Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ

MAKUFEBED (2011) 4: 61-73

Ayrışımların Modulo 11 Kongrüans Özellikleri

Göksal BİLGİCİ

Kastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, B.Ö.T.E., Kastamonu.
Sorumlu yazar e-mail: gbilgici@gazi.edu.tr

Özet

Atkin ve Swinnerton – Dyer, ayrışımların üreteç fonksiyonunun modulo 5, 7 ve 11 için bazı kongrüans özelliklerini hesaplamışlardır. Modulo 5 ve 7 için sonuçları doğrudan elde etmişler fakat modulo 11 için, önce sonuçları vermişler ve daha sonra bu sonuçları kullanarak ispat yapmışlardır. Bu çalışmada, Atkin ve Swinnerton – Dyer'ın modulo 11 için verdikleri kongrüansların nasıl hesaplanabileceği izah edilecektir.

Anahtar Kelimeler: *Ayrışımlar, Ayrışım Fonksiyonu, Ayrışım Kongrüansları.*

Congruences Properties of Partitions for Modulo 11

Abstract

Atkin and Swinnerton – Dyer calculated some congruences properties of the generating function for the partitions for modulo 5, 7 and 11. They obtained the results directly for modulo 5 and 7, but for modulo 11, they gave the congruences, and proved later by using these congruences. In this paper, it is explained how the congruences given by Atkin and Swinnerton – Dyer can be calculated for modulo 11.

Keywords: *Partitions, Partition Function, Partition Congruences.*

Giriş

Pozitif bir tamsayı, çarpımsal ve toplamsal olarak iki şekilde parçalanır. Çarpımsal olarak parçalamak, asal çarpanlarına ayırmak iken toplamsal olarak parçalamak ise ayrışımlarına ayırmaktır.

Tanım 1.1. Bir n pozitif tamsayısının bir ayrışımı, n'nin pozitif tamsayıların toplamı olarak sıra farkı gözetmeksizin bir yazılışıdır. Ayrışımı oluşturan pozitif tamsayıların her birine parça adı verilir ve bir ayrışım yazılırken parçalar azalan sırada yazılır. $p(n)$ ile n'nin ayrışımları sayısı gösterilir ve $p(0)$:=1 olarak tanımlanır. $p(n)$ sayısına ayrışım fonksiyonu adı verilir (Skiena, 1990).

Örnek 1.2. 5'in ayrışımları;

$$
\begin{aligned}
5 &= 5\\
&= 4+1\\
&= 3+2\\
&= 3+1+1\\
&= 2+2+1\\
&= 2+1+1+1\\
&= 1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Sıra farkı gözetilmediği için 3+2 ve 2+3 ayrışımları eşittir. Dolayısıyla $p(5)$=7'dir.

n büyüdükçe $p(n)$ oldukça hızlı büyüyen bir sayıdır. $p(5)=7$, $p(10)=42$, $p(20)=627$, $p(50)=204226$, $p(100)=190569292$ ve $p(200)=3972999029388$'dir. $p(n)$ ayrışım sayısını hesaplamak için kullanılabilecek birkaç yöntem mevcuttur. Küçük pozitif tamsayılar için MacMahon (1926) tarafından bulunan aşağıdaki eşitlik kullanılabilir;

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-p(n-12)-p(n-15)+\ldots=0,$$

fakat n büyüdükçe bu ve benzeri özdeşlikleri kullanmak zorlaşacaktır. Büyük n pozitif tamsayılarının ayrışım sayıları için Hardy ve Ramanujan (1918) aşağıdaki özdeşliği elde etmişlerdir:

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2\pi/3}}.$$

$\{p(n)\}_{n\geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ serisidir ve

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n &= \prod_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^r}, \qquad |q|<1 \quad (Euler) \qquad (1)\\
&= 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+11q^6+\ldots
\end{aligned}
$$

dir (Hircshhorn,1999).

Ayrışım teorisinde önemli bir dönüm noktası 1919 yılında Ramanujan'ın vermiş olduğu aşağıdaki üç kongrüanstır (Ramanujan, 1927):

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$$
$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$$
$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Ramanujan bu kongrüansları vermiş ve daha sonra bunları analitik yöntemlerle ispatlamıştır. Bu kongrüanslar başka matematikçiler tarafından da farklı yöntemlerle ispatlanmıştır. Bu ispatlardan en ilginç olanı 1944 yılında henüz fizik bölümü öğrencisi olan Dyson'ın vermiş olduğu bir sayma tekniğidir (Dyson, 1944). Dyson bir ayrışımın rank'ını

"en büyük parça – parça sayısı"

olarak tanımlamıştır. Rank, Ramanujan'ın ilk iki kongrüansını ispatlayan güzel bir sayma tekniğidir.

