür. Bu güçlüğe sahip öğrencilerin bazıları üçgenin ağırlık merkezinin herhangi bir köşesinden gelen kenarortayını ortadan eşit iki parçaya ayırdığını, bazıları ise üçgenin kenarortaylarının daima açıortay veya yükseklik olacağını düşünmektedir. Bir üçgenin ağırlık merkezi ile ilgili eksik ya da yanlış bilgiye sahip olan bu öğrenciler "muhakeme" sürecinde yaşadıkları sıkıntıdan dolayı ÖG₁₂ güçlüğüyle karşılaşmışlardır. Bu öğrencilerden biri olan Ö31'in ilgili soruya verdiği cevap (Şekil 14) ve Ö31 ile yapılan görüşme şu şekildedir:



Şekil 14. Ö31'in ÜBT'de 4. soru yanıtı

...

Görüşmeci: 4. soruda G noktasını ağırlık merkezi olarak vermişiz. Sen 3x'i, 5x+2'ye eşitlemişsin. Niye eşitledin?

Ö31: Ağırlık merkezi üçgenin tam orta noktası.

Görüşmeci: Orta nokta olduğu için mi eşitledin?

Ö31: Evet hocam öyle.

...

Üçgenin içinde verilen bir noktanın ağırlık merkezi olup olmama durumunu kavrayamama güçlüğü (ÖG₁₃): Öğrencilerin ÜBT'nin 3. kazanıma yönelik hazırlanan sorulara verdiği yanıtlar analiz edildiğinde öğrencilerin %88'inin, üçgenin içinde verilen bir noktanın üçgenin ağırlık merkezi olup olmadığını kavrayamadığı gözlemlenmiştir. ÖG₁₃ güçlüğüne sahip olan bu öğrencilerin ÜBT'nin 9, 13, 17 ve 19. sorularını ya yanlış çözdükleri ya da bu soruları boş bıraktıkları tespit edilmiştir. ÖG₁₃ güçlüğüyle karşılaşan öğrenciler ağırlık merkezi kavramıyla ilgili yeterli bilgiye sahip olmadıklarından dolayı "muhakeme" sürecinde veya sahip oldukları bilgiyi ilgili soruda şekil üzerinde kullanmayı keşfedemediklerinden dolayı "görselleştirme" sürecinde sıkıntı yaşamaktadırlar. Bu öğrencilerden birinin cevap kâğıdı (Şekil 15) ve öğrenci ile yapılan görüşme aşağıdaki gibidir:

9) Bir ABC üçgeninde D noktası $[AB]$ kenarının orta noktası olmak üzere $[CD]$ kenarortayı çiziliyor. Daha sonra $[AC]$ doğru parçası üzerinde E noktası belirlenerek $[BE]$ doğru parçası çiziliyor. $[CD] \cap [BE] = \{M\}$
 $|CM| = 6$ br
 $|MD| = 3$ br
 $|ME| = 5$ br
 olduğuna göre $|BM|$ nu bularak cevabınızı gerekçeli olarak açıklayınız.

$\frac{3}{6} = \frac{5}{x}$
 $30 = 3x$
 $10 = x$

Kenara ve köşeye giden parçaları oranlılarca yaptım.

Şekil 35. Ö8'in ÜBT'de 9. soru yanıtı

...

Görüşmeci: 9. soruya bakıyorum. 9. soruyu 10 bulmuşsun?

Ö8: Orantılayarak yaptım.

Görüşmeci: Niye orantıladın? Yani bu M 'nin özelliği ne ki burada? Çizmişsin şekli. Sonra demişsin ki CDA 90 derece. M 'nin özelliği ne burada?

Ö8: Kenar orta dikmelerinin birleşim noktası olarak gelmiş.

Görüşmeci: Öyle bir şey demiyor ama soruda! Kenarortayların kesim noktası oluyor. " M " o halde nedir?

Ö8: İuu ağırlık merkezi değil.

Görüşmeci: Değil mi?

Ö8: Ağırlık merkezi değil.

Görüşmeci: Peki o zaman.

Sözel ifade ile verilen soruyu şekle aktaramama güçlüğü (ÖG₁₄): Öğrencilerin 3. kazanıma yönelik hazırlanan ÜBT'nin 9. sorusuna verdikleri yanıtlar ve görüşmeleri incelendiğinde, 36 öğrencinin sözel olarak verilen geometrik kavramları şekle aktaramadıkları görülmüştür. ÖG₁₄ güçlüğüne sahip bu öğrencilerin geometriyi şekil odaklı kavradıkları, şekil olmadığı durumlarda güçlük yaşadıkları düşünülmektedir. Bu öğrenciler adım adım şekli inşa edemediklerinden dolayı yaşadıkları güçlük "oluşturma" sürecinden kaynaklanmaktadır. Bu öğrencilerden birinin soruya verdiği cevap (Şekil 16) ve bu öğrenci ile yapılan görüşme şu şekildedir:

9) Bir ABC üçgeninde D noktası $[AB]$ kenarının orta noktası olmak üzere $[CD]$ kenarortayı çiziliyor. Daha sonra $[AC]$ doğru parçası üzerinde E noktası belirlenerek $[BE]$ doğru parçası çiziliyor. $[CD] \cap [BE] = \{M\}$
 $|CM| = 6$ br
 $|MD| = 3$ br
 $|ME| = 5$ br
 olduğuna göre $|BM|$ nu bularak cevabınızı gerekçeli olarak açıklayınız.

Şekil verin!!!

Şekil 46. Ö20'nin ÜBT'de 9.soru cevabı

...

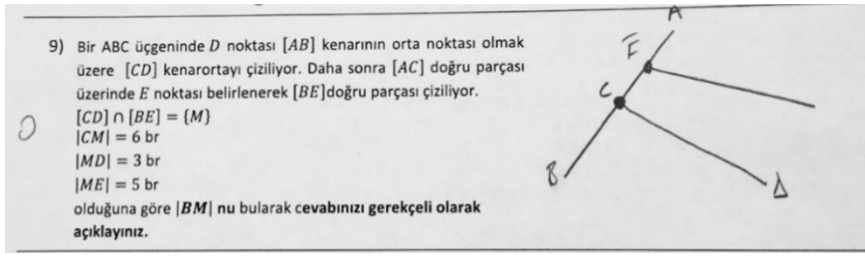
Görüşmeci: Peki, 9.soruya da "şekil verin" demişsin!

Ö20: Evet.

Görüşmeci: Şekli kendin çizemiyor musun?

Ö20: Hayır.

ÖG₁₄ güçlüğüne sahip diğer bir öğrencinin 9. soruya verdiği yanıt (Şekil 17) ve öğrenci ile yapılan görüşme aşağıdaki gibidir:



Şekil 17. Ö48'in ÜBT'de 9.soru cevabı

...

Görüşmeci: 9. soruya bakalım.**Ö48:** Bunu hiç anlamadım bile...**Görüşmeci:** Peki.

Elde edilen bulgular öğrencilerin üçgenin açıortay ve kenarortayları konusunda çeşitli güçlüklerle sahip olduklarını göstermektedir. Karşılaşılan güçlüklerin çoğunluğunun %50'nin üzerinde olduğu gözlemlenmiştir. Üçgenin açıortayları konusunda öğrenciler tarafından en çok karşılaşılan güçlüğü "Bir açının açıortayını oluşturamama (ÖG₁)" güçlüğü, üçgenin kenarortayları konusunda ise en çok karşılaşılan güçlüğü "Üçgenin içinde verilen bir noktanın ağırlık merkezi olup olmama durumunu kavrayamama (ÖG₁₃)" güçlüğü olduğu tespit edilmiştir.

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada 9. sınıf öğrencilerinin üçgenin açıortayları ve kenarortayları konularını öğrenirken karşılaştıkları güçlükler belirlenmiştir. Öğrencilere uygulanan ÜBT'nin ve öğrencilerle yapılan görüşmelerin analizi sonucunda öğrencilerin çeşitli güçlüklerle karşılaştıkları tespit edilmiştir. Duval (1998) geometri öğretimini görselleştirme, oluşturma ve muhakeme olmak üzere üç bilimsel süreçte tanımlamış; öğrencilerin karşılaştıkları güçlüklerin bu üç bilişsel düzey arasında ilişki kurulamamasından kaynaklandığını belirtmiştir.

Araştırmada, öğretim programındaki "Bir açının açıortayını çizer ve özelliklerini açıklar." kazanımına (1. kazanım) yönelik elde edilen bulgularda öğrencilerin hepsinin bir açının açıortayını oluşturamama (ÖG₁) güçlüğüne sahip olduğu belirlenmiştir. ÜBT'deki ilgili soruda öğrencilerden çizim uygulamalarını adım adım yaparak bir açının açıortayını oluşturmaları istenmiştir. Elde edilen veri analizlerinde öğrencilerin hiçbirinin çizimi doğru yapamadığı tespit edilmiştir. Yapılan görüşmelerin analizlerinde birçok öğrencinin pergel-cetvel uygulamalarına sıcak bakmadığı, geometri sorularını şekil odaklı anlamlandırdığı tespit edilmiştir. Adım adım inşa uygulamalarında başarılı olamayan öğrencilerin Duval (1998)'in tanımladığı bilişsel süreçlerden özellikle, matematiksel araç ve gereçlerle geometrik inşaların yapılmasını içeren "oluşturma" sürecinde sıkıntı yaşadıkları düşünülmektedir. Öğrencilerin "oluşturma" sürecinde yaşadığı sıkıntı diğer bilişsel süreçlerle ("görselleştirme" ve "muhakeme") ilişki kurulmasını engellediğinden dolayı, bu öğrencilerin ÖG₁ güçlüğüne sahip oldukları tespit edilmiştir. Elde edilen bu güçlüğü paralel olarak Karakuş (2014) ve Tosun (2019)'un yaptığı araştırmalarda da öğrencilerin geometrik inşalarda zorlandığı tespit edilmiştir.

MEB'in matematik dersi öğretim programlarında (MEB, 2013; MEB, 2017) yer verdiği adım adım pergel-cetvel uygulamalarını yaptırmak öğrencilere çeşitli faydalar sağlamaktadır. Pergel cetvel inşaları öğrencilerin geometri düşünme seviyelerini geliştirir (Napitupulu, 2001), öğrencilere mantıksal düşünme becerisi sağlar, öğrencilerin geometrik şekillerin özelliklerini daha iyi anlamalarına yardımcı olur (Fahlberg-Stojanovska ve Stojanovski, 2009; Hoffer, 1981). Alanyazında pergel-cetvel inşaları olarak yer alan çizim uygulamaları pergel ve cetvel somut materyalleriyle yapılacağı gibi geliştirilen dinamik yazılımlarla da yapılabilir (Çiftci ve Tatar, 2014). Öğrencilerin hem pergel, cetvel gibi somut araçları kullanması hem de bilgi ve iletişim teknolojilerinden faydalanması MEB ortaöğretim matematik dersi öğretim programında teşvik edilmektedir (MEB, 2013; MEB 2017). Ülkemizde yapılan geometri derslerinde bu tarz uygulamaların göz ardı edildiği ya da etkili bir şekilde yapılamadığı düşünülmektedir. Görüşme esnasında bazı öğrenciler bu uygulamalarla hiç karşılaşmadığını, geometri konularında genellikle şekil üzerinden soru çözdüklerini belirtmişlerdir. Oysaki adım adım yapılan inşalarla öğrenciler geometrik kavramların temel özelliklerini öğrenme ve uygulama imkânı bulur (Freeman, 2008). Geometrik kavramları tam öğrenemeyen öğrenciler ilerleyen konularda birçok güçlüklerle karşılaşır. Ülkemizde geometri alanında yaşanan sorunların temellerinden birinin bu olduğu söylenebilir. Açıkgül ve Arslaner'in (2015) yaptıkları araştırmada, öğretmen adaylarından bazılarının daha önce adım adım çizim etkinlikleri yaparak geometrik yer tespit etme problemleri ile karşılaşmadıklarını ifade ettikleri görülmüştür.