Örnek 1.3. $p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$ kongrüansının rank ile ispatını görmek kolay değildir. Fakat rank'ın daha iyi anlaşılabilmesi için 4'ün ayrışımlarının rank'larına göre modulo 5 denklik sınıflarına eşit bir şekilde dağıldığı Tablo 1'de görülebilir.

Tablo 1. 4 Tamsayısının Ayrışımlarının Rank'ları

Ayrışım	En büyük parça	Parça sayısı	Rank	Rank Mod 5
4	4	1	3	3
3+1	3	2	1	1
2+2	2	2	0	0
2+1+1	2	3	-1	4
1+1+1+1	1	4	-3	2

Dyson'ın rank'ı, Ramanujan'ın üçüncü kongrüansı için netice vermemektedir. Dyson bunun üzerine rank'a benzer bir sayma tekniği bulunabileceğini ve bu tekniğe "crank" adını vermek istediğini belirtmiştir. Dyson sadece iddialarda bulunmuş fakat bunları ispatlamamıştır. Dyson'ın tüm iddiaları Atkin ve Swinnerton – Dyer (1954) tarafından ispatlanmıştır. Garvan (1988), pozitif tamsayıların vektörel ayrışımlarının crank'ını tanımlamıştır. Dyson'ın crank'ı ise Andrews ve Garvan (1988) tarafından bulunmuştur:

Tanım 1.4. π bir ayrışım olmak üzere, $l(\pi)$ ile π nin en büyük parçası, $\omega(\pi)$ ile π deki 1'lerin sayısı ve $\mu(\pi)$ ile de π nin $\omega(\pi)$ den büyük parçalarının sayısı gösterilirse π nin crank'ı

$$c(\pi) := \begin{cases} l(\pi) & \text{eğer } \omega(\pi)=0 \text{ ise,} \\ \mu(\pi)-\omega(\pi) & \text{eğer } \omega(\pi)>0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Andrews ve Garvan, 1988).

Örnek 1.5. Tablo 2 incelenirse 6 tamsayısının ayrışımların cranklarına göre modulo 11 denklik sınıflarına eşit miktarda dağıldığı görülebilir.

Tablo 2. 6 Tamsayısının Ayrışımlarının Crank'ları

Ayrışım (π)	$l(\pi)$	$\omega(\pi)$	$\mu(\pi)$	$c(\pi)$	$c(\pi)$ *mod 11*
6	6	0	1	6	6
5+1	5	1	1	0	0
4+2	4	0	2	4	4
4+1+1	4	2	1	-1	10
3+3	3	0	2	3	3
3+2+1	3	1	2	1	1
3+1+1+1	3	3	0	-3	8
2+2+2	2	0	3	2	2
2+2+1+1	2	2	0	-2	9
2+1+1+1+1	2	4	0	-4	7
1+1+1+1+1+1	1	6	0	-6	5

Atkin ve Swinnerton – Dyer, Ramanujan kongrüansları ve Dyson'ın iddialarını ispatlamak için kullanışlı bir yöntem vermişlerdir. Bu yöntem, verilen bir m pozitif tamsayısı için q'daki bir kuvvet serisini, katsayıları y'de ($y = q^m$) kuvvet serisi olan q'nun $(m-1)$ – inci dereceden bir polinomu olarak yazmaktır.

Bu çalışmada, m daima asal kabul edilecek ve Atkin ve Swinnerton – Dyer'ın notasyonu kullanılacaktır;

$$(z;q)_\infty := \prod_{r=1}^{\infty}(1-zq^{r-1})$$

ve

$$P(z,q) := (z;q)_\infty (z^{-1}q;q)_\infty \qquad (2)$$

olsun. $P(z,q)$ fonksiyonu $0 < z_1 \le |z| \le z_2$ halka sınırlı bölgesinde tek değerli analitik bir fonksiyondur ve aşağıdaki eşitlikleri sağlar (Atkin ve Swinnerton-Dyer, 1954):

$$P(z^{-1}q,q) = P(z,q), \qquad P(zq,q) = -z^{-1}P(z,q) . \tag{3}$$

Kabul edelim ki *a*, *m* ile bölünmesin. (2) eşitliği kullanılarak

$$P(a) := P_m(a) := P(y^a, y^m) = \prod_{r=1}^{\infty}(1 - y^{m(r-1)+a})(1 - y^{mr-a}) \tag{4}$$

ve

$$P(0) := P_m(0) := \prod_{r=1}^{\infty}(1 - y^{mr}) \tag{5}$$

tanımları yapılabilir. Burada $P(0)$, $P(a)$ tanımında *a* yerine 0 yazılarak elde edilen bir ifade değildir (Atkin ve Swinnerton-Dyer, 1954). (3) ten

$$P(m - a) = P(a),\ \ P(-a) = P(m + a) = -y^{-a}P(a) \tag{6}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülebilir. (6) özdeşlikleri, bileşenlerin hesabında çok önemli bir rol oynar. Örneğin $m = 11$ için yazılabilecek olan tüm $P(a)$ sonsuz çarpımları, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ ve $P(5)$ ten birisine indirgenir.

Örnek 1.6. $P(20) = P(9+11) = -y^{-9}P(9) = -y^{-9}P(11-2) = -y^{-9}P(2)$ bulunur.

$P(a)$ sonsuz çarpımları aslında Jacobi Theta Fonksiyonlarından birisi yani bir kuvvet serisidir. Ayrışım teorisinde analitik ispatlar için her zaman Jacobi Theta Fonksiyonları ve eliptik fonksiyonlar teorisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu makalede izlenecek yol analitik olmadığından dolayı bu teorilere değinilmemiştir.

Üreteç fonksiyonu

$$F := \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$$

olsun. Euclid bölme algoritmasından $n = mr + s,\ 0 \le s < |m|$ olacak şekilde *r* ve *s* pozitif tamsayıları vardır.

Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} F &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m-1} p(mr+s)q^{mr+s} \\ &= \sum_{s=0}^{m-1} q^s \sum_{r=0}^{\infty} p(mr+s)q^{mr} \\ &= \sum_{s=0}^{m-1} q^s \sum_{r=0}^{\infty} p(mr+s)y^{r} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu polinomun katsayıları, $n = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ için

$$F^{(k,m)} := q^k \sum_{n=0}^{\infty} p(mn+k)y^n$$

şeklinde tanımlansın. $F^{(k,m)}$ ye, F'nin k-yıncı bileşeni adı verilir (Lewis, 1995). Açık olarak

$$F = \sum_{k=0}^{m-1} F^{(k,m)}$$

dir. Dolayısıyla F kuvvet serisi, katsayıları $F^{(k,m)}$, yani y'de kuvvet serileri olan q'nun (m-1)-inci dereceden bir polinomu olarak yazılmış olur. Bu sayede kuvvet serileri arasındaki herhangi bir ilişki polinomlar arasındaki ilişkilere indirgenmiş olur.

Bileşenlerin Bazı Kongrüans Özellikleri

Atkin ve Swinnerton – Dyer, ayrışımların kongrüans özelliklerini ve rank'a göre özelliklerini hesaplamak için aşağıdaki iki lemmayı kullanmışlardır:

Lemma 2.1. (Atkin ve Swinnerton – Dyer, 1954)

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv P(0)\sum_{c=0}^{(m-3)/2}(-1)^c(2c+1)q^{\frac{1}{2}c(c+1)}P\left(\frac{m-1}{2}-c\right) \quad (\text{mod } m). \tag{7}$$

Lemma 2.2. (Atkin ve Swinnerton – Dyer, 1954)

ebob(6, n) = 1 ve $n = 6\lambda + \mu \quad (\mu = \pm 1)$ olmak üzere;

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r) = (-1)^{\lambda} q^{\frac{1}{2}\lambda(3\lambda+\mu)} P(0)\left[1+\sum_{c=1}^{(m-1)/2}(-1)^c q^{\frac{1}{2}c(3c-m)}\frac{P(2c)}{P(c)}\right] \tag{8}$$

dir.