Araştırmada 1. kazanımla ilgili elde edilen bulgulara göre, öğrencilerin %93'ünün bir D noktasının A açısının açortayı üzerinde olup olmadığını kavrayamama güçlüğüyle (ÖG₂) karşılaştığı tespit edilmiştir. Bu konuda güçlük yaşayan öğrencilerin birçoğu, bir D noktasının A açısının açortayı olması için gerekli şartın D noktasından açının kollarına çizilen doğru parçalarının açının kolları ile yaptığı açının 90 derece ve uzunluklarının birbirlerine eşit olması gerektiği düşüncesinde oldukları gözlemlenmiştir. Bu öğrenciler, D noktasından açının kollarına çizilen doğru parçalarının açının kolları ile yaptığı açılar birbirine eşit 90 dereceden farklı bir açı ve uzunluklarının birbirlerine eşit olması durumunda D noktasının açının açortayı üzerinde olmadığını söyleyerek hata yapmaktadırlar. Ayrıca elde edilen verilerin analiz sonucu öğrencilerin %92'sinin bir A açısının başlangıç noktasından çizilen ışının, açının açortayı olup olmadığını kavrayamama (ÖG₃), %65'inin ise bir açının açortayı üzerindeki bir noktanın açının kollarına olan uzaklığının eşit olduğunu kavrayamama (ÖG₄) güçlüklerine sahip oldukları görülmüştür. Öğrencilerin ÖG₁ güçlüğüne sahip olmalarının ÖG₂, ÖG₃ ve ÖG₄ güçlükleri ile karşılaşmalarına sebep olduğu düşünülmektedir. ÖG₂ güçlüğü yaşayan öğrencilerin kavramsal bilgi eksiklikleri olduğundan özellikle "muhakeme", ÖG₃ ve ÖG₄ güçlükleri yaşayan öğrencilerin kavramsal bilgi eksiklikleri olduğundan veya bilgilerini soru üzerinde kullanamadıklarından dolayı "muhakeme" ve "görselleştirme" bilişsel süreçlerinde sıkıntı yaşadıkları ve bilişsel süreçler arasında ilişki kuramayarak öğrenme güçlükleri ile karşılaştıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin, bir açının açortayını

adım adım oluşturup kavramsal bilgiyi iyi şekilde öğrendiklerinde ÖG₂, ÖG₃ ve ÖG₄ güçlükleri ile karşılaşma ihtimallerinin azalacağı düşünülmektedir.

“Üçgenin iç ve dış açıortaylarının özelliklerini gösterir.” kazanımı (2. kazanım) ile ilgili bulguları incelendiğinde, öğrencilerin %13’ünün bir üçgenin iç açıortay kavramını yanlış kavradıkları (ÖG₅) tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden bazıları üçgenin bir açısına ait iç açıortayını yükseklik ya da kenarortay kavramlarıyla karıştırmaktadır. Bazıları ise üçgenin bir açısına ait açıortayın her üçgen çeşidi için aynı zamanda kenarortay ve yükseklik olacağını belirtmektedir. 2. kazanım ile ilgili ÜBT’de geliştirilen sorularda öğrencilerden üçgenin üç kenarından gelen açıortaylarının bir noktada kesiştiği bilgisini kullanarak doğru cevaba ulaşmaları beklenmiştir. Öğrencilerden %74’nün üçgenin iki iç açıortayının kesim noktasından üçüncü iç açıortayın da geçeceğini kavrayamama (ÖG₇), %93’ünün ise üçgenin iki dış açıortayının kesişim noktasından üçüncü köşeye ait iç açıortayının geçeceğini kavrayamama (ÖG₁₁) güçlükleri ile karşılaştıkları tespit edilmiştir. Bir üçgenin açıortaylarının kesim noktası üçgenin iç teğet ya da dış teğet çemberlerinin kesim noktasıdır. Öğrencilerin bu noktaları keşfedememelerinin sebebinin, öğrencilerin iç teğet çember ve dış teğet çember kavramlarını yeterince kavrayamaması olarak düşünülmektedir. Zira araştırmada öğrencilerin %95’inin iç teğet çember (ÖG₈), %99’unun dış teğet çemberi kavrayamama (ÖG₁₀) güçlükleriyle karşılaştıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin yüksek çoğunluğu bir üçgenin iç teğet ve dış teğet çemberlerinin gösterimini veya özelliklerini bilmemektedir. Açıkgül ve Arslaner (2015)’in yaptığı çalışmada da, iç teğet çemberin merkezinin üçgenin iç açıortaylarının kesiştiği nokta, dış teğet çemberin merkezinin ise üçgenin iki dış, bir iç açıortayının kesiştiği nokta olması bilgilerinin öğrencilerin büyük çoğunluğu tarafından kavranmadığı tespit edilmiştir. 2. kazanımla ilgili bulgular ışığında öğrencilerin %65’inin iç açıortay teoremini (ÖG₆), %71’inin ise dış açıortay teoremini kavrayamama (ÖG₉) güçlükleriyle karşılaştıkları sonucu elde edilmiştir. Bu öğrenciler, üçgenin bir açıortayının kenarların uzunluklarının arasında oluşturduğu ilişkiyi ya bilmemekteler ya da yanlış bilmektedirler. İkinci kazanımla ilgili öğrencilerin sahip oldukları ÖG₅, ÖG₆, ÖG₈, ÖG₉ ve ÖG₁₀ güçlükleri daha çok kavramsal bilgi eksikliğinden kaynaklandığı dolaylı öğrencilerin özellikle “muhakeme”, ÖG₇ ve ÖG₁₁ güçlükleri öğrencilerin hem kavramsal bilgi eksikliği hem de ilgili sorularda görsel olarak bilgiyi keşfedememelerinden kaynaklandığından dolayı öğrencilerin özellikle “muhakeme” ve “görselleştirme” bilişsel süreçlerinde sıkıntı yaşadıkları düşünülmektedir. Herhangi bir bilişsel süreçte sıkıntı yaşayan öğrenciler bilişsel süreçler arasında ilişki kuramadığından dolayı öğrenciler öğrenme güçlükleriyle karşılaşmaktadırlar.

Araştırmada ÜBT’nin “Üçgenin kenarortaylarının bir noktada kesiştiğini gösterir ve kenarortayla ilgili özellikleri açıklar.” kazanımı (3. kazanım) ile ilgili sorularından elde edilen bulgularda öğrencilerin %56’sının kenarortayların kesim noktası olan ağırlık merkezini kavrayamama güçlüğü (ÖG₁₂) yaşadığı tespit edilmiştir. Bu güçlüğe sahip öğrencilerden bazıları ağırlık merkezinin kenarortayları tam ortadan ikiye böldüğü, bazıları köşeden 1 kenardan 2 oranında böldüğü yanlış bilgisine sahiptir. ÖG₁₂ güçlüğüne sahip bazı öğrenciler de ağırlık merkezinden geçen üçgenin yardımcı

elemanının açıortay veya yükseklik olacağını düşünmektedir. Ayrıca öğrencilerin %88'inin üçgenin içindeki bir noktanın ağırlık merkezi olup olmadığını kavrayamama güçlüğüyle karşılaştığı tespit edilmiştir (ÖG₁₃). Bu güçlüğe sahip öğrencilerin çoğunluğunu ÖG₁₂ güçlüğüne sahip öğrenciler oluşturmaktadır. ÖG₁₂ güçlüğüne sahip öğrenciler kavramsal bilgi eksikliğine sahip olduklarından dolayı özellikle "muhakeme", ÖG₁₃ güçlüğüne sahip öğrenciler hem kavramsal bilgi eksikliği hem de ilgili soruda bilgiyi keşfedemediklerinden dolayı özellikle "muhakeme" ve "görselleştirme" süreçlerinde sıkıntı yaşadıkları düşünülmektedir. Gül (2014), öğrencilerin üçgenler konusuna yönelik matematiksel başarılarını ölçtüğü ve öğrencileri Van Hiele düzeylerine göre analiz ettiği araştırmasında, çalışmanın uygulandığı öğrencilerin yarısının ağırlık merkezi kavramını ve ağırlık merkezinden bir üçgenin kenarortaylarının geçtiğini bilmediklerini tespit etmiştir. Dinamik geometri yazılımlarının öğrencilerin geometrik düşünme, geometri başarısı ve ispat yapma becerisi üzerindeki etkilerini inceleyen Kılıç (2013) da yaptığı çalışmada, öğrencilerin ağırlık merkezini tanımlayabildiğini fakat ağırlık merkezinin kenarortayı hangi oranda (2:1 oranı) böldüğü bilgisini bilmedikleri sonucuna ulaşmıştır. Araştırma konusunun öğretim programındaki 3. kazanımıyla ilgili elde edilen diğer bir güçlük, öğrencilerin sözel ifade ile verilen soruyu şekle aktaramamasıdır (ÖG₁₄). Tüm öğrencilerin %42'sinin oluşturduğu bu güçlüğe sahip öğrenciler sadece sözel ifadesi verilen üçüncü kazanım ile ilgili sorunun şeklini ya çizememiş ya da yanlış çizmişlerdir. Elde edilen bulgular doğrultusunda ÖG₁₄ güçlüğüne sahip öğrencilerin "oluşturma" sürecinde sıkıntı yaşayan öğrenciler olduğu, bu öğrencilerin geometriyi şekil odaklı anlamlandırdıkları, geometride sözel sorulara sıcak bakmadıkları hatta bazı öğrencilerin sözel soruyu gördüklerinde soruyu okumadan geçtikleri gözlemlenmiştir. Fischbein (1993)'e göre geometride şekli yorumlayabilmek için kavramsal alt yapı gelişmiş olmalıdır. Öğrencilerin ÖG₁₄ güçlüğüne sahip olmalarının sebebinin, geometrik kavramları tam öğrenmeden şekil odaklı örnekler çözmekten kaynaklandığı söylenebilir. Elde edilen sonuca paralel olarak Karpuz, Koparan ve Güven (2014) yaptıkları çalışmada öğrencilerin şekilsiz soruların çözümünde kavramı temsil eden şekli çizemedikleri, şekil ve kavram arasında kurmaları gereken bağlantıyı kuramadıkları sonuçlarını elde etmişlerdir.

Araştırmanın sonuçları incelendiğinde öğrencilerin karşılaştıkları öğrenme güçlüklerinin en önemli sebebinin öğrencilerin geometrik kavramları tam öğrenememeleri olduğu düşünülmektedir. Geometrik kavramları tam öğrenemeyen öğrenciler problem çözümlerinde güçlüklerle karşılaşmışlardır. Sıralı öğrenme sistemine sahip geometri alanında tam öğrenilemeyen kavramlar ileriki kavramların öğrenilmesini de olumsuz yönde etkilemektedir. Alanyazında öğrencilerin geometrik kavram bilgisinin eksikliği birçok araştırmanın sonucunda elde edilmiştir (Akuysal, 2007; Ayvaz, Gündüz ve Bozkuş, 2017; Blanco, 2001; Bütüner, 2017; Gutierrez ve Jaime, 1999; Gül, 2014; Gürefe ve Gültekin, 2016; Gürefe, Yazar, Pazarbasi ve Es, 2014; Karpuz ve diğerleri., 2014; Kılıç, 2013, Özerem, 2012; Ubuz, 1999). Öğrencilerin kavram bilgilerinin eksik olması öğrencilerin yanlış genellemeler ve tahmini çözümler yapmalarına sebep olmaktadır. Örneğin, ağırlık merkezi kavramını

tam öğrenemeyen bir öğrenci ağırlık merkezini üçgenin bütün yardımcı elemanlarının geçtiği merkezi olarak düşünebilmektedir. Ayrıca kavramsal bilgi eksikliği olan öğrenciler özellikle şekil üzerindeki geometri problemlerinde şekli bütüncül görüp çözüm için yeterli keşifleri yapamamaktadırlar. Öğrencilerin geometride yaşadığı güçlük sebeplerinden biri de öğrencilerin geometri problemlerini şekil odaklı kavramalarıdır. Öğrencilerin sözel olarak şekilsiz verilen soruları şekle aktaramadıkları, yanlış aktardıkları ya da hiç bakmadan geçtikleri gözlemlenmiştir. Barut ve Retnawati (2020) yaptıkları araştırmada bu sonuca paralel olarak öğrencilerin görselleştirme becerilerinin eksik olduğunu, geometri ile ilgili terimleri ve sembolleri anlayamadığı ve uygun muhakeme yetersizliklerine sahip olduklarını tespit etmiştir. Ayuningtyas, Mardiyana ve Pramudya (2019)'nın yaptıkları çalışmada da öğrencilerin geometrik akıl yürütme yeteneklerinin düşük olduğu ortaya çıkmıştır. Bunların altında yatan sebebin öğrencilerin kavram bilgilerindeki eksiklik olduğu söylenebilir. Kavram bilgileri eksik olan öğrenciler temel olarak "muhakeme" süreci olmak üzere "görselleştirme" ve "oluşturma" süreçlerinde de sıkıntı yaşamaktadırlar. Dolayısıyla bu üç süreç arasında zincirleme bağlantı kuramayan öğrenciler geometri problemlerini çözememekte ve öğrenme güçlükleriyle karşılaşmaktadırlar (Duval, 1995).

Öneriler

Araştırmada elde edilen her bir öğrenme güçlüğü oranının yüksek olması, öğrencilerin birçoğunun geometride sıkıntı yaşadığını göstermektedir. Karşılaşılan öğrenme güçlüklerinin en büyük sebeplerinden birisi öğrencilerin temel geometrik kavram bilgilerinde eksiklik olmasıdır. Bu yüzden yapılan öğretimde öncelikle kavramsal bilgilerin eksiksiz öğrenilmesi ve öğretilmesi önerilmektedir. Kavramların iyi öğrenilerek çeşitli etkinliklerle kavramlar arasında bağlantılar kurulmasının öğrencilerin geometrik düşünme seviyelerini artıracığı düşünülmektedir. Özellikle ilkokul ve ortaokulda kavramsal öğrenmeye önem verilerek, öğrencilerin ileriki yıllarda öğrenme güçlükleriyle karşılaşmamaları adına öğrencilerin geometrik kavram temelleri sağlam atılmalıdır. Ayrıca geometri öğretiminde dinamik geometri yazılımları etkin kullanılarak öğrencilerin görselleştirme, oluşturma ve muhakeme süreçlerini ayrı ayrı geliştirmek ve bu süreçler arasındaki ilişkileri güçlendirmek adına çeşitli etkinlikler yapılabilir.



<http://kefad.ahievran.edu.tr>

Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi

ISSN: 2147 - 1037

ENGLISH VERSION

Introduction

Many students find mathematics, which is one of the courses in which learning difficulties are experienced the most, challenging (Tall and Razali, 1993). It is difficult for a student who has difficulties in a subject in a mathematics course, where the prerequisite relationships are strong, to be successful in further subjects including this subject (Çiftci, 2018). In general, teaching operations without understanding conceptual knowledge in mathematics can cause mistakes and dislike for mathematics (Van de Walle, Karp and Bay-Williams, 2010). When the literature on mathematics education is reviewed, the difficulties that students encounter while learning any subject are discussed under the terms "misconception" and "error" (Bingölbali and Özmantar, 2014). Misconceptions are concepts that are accepted by a student for a long time, occur in more than one situation, cannot be easily changed by the student, and contradict scientific facts, while error is the misuse of mathematical expressions and ideas (Erbaş, Çetinkaya and Ersoy, 2009). In the field of geometry, which is one of the important sub-branches of mathematics and an integral part of the curriculum, students learn geometric shapes, their properties, and their relationships with each other. In geometry, where high-level skills such as exploring relationships, modeling, problem-solving, and analysis are gained, students generally have difficulties, while some students fail (Duatepe, 2004). According to Duval (1998), teaching geometry is more difficult than teaching numerical operations. Students experience more difficulties in geometry than in other areas of mathematics (Chen, 2021). The reason why geometry is seen as complex compared to algebra is that there is a lot of visuality in geometry and it is difficult to visualize the concepts in mind (Karakuş, 2008).

The French scientist Raymond Duval studied geometric activities from a cognitive perspective. According to Duval (1998), geometry includes three kinds of scientific processes. The visualization process, which is the first of these processes, includes processes such as a representation of a situation, intuitive exploration of a complex situation, holistic view, and subjective verification. Another process, the rendering process, involves making geometric constructions using mathematical tools. These tools are tools such as compass, ruler, or dynamic software. Finally, the reasoning process involves extending knowledge to an explanation or proof. Every move, trial, and error to overcome a challenge is a form of judgment.

The concept of the triangle, which is one of the basic concepts in geometry teaching, is frequently used in teaching more complex geometric concepts (Kaplan and Hızarcı, 2015). The concept of the triangle, which is not fully learned, may cause difficulties in the later subjects of geometry. In order to fully learn the concept of the triangle, it is necessary to learn the elements of the triangle and the properties of these elements (Çiftci, 2018). The bisectors of the angles of a triangle, the medians of the sides, the median perpendiculars, the heights, and the properties of these concepts are included in the school curriculum as auxiliary elements of the triangle (MEB, 2013; MEB, 2017). In these concepts, which are important elements of the triangle concept, the student encounters various difficulties (Altıntaş and İlgün, 2017; Gül, 2014; Güreffe and Gültekin, 2016; Kılıç, 2013) and therefore cannot fully learn the concept of triangle. Knowing the difficulties experienced while learning any subject is an important step in designing learning environments that will provide an effective understanding (Rasmussen, 1998; Yetkin, 2003) and it will be useful for teachers in choosing efficient teaching approaches (Tatar and Dikici, 2008).

In the literature, studies to identify the difficulties in the field of geometry are less than the studies in the field of algebra. When the studies are reviewed, it is seen that the students have had various learning difficulties in geometry. Gutierrez and Jaime (1999) investigated the concept images, difficulties, and errors related to the concept of the height of a triangle with a written test on 190 pre-service teachers. In the results obtained, it was determined that the students made mistakes such as drawing a median or a central perpendicular instead of the desired height to be drawn, drawing any straight-line segment that is not perpendicular to the base from the top to the base, and drawing a different height from the desired base to the base. Baran (2011) found that students had various difficulties in associating concepts, definitions, and generalizations in triangles with each other in his thesis study in which he investigated the difficulties that students have about triangles. In another study investigating the difficulties encountered in triangles, İç and Demirkol (2008) investigated the basic mistakes and misconceptions of secondary school students about triangles. In their studies, the researchers determined that the students could not analyze the data in the questions well, they made calculation errors about angles in a straight line, angles in a triangle, and angle-sides in a straight line, and they confused the properties of angles in a straight line with angles in a triangle. Similar to the results of this study, Özsoy and Kemankaşlı (2004) also found that students were confused about the properties of the subjects and had difficulties in analyzing the data in their study in which they examined the mistakes and misconceptions made by students about circles. However, it was concluded that the students made many operational mistakes and had difficulty in establishing a connection between the concepts.

Basic concepts in geometry, which are not fully understood by students, cause students to encounter various difficulties in the future. Ubuz (1999), who investigated students' mistakes and misconceptions in basic geometry subjects based on the subject of angles, stated that students did not

consider geometric concepts with their properties, but only perceived them according to their physical appearance. In addition, in this study, he stated that students had conceptual misconceptions about basic geometry subjects such as "line", "parallel angles", "triangle", "polygon" and "parallelogram". Ubuz (1999) stated that the mistakes made by the students were the same in almost every question, and that the most important reason for making mistakes was *visuality*, which is the first level of geometrical thinking of the Van Hiele theory. Hershkowitz (1987), Gutierrez and Jaime (1999), and Blanco (2001) also drew attention to the difficulties students encountered in basic concepts in geometry in their studies. According to Öksüz (2010), students had difficulties in associating geometric concepts with daily life situations. In another study investigating conceptual misconceptions, Yenilmez and Yaşa (2008) identified students' misconceptions about "line, line segment, and ray" and determined whether these misconceptions differed in terms of some demographic variables. According to the results of the study, students with high achievement in mathematics were less likely to make mistakes than students with low achievement. In addition, it was determined that students with a high interest in geometry had fewer misconceptions than students with a high level of Turkish success compared to less interested students. In addition, the misconceptions were also examined in terms of gender, and it was found that female students answered more questions in the test than male students and had fewer misconceptions. Ubuz (1999), on the other hand, found that female students were more successful than male students, but they made more mistakes.

In geometry, where spatial thinking has an important place, students face various difficulties in thinking and comprehending three-dimensional objects. In his study, Özer (2012) found that students had misconceptions about length, angle, transformations, construction, and three-dimensional shapes, lack of previous knowledge, reasoning, and basic operation errors, and offered suggestions for eliminating these difficulties. In the study of Küçükaydın and Gökbulut (2013), in which the subject of three-dimensional geometric objects was discussed, none of the pre-service teachers participated in the study could not explain all the geometric objects in the study correctly, and the pre-service teachers also had difficulties in defining and sampling geometric objects. In the study conducted by Türnüklü and Ergin (2016), it was observed that students made mistakes of over-specializing and over-generalizing about three-dimensional objects. Students face various difficulties while learning subjects and concepts in their education life. These difficulties they encounter may cause them to learn the subject incompletely and therefore to encounter different difficulties in future subjects. Knowing the difficulties they will encounter while learning a subject or concept is an important step in designing teaching-learning environments that will provide effective learning (Rasmussen, 1998; Yetkin 2003). The concept of the triangle, which forms an important part of geometry and is accepted as the basis of geometric concepts, has an important role in teaching other concepts of geometry (Zeybek, 2013). In this direction the purpose of the current study is to determine the difficulties that students encounter while learning the subject of bisector and medians of triangles.

Method

In the study, case study design, one of the qualitative research methods, was used. Case studies are studies that examine the special situations of individuals, groups, cultures, and regions in depth (Patton, 2014). In case studies, an event or a situation is explained in detail (Merriam, 2013). In the study, the case study design was preferred because the difficulties faced by the 9th-grade students in learning the subject of auxiliary elements of the triangle were examined in depth.

Participants

The participants of this research consist of 86 9th-grade students studying in 3 different schools in Erzurum. Convenient sampling method was used in the determination of the study group. In the convenient sampling method, prevention of time, money, and labor loss is taken into consideration while determining the study group (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz and Demirel, 2009). The study group consisted of students studying in 3 different schools in the central districts of Erzurum province. 39 (45%) of the students constituting the study group are girls and 47 (55%) are boys.

Data Collection Tools

In this study, quantitative and qualitative data collection tools were used in line with the research problem. The quantitative data of the study were collected by the Triangles Knowledge Test (TKT) developed by the researcher, and the qualitative data were collected through interviews with the students.

Triangles Knowledge Test (TKT): In order to determine the difficulties faced by the students in the study, TKT consisting of 17 open-ended, 5 fill-in-the-blank, and 2 true-false questions was prepared. The questions in the TKT were formed in line with the acquisitions and outcome explanations related to the auxiliary elements of the triangle under the triangles unit in the Secondary Education Mathematics Lesson (9th-12th grades) Curriculum. The relevant acquisitions and acquisition explanations in the Secondary Education Mathematics Lesson (9th-12th Grades) Curriculum are as follows (MNE, 2013):

1. Being able to draw the bisector of an angle and explain its properties

✓ *It is discovered that the lengths of the perpendiculars lowered into the arms of the angle from a point taken on the bisector are equal.*

✓ *Their equivalents are used in compass-ruler or dynamic geometry software.*

2. Being able to show the properties of the interior and exterior bisectors of a triangle

✓ *Relationships of the intersection of interior and exterior bisectors and interior and exterior bisector theorems are given in a triangle.*

✓ *The inner tangent and outer tangent circles of the triangle are drawn.*

✓ *Information and communication technologies are used.*

3. Being able to show that the medians of the triangle intersect at a point and to explain the properties of the median.

✓ *It is emphasized that the point where the medians intersect is the centroid of the triangle; the properties related to the center of gravity of the triangle are examined.*

✓ *In ruler-compass or dynamic geometry software, their equivalents are used.*

While preparing the TKT, 9th-grade mathematics textbooks (Erbaş, Çetinkaya, Güven, Karataş and Çinkır, 2015; Karakuyu and Bağcı, 2015) used in educational institutions affiliated to the Ministry of National Education in the 2014-2015 academic year were used. The created test was developed to include at least one question for each acquisition. For the content validity of the test, a table of specifications was prepared to show the questions in the TKT and the acquisitions they are related to. TKT, which was prepared with this specification table, was examined by 5 lecturers who are experts in mathematics education and 4 experienced high school mathematics teachers. After the feedback from the experts, necessary adjustments were made in the tests and the content validity was ensured.