Atkin ve Swinnerton-Dyer bileşenlerin modulo 5 kongrüans özellikleri için aşağıdaki Teoremi vermişlerdir;

Teorem 2.3. (Atkin ve Swinnerton – Dyer, 1954) $m = 5$ için

$$F^{(0,5)} \equiv \frac{P(0)P(2)}{P^2(1)} \pmod 5,$$
$$F^{(1,5)} \equiv q\frac{P(0)}{P(1)} \pmod 5,$$
$$F^{(2,5)} \equiv 2q^2\frac{P(0)}{P(2)} \pmod 5,$$
$$F^{(3,5)} \equiv 3q^3\frac{P(0)P(1)}{P^2(2)} \pmod 5,$$
$$F^{(4,5)} \equiv 0 \pmod 5.$$

İspat. Lemma 2.1, $m = 5$ için

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv P(0)\{P(2)-3qP(1)\} \pmod 5$$

kongrüansını verir ve

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^5 \equiv \prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{5r}) \equiv \prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r) \equiv P(0)P(1)P(2) \pmod 5$$

bulunur. Bu iki özdeşlik

$$F = \sum_{k=0}^{m-1}F^{(k,m)} = \sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n = \prod_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^r} \equiv \frac{\left\{\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3\right\}^3}{\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r)^2} \pmod 5,$$

kongrüansında yerlerine yazıldıktan sonra q'nun katsayıları eşitlenirse teorem elde edilmiş olur.

Modulo 7 kongrüans özellikleri de tamamen benzer şekilde elde edilir. Atkin ve Swinnerton-Dyer Lemma 2.1'i aşağıdaki kongrüans içerisinde kullanarak bileşenlerin modulo 7 için kongrüans özelliklerini hesaplamışlardır:

$$F = \sum_{k=0}^{m-1}F^{(k,m)} = \sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n = \prod_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^r} \equiv \frac{\left\{\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3\right\}^2}{\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r)} \pmod 7.$$

Atkin ve Swinnerton-Dyer, bileşenlerin modulo 11 kongrüans özellikleri için yine benzer şekilde

$$F=\sum_{k=0}^{m-1}F^{(k,m)}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n=\prod_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^r}\equiv\frac{\left\{\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3\right\}^3\left\{\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)\right\}}{\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r)}\pmod{11} \qquad (9)$$

kongrüansında q'nun katsayılarının Lemma 2.4 yardımıyla sadeleştirilerek bulunabileceğini iddia etmişlerdir.

Lemma 2.4. (Atkin ve Swinnerton – Dyer, 1954)

$b,c,d,b\pm c,c\pm d,b\pm d$ lerin hiç birisi m ile bölünmesin. Bu durumda

$$P^2(b)P(c+d)P(c-d)-P^2(c)P(b+d)P(b-d)+y^{c-d}P^2(d)P(b+c)P(b-c)=0$$

dır.

Fakat bunun oldukça sıkıcı bir yöntem olduğunu belirtmişler ve bunun yerine önce Teorem 2.5'i vermişler ve bu sonuçları kullanarak ispat yapmışlardır.

Teorem 2.5. (Atkin ve Swinnerton – Dyer, 1954)

$m=11$ için

$$F^{(0,11)}\equiv\frac{P(0)}{P(1)} \pmod{11},$$

$$F^{(1,11)}\equiv q\frac{P(0)P(5)}{P(2)P(3)} \pmod{11},$$

$$F^{(2,11)}\equiv 2q^2\frac{P(0)P(3)}{P(1)P(4)} \pmod{11},$$

$$F^{(3,11)}\equiv 3q^3\frac{P(0)P(2)}{P(1)P(3)} \pmod{11},$$

$$F^{(4,11)}\equiv 5q^4\frac{P(0)}{P(2)} \pmod{11},$$

$$F^{(5,11)}\equiv 7q^5\frac{P(0)P(4)}{P(2)P(5)} \pmod{11},$$

$$F^{(6,11)} \equiv 0 \pmod{11},$$
$$F^{(7,11)} \equiv 4q^7 \frac{P(0)}{P(3)} \pmod{11},$$
$$F^{(8,11)} \equiv 6yq^8 \frac{P(0)P(1)}{P(4)P(5)} \pmod{11},$$
$$F^{(9,11)} \equiv 8q^9 \frac{P(0)}{P(4)} \pmod{11},$$
$$F^{(10,11)} \equiv 9q^{10} \frac{P(0)}{P(5)} \pmod{11}.$$