Developed after expert opinions, TKT was piloted to 130 10th-grade students in three different schools in the first semester of the 2014-2015 academic year for reliability studies. Since the research subject is the subject of the second semester of the 9th-grade, 10th-grade students were preferred in the pilot study. While selecting these students, attention was paid to ensure that their levels were close to those of the students in the schools where the study would be conducted, according to their high school entrance scores. As a result of the pilot application of the developed TKT, each student's paper was scored. Scoring was evaluated as 0, 1, and 2 for each question. 2 points were given for completely correct answers, 1 point for answers containing only part of the correct answer, and 0 points for incorrect or blank answers. As a result of the evaluation, the scores of the students were ordered from highest to lowest, and the upper group (27% of the group) and the lower group (27% of the group) were determined. Considering these groups, the difficulty (P) and item discrimination (D) values were calculated for each item of the TKT. In addition, the data collected as a result of the pilot application was analyzed and the KR-20 internal consistency coefficient of the TKT was found to be 0.99.

Interview: In the study, unstructured interviews were conducted in order to examine the answers given by the students in the knowledge test in depth. Since each student's answer to each question may be different, the interview form was not used, instead, TKT, in which each student answered the questions, was used. In both the control and experimental groups, the answers given by the students in the knowledge test were questioned by asking "How?", "Why?", "Can you explain?" and learning difficulties were determined.

Research Process

The study was carried out in 2014-2015. In the first grade with 34 students (9-A), in the second grade with 27 students (9-B), and in the third grade with 25 students (9-C), the teachers taught the subject of auxiliary elements of the triangle with their own methods. As a result of the teachers' teaching, TKT was applied to each group as a post-test for 2 hours. After the TKTs were applied as a post-test, the stage of determining the difficulties students faced in learning was started. First of all, the papers of the students were examined, and incorrect and empty questions were determined. Then, interviews were conducted with each of the 86 students in order to examine the answers given by the students in the knowledge test in depth. Interviews with 86 students started the day after the post-test and were completed within three days. In the next process, the interviews were transcribed in the computer environment. The tests applied to the students and the interviews were analyzed together and the difficulties faced by the 9th-grade students about the auxiliary elements of the triangle were determined.

Analysis of Data

In order to determine the learning difficulties by evaluating the answers given by the students to the questions in TKT in detail, the interviews with each student were first recorded in line with the permission of the students. Then, the data transcribed in the computer environment were analyzed using the descriptive analysis technique. The data obtained in the descriptive analysis technique are summarized according to predetermined categories (Yıldırım and Şimşek, 2008). The interviews of the students transcribed were read over and over again by the researcher and gathered under certain difficulties according to the difficulties they experienced and the misconceptions they had. A code was given to each of the difficulties obtained (LD1, LD2, etc.). The codes obtained were classified under the predetermined titles (category) of the acquisitions related to the auxiliary elements of the triangle in the curriculum. Each identified difficulty was handled in terms of "visualization", "creation" and "reasoning" processes in Duval's cognitive model, and it was determined in which cognitive processes the students encountered difficulties according to the difficulties they encountered. The difficulties that emerged were presented with the help of percentage and frequency tables, and the interviews with the students who had this difficulty were given descriptively. While determining the learning difficulties, students were coded as S1, S2, and S86.

Ethical Permissions of Research

In this study, all the rules specified to be followed within the scope of the "Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics Directive" were complied with. None of the actions specified under the heading "Actions Contrary to Scientific Research and Publication Ethics", which is the second part of the directive, has been taken.

According to the ULAKBİM decision dated February 25, 2020, retrospective ethics committee certificate is not required for studies using research data before 2020. Since the data of the study were obtained in 2014-2015, an ethics committee certificate was not obtained.

Findings and Interpretation

Findings related to the learning difficulties faced by 86 students studying at three different schools in the 2014-2015 academic year about the auxiliary elements of the triangle are given under the acquisition titles in the curriculum of the relevant subject. The learning difficulties obtained were determined by examining the answers given by the students to the TKT questions and the interviews with each student. The percentages and frequencies of learning difficulties recorded when students encounter at least one question are presented under the following headings, accompanied by the descriptive analysis of the interviews with the students and the answers given by the students to the questions they encountered with the related difficulties.

Findings Regarding to Learning Outcome of “Being able to draw the bisector of an angle and explain its properties.”

1st, 20th, 23rd, and 24th questions of TKT were prepared in order to determine the difficulties faced by the students towards the learning outcome (1st outcome) “Being able to draw the bisector of an angle and explains its properties.” As a result of the analyzes of the answers given by the students to these questions and their interviews, the frequency and percentage values of the learning difficulties related to this outcome are presented in Table 1:

Table 1. Frequency and percentage values of learning difficulties encountered by students regarding the 1st learning outcome

Learning Difficulty	Frequency	Percentage
Inability to form the bisector of an angle (LD1)	86	%100
Inability to comprehend whether a point D is on the bisector of angle A (LD2)	80	%93
Not being able to comprehend whether the line segment drawn from the starting point of an angle A is the bisector of the angle (LD3)	79	%92
Inability to grasp that the distance of a point on the bisector of an angle to the arms of the angle is equal (LD4)	56	%65

When Table 1 is examined, it is seen that 4 different learning difficulties were determined according to the findings obtained from the answers given to the questions prepared for the 1st outcome. Of these difficulties, it was observed that all of the students had the LD1 difficulty, 93% of the students had the LD2 difficulty, 92% of the students had the LD3 difficulty and 65% of the students had the LD4 difficulty.

Difficulty in forming the bisector of an angle (LD1): When the TKT papers and interviews of the students were examined, it was determined that all students had difficulty in forming the bisector of an angle. This difficulty was obtained from the 24th question of TKT, which was prepared for the 1st outcome. When the answers given by the students to the 24th question were examined, it was observed that all the students either left blank or filled in the blanks incorrectly. As a result, it was determined that all of the students could not comprehend the steps of creating the bisector of an angle step by step

by using the compass-ruler tools. Students who experienced this difficulty had difficulties especially in the process of "creating", which involves the construction of geometric structures using mathematical tools. The answer given by S7, who has LD1 difficulty, to the question in TKT (Figure 1) and the interview with the student are as follows:

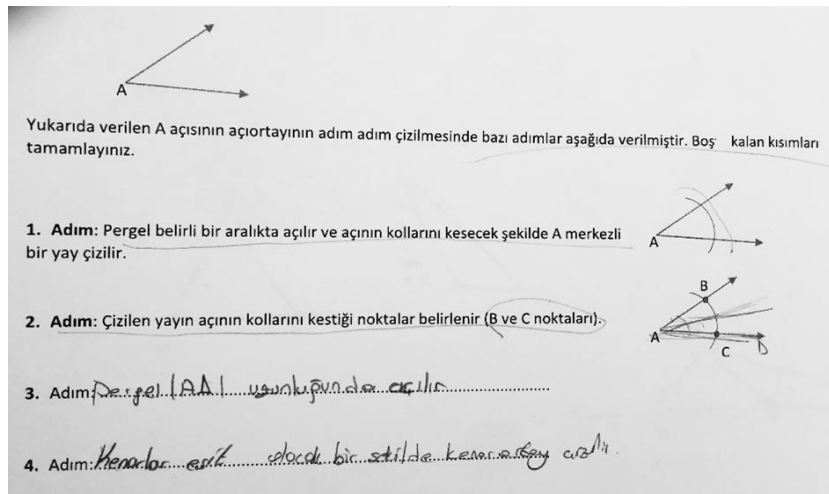


Figure 1. S7's answer to question 24 in TKT

...

Interviewer: How did you think about question 24?

S7: Which one? Is that it?

Interviewer: You said the third step: Compass AD length...

S7: It is opened in length...

Interviewer: OK. You wrote the D in length AD!

S7: Are we going to create bisector here?

Interviewer: Yes.

S7: That's why... For example, such an angle... No, wait a minute... What did I do? and how did I think? Hah, we're going to open it so much that we can extend this place that long and find the bisector.

Interviewer: How are we going to extend it? How do we find the middle so we know it's the bisector? In step 4, did you say "The median is drawn so that the sides are equal."?

S7: Firstly, we will find that the sides are equal.

Interviewer: How so? We don't have a ruler, we have a compass.

S7: There is only a compass. None [meaning no answer].

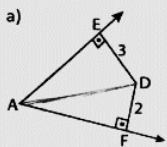
Interviewer: Okay.

As a result of analyzes of the answers given by the students to the 24th question and their interviews, it was seen that there were no students who approached the solution and were able to reason. The most important reason why all of the students have LD1 difficulty can be considered that the students are not accustomed to doing step-by-step geometric drawing activities with compass-ruler tools or developing technological tools (for example, dynamic software) in the lessons.

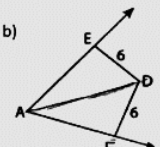
Difficulty in understanding whether a point D is on the bisector of angle A (LD2): When the answers given by the students to the 1st question of TKT were analyzed, it was determined that many students could not fully grasp whether any point D was on the bisector of angle A. It was determined that 80 students had this difficulty, except for 7 students who made all the options of the 1st question, which

consisted of 4 options, correct. Some of the students with LD2 difficulty stated that in order for the D point to be on the bisector of the A angle, the straight lines descended from the D point to the bisector branches must be equal in length and make an angle of 90 degrees with the bisector branches. According to these students, point D was not on the bisector, even if the line segments descended from the D point to the bisector branches at an angle different from 90 degrees and at the same angle were of equal length (TKT 1st question option d). The students who encountered the LD2 difficulty did not experience difficulties in the “reasoning” process because they could not conceptually examine whether a point is on the bisector of an angle, did not have any knowledge about it, or had incorrect information. The answer given by one of these students, S38, to the question (Figure 2) and the interview with the student are as follows:

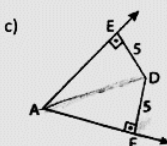
1) Aşağıdaki şekillerin hangisinde/hangilerinde D noktasının A açısının açıortayı üzerinde olup olmadığı kesinlikle söylenebilir? Gerekçeli olarak açıklayınız.

a) 

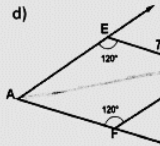
Cevap: Değildir.
Gerekçe: $|DE| \neq |DF|$

b) 

Cevap: Değildir.
Gerekçe: $|DE|, A$ 'yı dik kesmemiştir.

c) 

Cevap: ¹¹ Uzerindedir.
Gerekçe: $|DE| = |DF|$
 DE, A 'yı dik kesmiştir.

d) 

Cevap: Değildir.
Gerekçe: $|DE|, A$ 'yı dik kesmemiştir.

Figure 2. S38's answer to the 1st question in TKT

Interviewer: In question 1, we asked whether D is on the bisector of angle A. How did you answer these questions?

S38: Now I thought like this. If we pass it through this line (the bisector line) it will be perpendicular (referring to angles AED and AFD) and if the two sides are equal (referring to sides DE and DF), I think so.

Interviewer: So for it to be a bisector, does it have to be both perpendicular and equal in length?

S38: Yes, I think so.

Interviewer: “It is not in option b.” you said. As it wasn't said to be upright?

S38: Huh, [confirms].

Interviewer: In option d?

S38: The same again, since it is not perpendicular.

Interviewer: Because the angles are not right?

S38: Yes

When S38's answer and interview in Figure 2 were examined, it was seen that the students who gave this answer could not comprehend that when straight lines of equal length are lowered from any point D to the arms of the angle with angles other than 90 degrees, two equilateral triangles are formed and therefore the D point is on the bisector of the angle.

Difficulty in understanding whether the line segment drawn from the starting point of an angle A is the bisector of the angle (LD3): In the 20th question of TKT, students' knowledge of discovering the

bisector of an angle was questioned. In this question, students were expected to state that the fold line was a bisector, since the triangles on both sides of the fold line are congruent. When the answers given to this question were examined, it was determined that 79 students could not conceptually show that the line segment drawn from the starting point of an angle was the bisector of the angle. Students with LD3 difficulties had difficulties in the "reasoning" and "visualization" processes because they did not have sufficient conceptual knowledge about the bisector of an angle or could not use the information they had visually. The answer given by S20, one of these students, to question 20 (Figure 3), the drawing he made during the interview (Figure 4), and the interview with S20 are as follows:

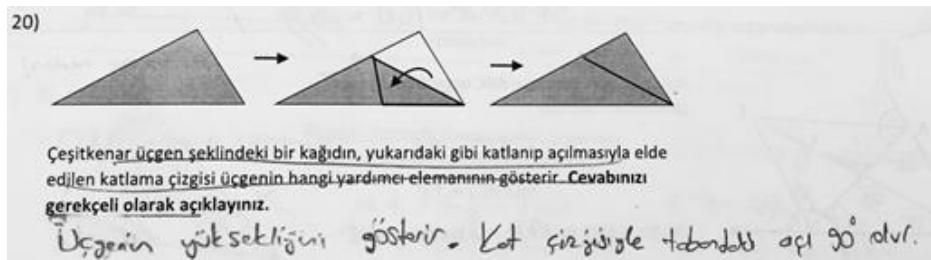


Figure 3. S15's answer to the 20th question in TKT

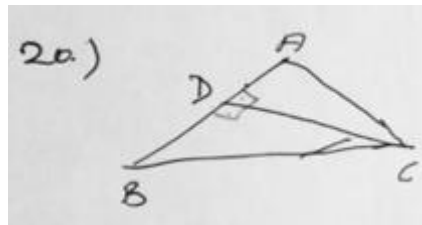


Figure 4. T15's drawing during the interview while explaining the answer to question 20

...

Interviewer: You answered to the 20th question, "It shows the height of the triangle. The angle at the base with the fold line becomes 90 degrees.". So what would be 90 degrees?

S15: Here is my teacher (referring to the angle the fold line makes with the base).

Interviewer: So, let's draw the same shape here, for example (Figure 4). I'll name it. Let A, B, C be D. Show me where you claimed as 90 degrees?

S15: This is the height drawn from the steepest point of the triangle, teacher (Figure 4).

Interviewer: Oh, it's 90 degrees there. So where are the CDA and CDB angles?

S15: Yes, sir.

Interviewer: Okay.

Difficulty in grasping that the distance of a point on the bisector of an angle to the arms of the angle is equal (LD4): In the 23rd question of TKT, the students were expected to reach a solution using the knowledge that the perpendiculars drawn from a point taken on the bisector of an angle to the bisector arms are equal in length. When the answers and interviews of the students were examined, it was observed that 37 students could not comprehend that the distance of a point on the bisector of an angle to the arms of the angle is equal. Students who encounter LD4 difficulty experience difficulties in the "reasoning" and "visualization" processes because they do not have sufficient conceptual knowledge about the concept of the bisector of an angle or cannot apply this conceptual knowledge to a visual

figure. The answer given by S13, one of the students with this difficulty, to question 23 is given in Figure 5:

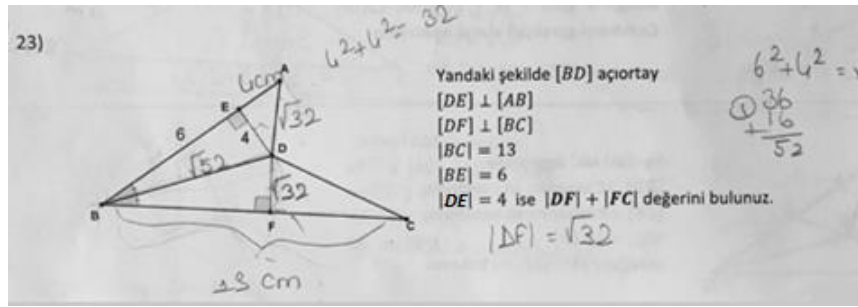


Figure 5. The Answer of S13 to question 23 in TKT

When the answer given by S13 given in Figure 5 to the 23rd question is examined, it is seen that point D on the bisector of angle B made an error by taking the distances of the point D on the bisector of angle B equal to the points A and F on the arms of the angle. Students who could not use the equation $|DE| = |DF|$ of the length of the perpendiculars drawn from the D point on the bisector to the arms of the angle were evaluated as having LD4 difficulty. When the answer given by S13 given in Figure 5 to question 23 is examined, it is seen that point D on the bisector of angle B makes an error by taking the distances from points A and F on the arms of the angle equal. Students who could not use the equation $|DE| = |DF|$ of the length of the perpendiculars drawn from the D point on the bisector to the arms of the angle were evaluated as having LD4 difficulty.

Findings regarding to the Learning Outcome of "Being able to" show the properties of the interior and exterior bisectors of a triangle. Learning difficulties faced by students were determined by analyzing the answers given to questions 3, 6, 7, 10, 12, 14 and 18, about the outcome of "being able to show the properties of interior and exterior bisectors of triangles." which are related to the learning outcome (2nd outcome). The frequency and percentage values of the difficulties obtained are presented in Table 2 below:

Table 2. Frequency and percentage values of learning difficulties faced by students regarding the 2nd learning outcome

Learning Difficulty	Frequency	Percentage
Inability to grasp the interior bisector of a triangle (LD5)	11	%13
Inability to grasp the interior bisector theorem (LD6)	56	%65
Inability to grasp that the third interior bisector of a triangle will pass through the intersection of the two interior bisectors (LD7)	64	%74
Inability to grasp in tangent circle (LD8)	82	%95
Inability to grasp the exterior bisector theorem (LD9)	61	%71
Inability to grasp outer tangent circle (LD10)	85	%99

Inability to grasp that the interior bisector of the third vertex passes through the intersection of the two exterior bisectors of a triangle (LD11)	80	%93
--	----	-----

When Table 2 is examined, it is seen that 7 different learning difficulties have been identified according to the findings obtained from the answers given to the questions prepared for the 2nd outcome. Of these difficulties, it was determined that 13% of students had LD5 difficulty, 65% had LD6 difficulty, 74% had LD7 difficulty, 95% had LD8 difficulty, 71% had LD9 difficulty, 99% had LD10 difficulty, and 93% also had LD11 difficulty.

Difficulty in comprehending the interior bisector of a triangle (LD5): When the answers and interviews of the students to the questions of TKT involving the interior bisector of the triangle were examined, it was determined that 13% of the students had the difficulty of LD5. Some of the students with this difficulty stated that the interior bisector of the triangle would be the median for each triangle at the same time, while others stated that it would be the height. Students with LD5 difficulty could not expand their knowledge in questions related to the lack of conceptual knowledge about the concept of bisector, or they had difficulties in their "reasoning" processes because they misused the information they had. The answer given by one of these students, S17, to the related question (Figure 6) and the interview with S17 are as follows:

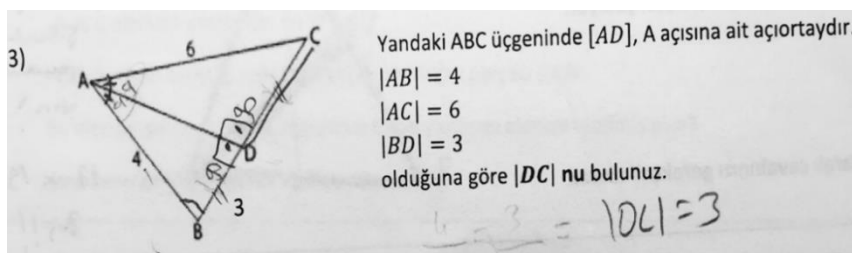


Figure 6. S17's answer to the 3rd question in TKT

Interviewer: So let's look at question 3? You said in the third question, $|DC|=3$. According to what?

S17: I think I gave something here. I gave the edge a, the name a.

Interviewer: Well, let me ask something first: Did we tell you that AD is the height of BC?

S17: You did not.

Interviewer: So why did you write 90° ?

S17: That is, that it would divide it into 90 90.

Interviewer: So you think that because angle A is bisected, it divides AD down into two?

S17: Yes.

Interviewer: So how do we know that BD and DC are equal?

S17: Since it divides into two, two equal things happen.

Interviewer: Okay.

When the question solution and interview of S17 in Figure 6 is examined, it is seen that the student took the bisector as both the height and the median, although the given triangle was not equilateral or isosceles. The students who made this mistake were evaluated as having LD5 difficulty because they could not comprehend that the bisector of an interior angle of a triangle is not always the median or the height.

Difficulty in grasping the interior bisector theorem (LD6): The third question of TKT was prepared in order to question the knowledge of the students about the interior bisector theorem. When the answers given to this question were examined, it was determined that 65% of the students had LD6 difficulties. The majority of students with LD6 difficulty set up the wrong proportion between the edges. These students, whose conceptual knowledge about the interior bisector theorem was incomplete or wrong, had difficulties in their "reasoning" processes. The answer given by one of these students, S15, to question 3 and the interview with S15 are as follows:

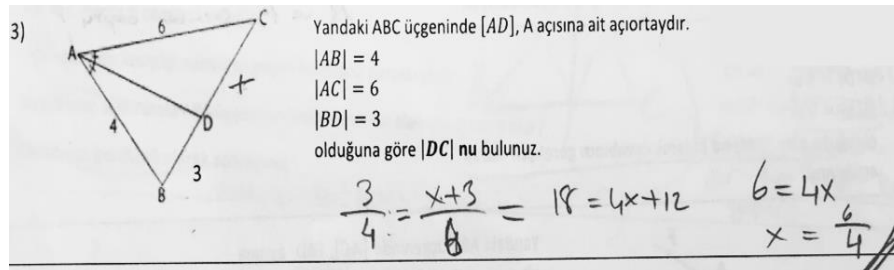


Figure 7. S15's answer to the 3rd question in TKT

...

Interviewer: Okay, let's continue with question 3. In the third question, you said that $3/4 = (x+3)/6$. Why did you say such a thing? Where did you get this ratio?

S15: First, the ratio of the minors to the minors, the ratio of the larger to the larger. So I took all of BC $x+3$, since AC is big, I got AC, sir.

Interviewer: Why does this formula come from? So this is a formula?

S15: It was like this, but my teacher! Sir, the product of the small and the small should be equal to the product of the big and the big. There was such a rule, but I can't remember exactly, sir.

Interviewer: You can't remember exactly. Alright.

When the answers given by the students to the 3rd question were examined, it was determined that the students could not comprehend the interior bisector theorem, and these students were evaluated as having LD6 difficulty.

Difficulty in understanding that the third interior bisector passes through the intersection of the two interior bisectors of a triangle (LD7): In the 7th question of TKT, students were expected to reach the conclusion by using the knowledge that the line segment drawn from the third corner to the intersection point of the interior bisectors coming from the two corners of the triangle is also the bisector. When the students' question answers and interviews were examined, it was determined that 74% of the students had LD7 difficulty. Students with this difficulty could not solve the 7th question because they could not comprehend that the third bisector would pass through the intersection of the two bisectors. Students with LD7 difficulty experience difficulties in the "reasoning" and "visualization" processes because they cannot grasp the knowledge that the bisectors of the angles of the triangle intersect at a point or cannot apply this knowledge to the related question. The answer given by S3, one of these students, to the question in TKT (Figure 8) and the interview with the student are as follows:

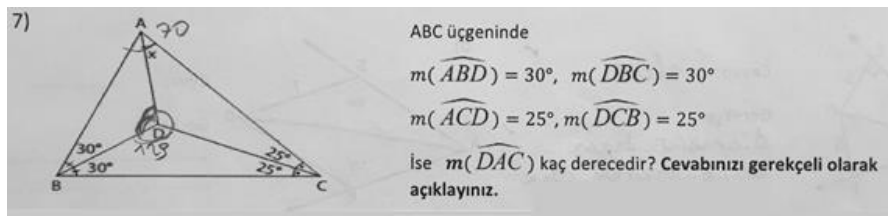


Figure 8. S3's answer to the 7th question in TKT

...

Interviewer: Well, when I looked at the 7th question, I saw that you were not quite clear. So you found angle A of 70°. You couldn't continue. Why?

S3: Sir, I found 70 in the big triangle...

Interviewer: OK.

S3: I could not bring the rest.

Interviewer: Why? And what is the feature of this AD here?

S3: AD's... [thinks]

Interviewer: You don't know?

S3: I have no idea, sir.

Interviewer: Okay.

When Figure 8 and the student's interview were examined, it was seen that S3 could not comprehend that the intersection point of [BD] and [CD], which came from the corners of the triangle, was the intersection point of the interior bisectors, and therefore, he could not think that [AD] should also be bisector. In this way, the students who could not comprehend that the interior bisectors would intersect at one point were evaluated as having LD7 difficulty.

Difficulty in comprehending the tangent circle (LD8): When the answers and interviews of the students to the related questions in TKT were analyzed, it was determined that 95% of the students had difficulties in the concept of the tangent circle of the triangle. These students with LD8 difficulty do not know the shape or properties of the tangent circle of a triangle. The LD8 difficulty faced by these students, who have a lack of conceptual knowledge, stems from their "reasoning" processes. The LD8 difficulty faced by the students was obtained from the 6th, 12th, 14th, and 18th questions answered in the TKT. The interview with S14, one of these students, and the drawing that the student made during the interview are as follows:

...

Interviewer: You said in question 18 that a triangle has one tangent circle. Can you show me 1 tangent circle? Draw a triangle and then have a tangent circle.

S14: If the center is here... [draws] (Figure 9)

Interviewer: For example, is this the tangent circle of the triangle you drew?

S14: I don't know.

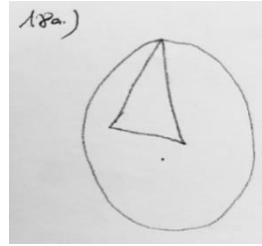


Figure 9. S14's representation of the tangent circle of a triangle

When Figure 9 is examined, it is seen that S14 does not know the tangent circle of a triangle. The various representations of the tangent circle of a triangle during the interviews of different students with LD8 difficulty are given in Figure 10:

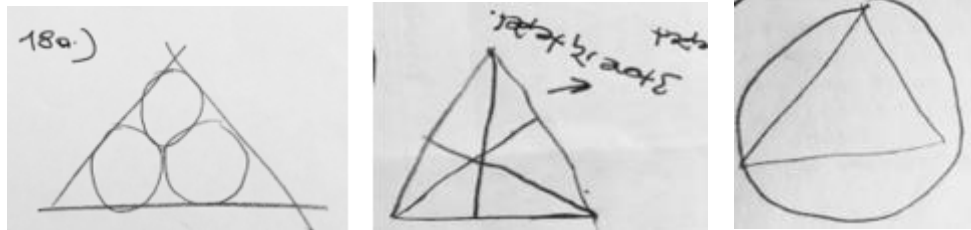


Figure 10. Inset circle representation of a triangle by some students with LD8 difficulty

Difficulty in comprehending the external bisector theorem (LD9): When the answers and interviews of the students to the 10th question of TKT were analyzed, it was determined that 71% of the students had LD9 difficulty. It was observed that students with this difficulty set up the wrong proportion between the lengths of the sides while applying the exterior bisector theorem in the solution of the 10th question, or they did not know the exterior bisector theorem. Students with LD9 difficulty face because they have a lack of conceptual knowledge about the exterior bisector theorem, and this difficulty stems from the difficulties they experience during the "reasoning" process. The answer given by S3, who made the wrong proportion, to the question (Figure 11) and the interview with S3 are as follows:

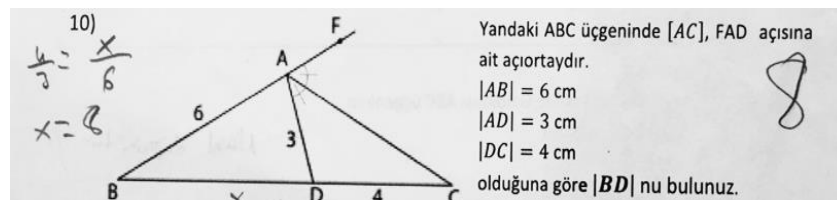


Figure 11. S3's answer to the 10th question in TKT

...

Interviewer: So how did we find 8 in question 10?

S3: The outer bisector of 4 again. Wait a minute... external bisector AC...

Interviewer: Yes.

S3: External bisector. From the exterior bisector, I said the ratio of 4 to 3, the ratio of x to 6.

Interviewer: Would the ratio of 4 to 3 be the ratio of x to 6? So why do you think so?

S3: I thought the edge that 4 sees is the edge that x sees.

Interviewer: Hmm. Alright....

Difficulty in comprehending the outer tangent circle (LD10): As a result of examining the answers given by the students to the TKT questions, it was determined that 99% of the students did not know the shape or properties of the outer tangent circle of a triangle. It was determined that these students had LD10 difficulty in their answers to the 6th, 14th, and 18th questions of the TKT. The reason why students encounter the LD10 difficulty is that they lack conceptual knowledge about the outer tangent circle in the "reasoning" processes. The interview with S5, who has LD10 difficulty, and the student's representation of the outer tangent circle (Figure 12) are as follows:

...

Interviewer: Let's move on to b of 18. You said there is 1 outer tangent circle. I'll say 18b here. Can you draw me the outer tangent circle?

S5: ... [draws a circle] (Figure 12)

Interviewer: The circle passing through the vertices is the outer tangent circle, is it?

S5: Yes.

Interviewer: Okay....

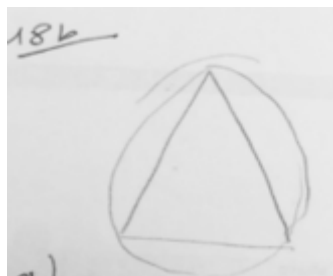


Figure 12. S5's representation of the outer tangent circle of a triangle

In Figure 12, it is seen that S5 shows the circumscribed circle of a triangle instead of the outer tangent circle of a triangle. Various representations of the circumcircle of a triangle by different students with LD10 difficulty are given in Figure 13:

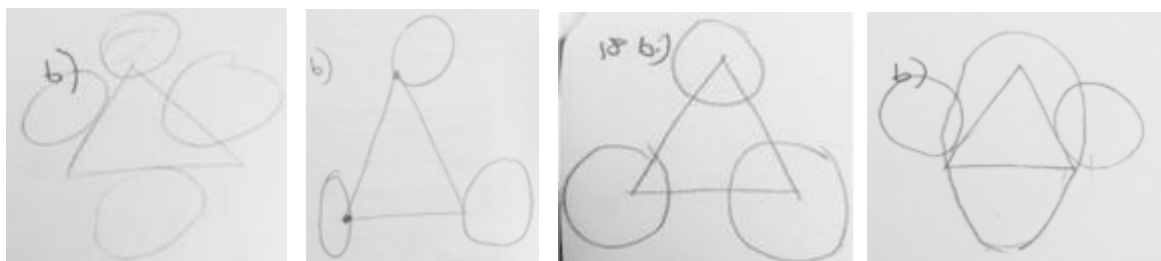


Figure 13. Representation of the tangent circle of a triangle by some students with LD10 difficulty

Difficulty in comprehending that the interior bisector of the third vertex passes through the intersection of the two exterior bisectors of the triangle (LD11): When the answers and interviews of the students to the 14th question of TKT were examined, it was determined that 93% of the students

could not comprehend the knowledge that the interior bisector of the third vertex would pass through the intersection of the two exterior bisectors of a triangle. This lack of conceptual knowledge is related to the "reasoning" process. The interview of S24, one of the students with LD11 difficulty, is as follows:

...

Interviewer: You left question 14 blank. Why?

S24: Three exterior angles of exterior angles... One minute, triangle ABC. The exterior angle of A coming from those two sides is the exterior angle of C. At the junction point of the two, something came from there.

Interviewer: Will it be bisector? (referring to the line segment coming from the third vertex to the intersection of the two exterior bisectors)

S24: Bisector? I don't know.

Interviewer: Okay.

...

As seen in the student's interview, it was determined that the students with LD11 difficulty could not solve the 14th question because they could not comprehend that the interior bisector of the third vertex would pass through the intersection of the two exterior bisectors of a triangle.

Findings regarding the Learning outcome of "Being able to indicate that the medians of a triangle intersect at a point and to explain the properties of the median."

The 4th, 9th, 13th, and 17th questions of TKT were prepared in order to determine whether the students achieved the learning outcome (3rd outcome), "being able to indicate that the medians of a triangle intersect at a point and explains the properties of the median." As a result of the analyzes of the answers given by the students to these questions and their interviews, the frequency and percentage values of the learning difficulties encountered regarding this outcome are presented in Table 3:

Table 3. Frequency and percentage values of learning difficulties encountered by students regarding the 3rd learning outcome

Learning Difficulty	Frequency	Percentage
Inability to grasp the features of the center of gravity (LD12)	48	% 56
Inability to comprehend whether a given point in a triangle is the center of gravity or not (LD13)	76	% 88
Not being able to translate the question given by verbal expression (LD14)	36	% 42

When Table 3 is examined, 3 different learning difficulties were identified according to the findings obtained from the students' answers to the questions prepared about the 3rd outcome and from their interviews. Among these difficulties, it was determined that 56% of the students had the LD12 difficulty, 88% of the students had the LD13 difficulty and 42% of the students had the LD14 difficulty.

Difficulty in comprehending the features of the center of gravity (LD12): When the answers given by the students to the 4th question in TKT were analyzed along with their interviews, it was seen that 48 students could not comprehend the features of the center of gravity and they had LD12 difficulty. Some of the students with this difficulty thought that the median of the triangle coming from any corner of

the centroid of the triangle divided the middle into two equal parts, while others thought that the medians of the triangle would always be the bisector or the height. These students, who have incomplete or incorrect information about the center of gravity of a triangle, faced the LD12 difficulty because of the difficulties they experienced during the "reasoning" process. The answer given by S31, one of these students, to the related question (Figure 14) and the interview with S31 are as follows:

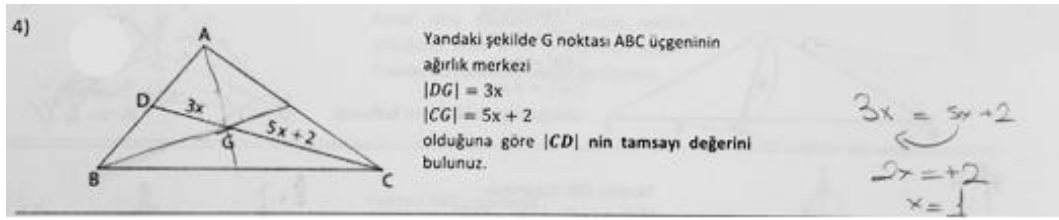


Figure 14. S31's answer to the 4th question on TKT

...

Interviewer: In question 4, the G point is given as the center of gravity. You equated $3x$ to $5x+2$. Why did you feel the need to equalize?

S31: The center of gravity is the middle point of the triangle.

Interviewer: Did you equalize because it was the midpoint?

S31: Yes, sir, it is.

...

Difficulty in understanding whether a given point in a triangle is the center of gravity or not (LD13):

When the answers given by the students to the questions prepared for the 3rd outcome of TKT were analyzed, it was observed that 88% of the students could not comprehend whether a given point in the triangle was the center of gravity of the triangle. It was determined that these students with LD13 difficulty either solved questions 9, 13, 17, and 19 of the TKT incorrectly or left these questions blank. Students who meet the LD13 difficulty have difficulties in the "reasoning" process because they do not have sufficient knowledge about the concept of center of gravity, or in the "visualization" process because they cannot discover how to use the knowledge they have on the figure in the related question. The answer sheet of one of these students (Figure 15) and the interview with the student are as follows:

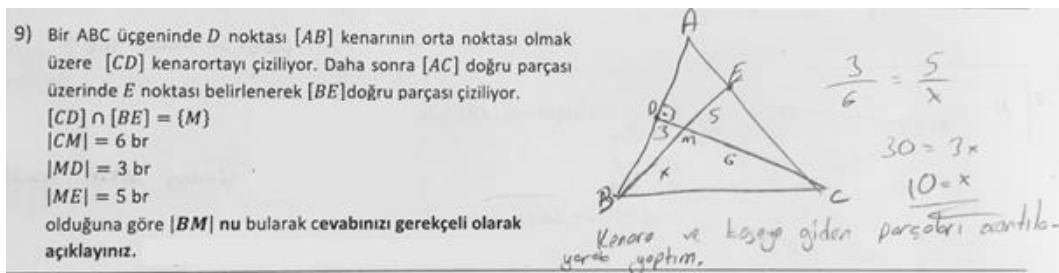


Figure 15. S8's answer to the 9th question in TKT

...

Interviewer: I'm on question 9. Did you find the answer to the 9th question 10?

S8: I did it proportionately.

Interviewer: Why did you rate it? So what is the property of M? The shape you drew. Then you said that CDA is 90 degrees. Does M have a feature?

S8: It came as the junction point of the edge middle pillars.

Interviewer: There is no such thing in the question! It becomes the intersection point of the medians. What then is the "M"?

S8: It is not the center of gravity.

Interviewer: Isn't it?

S8: It is not the center of gravity.

Interviewer: Well then.

Difficulty in conveying the verbally given question into shape (LD14): When the answers and interviews of the students to the 9th question of the TKT prepared for the 3rd outcome were analyzed, it was seen that 36 students could not translate the verbally given geometric concepts into shape. It is thought that these students with LD14 difficulty comprehend geometry in a shape-oriented manner and experience difficulties when there is no shape. Since these students could not construct the shape step by step, the difficulty they experienced stems from the "creation" process. The answer given by one of these students to the question (Figure 16) and the interview with this student are as follows:

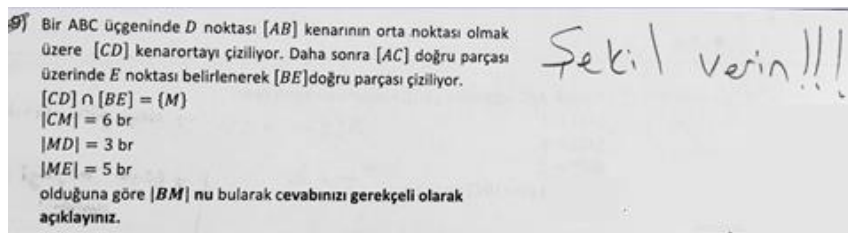


Figure 16. S20's answer to question 9 in TKT

...

Interviewer: Well, you wrote "I want a shape" in question 9!

S20: Yes.

Interviewer: Can't you draw the shape yourself?

S20: No.

The answer given by another student with LD14 to question 9 (Figure 17) and the interview with the student is as follows:

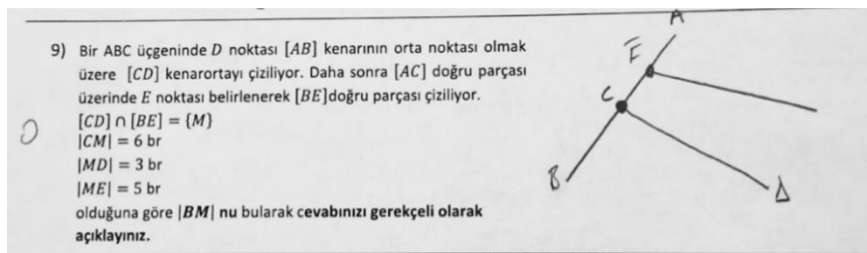


Figure 17. S48's answer to question 9 in TKT

...

Interviewer: Let's look at question 9.

S48: I didn't even understand that at all...

Interviewer: Okay.

The findings show that students have various difficulties with the bisector and medians of triangles. It was observed that the majority of the difficulties encountered were above 50%. It has been determined that the most common difficulty encountered by the students regarding the bisectors of a triangle is "Not being able to form the bisector of an angle (LD1)", and the most common difficulty about

the medians of the triangle is "Not being able to comprehend whether a given point in a triangle is the center of gravity or not (LD13)".

Conclusion and Discussion

In this study, the difficulties encountered by 9th-grade students while learning the subjects of bisectors and medians of triangles were determined. As a result of the analysis of the TKT applied to the students and the interviews with the students, it was determined that the students faced various difficulties. Duval (1998) defined geometry teaching in three scientific processes: visualization, creation, and reasoning; stated that the difficulties encountered by the students stemmed from the inability to establish a relationship between these three cognitive levels. In the study, it was determined that all of the students had the difficulty of forming the bisector of an angle (LD1) in terms of the learning outcome (1st learning outcome), "being able to draw the bisector of an angle and explains its properties." In the related question in TKT, the students were asked to create the bisector of an angle by doing the drawing applications step by step. In the data analysis obtained, it was determined that none of the students could draw correctly. In analyzes of the interviews, it was determined that many students did not take kindly to compass-ruler applications and gave meaning to geometry questions based on shape. It is thought that students who are not successful in step-by-step construction practices have difficulties in the cognitive processes defined by Duval (1998), especially in the "constructing" process, which includes geometric constructions with mathematical tools and materials. It has been determined that these students have LD1 difficulty, since the difficulties experienced by the students in the "creation" process prevent them from establishing relationships with other cognitive processes ("visualization" and "reasoning"). Parallel to this difficulty, in the researches conducted by Karakuş (2014) and Tosun (2019), it was determined that students had difficulties in geometric constructions.

Having step-by-step compass-ruler applications included in the mathematics curriculum of the Ministry of National Education (MNE, 2013; MNE, 2017) provides various benefits to students. Compass ruler constructions improve students' geometry thinking levels (Napitupulu, 2001), provide students with logical thinking skills, and help students better understand the properties of geometric shapes (Fahlberg-Stojanovska and Stojanovski, 2009; Hoffer, 1981). Drawing applications, which are included in the literature as compass-ruler constructions, can be made with concrete materials of compass and ruler, as well as with dynamic software developed (Çiftci and Tatar, 2014). Students are encouraged both to use concrete tools such as compass and ruler and to benefit from information and communication technologies in the MNE secondary school mathematics curriculum (MNE, 2013; MNE 2017). It is thought that such applications are ignored or cannot be done effectively in geometry lessons in our country. During the interview, some students stated that they have never encountered these applications, and that they usually solve questions on geometry issues. However, with step-by-step constructions, students have the opportunity to learn and practice the basic features of geometric concepts (Freeman, 2008). Students who cannot fully learn geometric concepts face many difficulties in

the following subjects. It can be said that this is one of the foundations of the problems in the field of geometry in our country. In the study conducted by Açıkgül and Arslaner (2015), it was observed that some of the pre-service teachers stated that they did not encounter geometric location problems by doing step-by-step drawing activities before.

According to the findings of the 1st outcome in the study, it was determined that 93% of the students had difficulty in comprehending whether a point D is on the bisector of angle A (LD2). It was observed that many of the students who had difficulties in this subject thought that the necessary condition for a point D to be the bisector of angle A was that the angle made by the line segments drawn from the D point to the arms of the angle should be 90 degrees and their lengths should be equal to each other. These students made a mistake by saying that the D point was not on the bisector of the angle, if the angles made by the lines drawn from the D point to the arms of the angle were different from each other and their lengths were equal to each other than 90 degrees. In addition, as a result of the analysis of the data obtained, 92% of the students had difficulties in not being able to comprehend whether the ray drawn from the starting point of an angle A was the bisector of the angle (LD3), and 65% of them did not understand that the distance of a point on the bisector of an angle to the arms of the angle is equal (LD4). It is thought that the fact that students have LD1 difficulty causes them to encounter LD2, LD3, and LD4 difficulties. Since students with LD2 difficulties have conceptual knowledge deficiencies, especially students with "reasoning", LD3 and LD4 difficulties have conceptual knowledge deficiencies or cannot use their knowledge on the question, they have difficulties in "reasoning" and "visualization" cognitive processes and they encounter learning difficulties by not being able to establish a relationship between cognitive processes. It is thought that when students create the bisector of an angle step by step and learn the conceptual knowledge well, the probability of encountering LD2, LD3, and LD4 difficulties will decrease.

When the findings related to the learning outcome (2nd outcome), "being able to show the properties of the interior and exterior bisectors of a triangle" were examined, it was determined that 13% of the students misunderstood the concept of the interior bisector of a triangle (LD5). Some of these students confuse the interior bisector of an angle of a triangle with the concepts of height or median. Others state that the bisector of an angle of a triangle will also be the median and the height for each type of triangle. In the questions developed in the TKT regarding the 2nd outcome, the students were expected to reach the correct answer by using the knowledge that the bisectors from the three sides of the triangle intersect at a point. It was determined that 74% of the students were unable to comprehend that the third inner bisector would pass through the intersection of the two inner bisectors of the triangle (LD7), and 93% of them were unable to comprehend that the inner bisector of the third vertex would pass through the intersection of the two outer bisectors of the triangle (LD11). The intersection of the bisectors of a triangle is the intersection of the triangle's inner tangent or outer tangent circles. It is thought that the reason why the students cannot discover these points is that they do not understand

the concepts of inner tangent circle and outer tangent circle sufficiently. Because, in the study, it was determined that 95% of the students had difficulties in comprehending the inner tangent circle (LD8) and 99% of the students were unable to comprehend the outer tangent circle (LD10). Most of the students do not know the representation or properties of the inner tangent and outer tangent circles of a triangle. In the study conducted by Açıkgül and Arslaner (2015), it was determined that the majority of students did not grasp the information that the center of the inner tangent circle is the point where the inner bisectors of the triangle intersect, and that the center of the outer tangent circle is the point where two outer and one inner bisector of the triangle intersect. In the light of the findings related to the 2nd outcome, it was concluded that 65% of the students had difficulties in understanding the interior bisector theorem (LD6) and 71% of them had difficulties in understanding the exterior bisector theorem (LD9). These students either do not know or misunderstand the relationship between the lengths of the sides of a bisector of a triangle. Since the LD5, LD6, LD8, LD9, and LD10 difficulties of the students related to the second outcome mostly stem from the lack of conceptual knowledge, the students' especially "reasoning", LD7 and LD11 difficulties stem from both the lack of conceptual knowledge and the inability of the students to visually discover the information in the related questions. It is thought that they have difficulties in "reasoning" and "visualization" cognitive processes. Students who have difficulties in any cognitive process are faced with learning difficulties because they cannot establish a relationship between cognitive processes.

In the research, in the findings obtained from the questions about the learning outcome (3rd outcome), "being able to show that the medians of the triangle intersect at a point and explain the properties related to the median", it was determined that 56% of the students had difficulty in comprehending the center of gravity, which was the cut-off point of the medians (LD12). Some of the students with this difficulty had the wrong information that the center of gravity divided the medians exactly in the middle, and some of them divided it from the corner 1 to 2 sides. Some students with LD12 difficulty also thought that the auxiliary element of the triangle passing through the center of gravity would be the bisector or the height. In addition, it was determined that 88% of the students had difficulty in understanding whether a point in the triangle was the center of gravity or not (LD13). The majority of students with this difficulty consisted of students with LD12 difficulty. It is thought that students with LD12 difficulties have problems especially in "reasoning" because they have a lack of conceptual knowledge. In his research, Gül (2014), in which he measured the mathematical achievements of students on the subject of triangles and analyzed the students according to their Van Hiele levels, determined that half of the students to whom the study was applied did not know the concept of center of gravity and that the medians of a triangle pass through the center of gravity. In his study, Kılıç (2013), who examined the effects of dynamic geometry software on students' geometric thinking, geometry success and ability to prove, concluded that students could define the center of gravity, but they did not know at what rate (2:1 ratio) the center of gravity divided the median. Another

difficulty obtained regarding the 3rd acquisition of the research subject in the curriculum was that the students could not translate the question given in verbal expression into form (LD14). Students with this difficulty, which is composed of 42% of all students, could not draw the shape of the question related to the third outcome, which was given only verbal expression, or they drew it incorrectly. In line with the findings, it was observed that students with LD14 difficulty were the ones who had difficulties in the process of "creating", that these students gave meaning to geometry with a shape focus, that they did not take kindly to verbal questions in geometry, and that some students did not read the question when they saw the verbal question. According to Fischbein (1993), the conceptual infrastructure must be developed in order to interpret the shape in geometry. It can be said that the reason why students have LD14 difficulty is that they solve shape-oriented examples without learning geometric concepts thoroughly. In parallel with the result obtained, Karpuz, Koparan and Güven (2014) found in their study that the students could not draw the shape representing the concept in the solution of amorphous questions and could not establish the necessary relationship between the figure and the concept.

When the results of the research are examined, it is thought that the most important reason for the learning difficulties faced by the students is that the students do not fully learn the geometric concepts. Students who could not fully learn geometric concepts encountered difficulties in solving problems. Concepts that are not fully learned in the field of geometry with a sequential learning system also negatively affect the learning of future concepts. The lack of geometric concept knowledge of students in the literature has been obtained as a result of many researches (Akuysal, 2007; Ayvaz, Gündüz and Bozkuş, 2017; Blanco, 2001; Tümer, 2017; Gutierrez and Jaime, 1999; Gül, 2014; Gürefe and Gültekin, 2016; Gürefe, Yarar, Pazarbasi and Es, 2014; Karpuz et al., 2014; Kılıç, 2013, Özerem, 2012; Ubuz, 1999). Lack of students' conceptual knowledge causes students to make wrong generalizations and predictive solutions. For example, a student who does not fully understand the concept of the center of gravity may think of the center of gravity as the center where all the auxiliary elements of the triangle pass. In addition, students with a lack of conceptual knowledge cannot see the shape holistically and make sufficient discoveries for solutions, especially in geometry problems on the shape. One of the reasons for the difficulties that students have in geometry is that students comprehend geometry problems in a shape-oriented manner. It was observed that the students could not translate the verbally given formless questions into shape, conveyed them incorrectly, or passed without looking at all. In their study, Barut and Retnawati (2020) determined that in parallel with this result, students lacked visualization skills, could not understand geometry-related terms and symbols, and had appropriate reasoning deficiencies. In the study of Ayuningtyas, Mardiyana, and Pramudya (2019), it was revealed that students' geometric reasoning abilities were low. It can be said that the underlying reason is the lack of students' conceptual knowledge. Students with incomplete conceptual knowledge experience difficulties in the processes of "reasoning" and "visualization" and "creation". Therefore, students who

cannot establish a chain link between these three processes cannot solve geometry problems and encounter learning difficulties (Duval, 1995).

Suggestions

The high rate of each learning disability obtained in the study shows that most of the students had difficulties in geometry. One of the biggest reasons for the learning difficulties encountered is the lack of basic geometric concept knowledge of the students. For this reason, it is recommended to learn and teach the conceptual information completely in the teaching. It is thought that learning the concepts well and establishing connections between various activities and concepts will increase the geometric thinking levels of the students. By giving importance to conceptual learning especially in primary and secondary schools, the geometric concept foundations of students should be laid firmly so that students do not encounter learning difficulties in the future. In addition, dynamic geometry software can be used effectively in geometry teaching, and various activities can be carried out to improve students' visualization, creation, and reasoning processes separately and to strengthen the relationships between these processes.

References

- Açıkgül, K. & Arslaner, R. (2015). Öğretmen adaylarının kâğıt-kalem ve dinamik geometri yazılımı kullanarak geometrik yer problemlerini çözüm süreçlerinin incelenmesi. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 8(20), 468-512. <https://doi.org/10.14520/adyusbd.96576>
- Akuysal, N. (2007). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin 7. sınıf ünitelerindeki geometrik kavramlardaki yanlışları*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Altıntaş, E. & İlgin, Ş. (2017). Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometride “Yükseklik” ve “Diklik merkezi” kavramına ilişkin kavram yanlışları. *International Periodical for the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic*, 12(29), 73-86. <https://doi.org/10.7827/TurkishStudies.12532>
- Ayuningtyas, W., Mardiyana. & Pramudya, I. (2019). Analysis of student's geometry reasoning ability at senior high school. *The Sixth Seminar Nasional Pendidikan Matematika Universitas Ahmad Dahlan 2018*, 1188(2019) 012016. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1188/1/012016>
- Ayvaz, Ü., Gündüz N. & Bozkuş, F. (2017). Understanding of prospective mathematics teachers of the concept of diagonal. *Journal on Mathematics Education*, 8(2), 165-184. <https://doi.org/10.22342/jme.8.2.4102.165-184>
- Baran, S. (2011). *İlköğretim II. kademe öğrencilerinin üçgenler ve geometrik cisimler konusundaki kavram yanlışları* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van.
- Barut, M. E. O. & Retnawati, H. (2020). Geometry learning in vocational high school: Investigating the students' difficulties and levels of thinking. *Ahmad Dahlan International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, 1613(2020), 012058. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1613/1/012058>
- Bingölbali, E. & Özmantar, M. F. (2014). *İlköğretimde matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri (4. baskı)*. Ankara: Pegem Akedemi.
- Blanco, L. J. (2001). Errors in the teaching/learning of the basic concepts of geometry. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.
- Bütüner, S. Ö. (2017). Matematik öğretmen adaylarının geometri alan bilgilerinin belirlenmesi: aç, köşegen, yükseklik, dörtgen. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 6(2), 501-530.
- Büyükoztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. & Demirel, F. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (9. baskı). Ankara: Pegem Akademi.
- Chen, J., Liangfang, L. & Zhang, D. (2021). Students With Specific Difficulties in Geometry: Exploring the TIMSS 2011 Data With Plausible Values and Latent Profile Analysis. *Learning Disability Quarterly*, 44(1), 11-22. <https://doi.org/10.1177/0731948720905099>

- Çiftci, O. & Tatar, E. (2014). Pergel-cetvel ve dinamik bir yazılım kullanımının başarıya etkilerinin karşılaştırılması. *Bilgisayar ve Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 2(4), 111-133.
- Çiftci, O. (2018). *Üçgenler konusundaki öğrenme güçlüklerinin belirlenerek önlenmesine yönelik tasarlanan teknoloji destekli işbirlikli öğrenme ortamının incelenmesi*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Duatepe, A. (2004). *The effects of drama based instruction on seventh grade students' geometry achievement, Van Hiele geometric thinking levels, attitude toward mathematics and geometry*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.) *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-156). Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for 21 st century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Erbaş, A. K., Çetinkaya, B. & Ersoy, Y. (2009). Öğrencilerin basit doğrusal denklemlerin çözümünde karşılaştıkları güçlükler ve kavram yanlışları. *Eğitim ve Bilim*, 34(152), 30-43.
- Erbaş, A. K., Çetinkaya, B., Güven, B., Karataş, İ. & Çınkır, Z. (Ed.) (2015). *Ortaöğretim matematik 9. sınıf ders kitabı: 2. kitap*. Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Fahlberg-Stojanovska, L. & Stojanovski, V. (2009). GeoGebra—freedom to explore and learn. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 28(2), 69-76. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrp003>
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Freeman, C. M. (2008). *Compass constructions: Activities for using a compass and straightedge*. Waco: Prufrock.
- Gutierrez, A. & Jaime, A. (1999). Pre-service primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher of Education*, 2(3), 253-275.
- Gül, B. (2014). *Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin üçgenler konusundaki matematik başarıları ile Van Hiele geometri düşünme düzeyleri ilişkilerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Gürefe, N. & Gültekin, S. H. (2016). Yükseklik kavramına dair öğrenci bilgilerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(2), 429-450.
- Gürefe, N., Yarar, S. H., Pazarbasi, B. N. & Es, H. (2014). Ortaokul 5. Sınıf öğrencilerinin yükseklik kavramını anlamalarında kavramsal değişim metinlerinin etkisi. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, 1(1), 58-68. <https://doi.org/10.17278/ijesim.2014.01.005>

- Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry - or when "A little learning is dangerous thing". *Proceedings of the second international seminar on misconceptions and educational strategies in science and mathematics*, 3, 238-251.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is More Than Proof. *Mathematics Teacher*, 74, 11-18.
- İç, Ü. & Demirkol, T. (2008). Ortaöğretim öğrencilerinin üçgenler konusundaki temel hataları ve kavram yanlışları. *E-Journal Of New World Sciences Academy*, 3(3), 445-454.
- Kaplan, A. & Hızarcı, S. (2005). Matematik öğretmen adaylarının üçgen kavramı ile ilgili bilgi düzeyleri. *Kâzım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11, 472-478.
- Karakuş, Ö. (2008). *Bilgisayar destekli dönüşüm geometrisi öğretiminin öğrenci erişimine etkisi* (Yayımlanmamış Yüksek lisans tezi). Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Karakuş, F. (2014). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Geometrik İnşa Etkinliklerine Yönelik Görüşleri. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi*, 7(4), 408-435.
- Karakuyu, E. & Bağcı, O. (2015). *Ortaöğretim matematik 9. sınıf ders kitabı*. Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları. Ankara: Dikey yayıncılık
- Karpuz, Y., Koparan, T. & Güven, B. (2014). Geometride öğrencilerin şekil ve kavram bilgisi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(2), 108-118.
- Kılıç, H. (2013). Lise öğrencilerinin geometrik düşünme, problem çözme ve ispat becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1), 222-241.
- Küçükaydın, M. A. & Gökbulut, Y. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının geometrik cisimlerin tanımlanması ve açılımına ilişkin kavram yanlışları. *Cumhuriyet International Journal of Education*, 2(1), 102-117.
- MEB, (2013). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara.
- MEB, (2017). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara.
- Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber* (S. Turan, çev. ed.). Ankara: Nobel. (Çalışmanın orijinali 2009`da yayımlanmıştır.)
- Napitupulu, B. (2001). *An exploration of students' understanding and Van Hiele levels of thinking on geometric constructions* (MSc thesis). Simon Fraser University Faculty of Education, Canada.
- Öksüz, C. (2010). İlköğretim yedinci sınıf üstün yetenekli öğrencilerin "Nokta, doğru ve düzlem" konularındaki kavram yanlışları. *İlköğretim-Online*, 9(2), 508-525.
- Özerem, A. (2012). Misconceptions in geometry and suggested solutions for seventh grade students. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 55(2012), 720-729. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.557>
- Özsoy, N. & Kemankaşlı N. (2004). Ortaöğretim öğrencilerinin çember konusundaki temel hataları ve kavram yanlışları. *The Turkish Online Journal Of Educational Technology*, 3(4), 140-147.

- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (Çev: S. Çelik-F. Ö. Karataş.). Ankara: Pegem Akademi (2002).
- Rasmussen, C. L. (1998). *Reform in differential equations: A case study of students' understandings and difficulties*. The Annual Meeting of American Educational Research Association, San Diego, CA.
- Tall, D. & Razali, M. R. (1993). Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24(2), 209–222. <https://doi.org/10.1080/0020739930240206>
- Tatar, E. ve Dikici, R. (2008). Matematik eğitiminde öğrenme güçlükleri. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5(9), 183-193.
- Tosun, N. (2019). *9. Sınıf Öğrencilerinin Açılışta Konusunda Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Türnüklü, E. & Ergin, A. S. (2016). 8. sınıf öğrencilerinin cisimleri görsel tanıma ve tanımlamaları: Cisim imgeleri. *İlköğretim Online*, 15(1), 40-52. <https://doi.or/10.17051/io.2016.33489>
- Ubuz, B. (1999). 10. ve 11. sınıf öğrencilerinin temel geometri konularındaki hataları ve kavram yanlışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16-17, 95-104.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (7th ed.). Boston: Pearson Education, Inc.
- Yenilmez, K. & Yaşa, E. (2008). İlköğretim öğrencilerinin Geometrideki kavram yanlışları. *Eğitim Fakültesi Dergisi*, 21(2), 461-483.
- Yetkin, E. (2003). Student difficulties in learning elementary mathematics. *ERIC Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education*, Columbus, OH, ED482727.
- Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (7. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Zeybek, Z. (2013). Üçgen kavramı ve geometri tarihindeki yeri. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar*, (1. baskı, ss. 222-248). Ankara: Pegem Akademi.