Teorem 2.5'teki sonuçları

$$\left\{\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3\right\}\sum_{k=0}^{10}F^{(k,11)}q^k - \left\{\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3\right\}^2 \equiv 0 \pmod{11}$$

kongrüansında yerine yazmış ve q'nun katsayılarının sıfıra denk olduğunu Lemma 2.4'ten $m = 11$ için bulunan aşağıdaki on eşitlik ile sadeleştirme yaparak göstermişlerdir;

$$\begin{aligned}
&P(3)P^3(5) - P(5)P^3(4) + y^3P(2)P^3(1) = 0,\\
&P(2)P^3(5) - P(3)P^3(4) + y^2P(1)P^3(2) = 0,\\
&P(2)P^3(4) - P(5)P^3(3) + y^2P(4)P^3(1) = 0,\\
&P(1)P^3(5) - P(4)P^3(3) + yP(3)P^3(2) = 0,\\
&P(1)P^3(3) - P(4)P^3(2) + yP(5)P^3(1) = 0,\\
&P(2)P(4)P^2(5) - P(4)P(5)P^2(3) + y^2P(2)P(3)P^2(1) = 0,\\
&P(1)P(4)P^2(5) - P(2)P(3)P^2(4) + yP(1)P(2)P^2(3) = 0,\\
&P(1)P(3)P^2(5) - P(4)P(5)P^2(2) + yP(3)P(4)P^2(1) = 0,\\
&P(1)P(5)P^2(4) - P(2)P(5)P^2(3) + yP(1)P(4)P^2(2) = 0,\\
&P(1)P(3)P^2(4) - P(3)P(5)P^2(2) + yP(2)P(5)P^2(1) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Fakat (9) kongrüansı dikkatli olarak incelenirse, bu kongrüans kullanılarak bulunacak sonuçlar da $P^3(0)$ çarpanı olması gerekirken, Teorem 2.5'teki bileşenlere bakıldığında ise $P(0)$ çarpanı vardır. Açıkça, Atkin ve Swinnerton-Dyer'ın, (9) kongrüansını (10) eşitlikleri ile sadeleştirerek Teorem 2.5'i elde etmiş olmaları mümkün değildir. Kongrüansları ne şekilde elde etmiş oldukları bilinmemesine rağmen bu çalışmada, belirtmiş oldukları yöntem ve yeni bir kongrüans kullanılarak Teorem 2.5 elde edilecektir.

Teorem 2.5'teki sonuçları Hirschhorn (1987)

$$48\prod_{n\geq 0}(1-q^n)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+n}\left((6m+3)^3(6n+1)-(6m+3)(6n+1)^3\right)q^{\frac{1}{2}(3m^2+3m+3n^2+n)}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki seriyi

$$P(a,q)P(b,q)P(ab,q)P(ab^{-1},q)(q,q)_\infty^2=P(a^3,q^3)(q^3,q^3)_\infty^2\left\{P(b^3q,q^3)-bP(b^3q^2,q^3)\right\}$$
$$-ab^{-1}P(b^3,q^3)(q^3,q^3)_\infty^2\left\{P(a^3q,q^3)-aP(a^3q^2,q^3)\right\}$$

Winquist özdeşliği (1968) ve

$$P(z,q)(q;q)_\infty=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m z^m q^{m(m-1)/2}$$

Jacobi üçlü çarpımı ile düzenleyerek aşağıdaki kongrüansı elde etmiştir;

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^{10}\equiv P^2(0)\left\{P(2)P(3)P(4)P(5)+qP(1)P(4)P^2(5)+2q^2P(2)P^2(3)P(5)\right.$$
$$+3q^3P^2(2)P(4)P(5)+5q^4P(1)P(3)P(4)P(5)+7q^5P(1)P(3)P^2(4)$$
$$+4q^7P(1)P(2)P(4)P(5)+6yq^8P^2(1)P(2)P(3)+8q^9P(1)P(2)P(3)P(5)$$
$$\left.+9q^{10}P(1)P(2)P(3)P(4)\right\}\quad (\mathrm{mod}\,11).$$

Bu kongrüansı

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^{11}\equiv\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r)\equiv P(0)P(1)P(2)P(3)P(4)P(5)\quad (\mathrm{mod}\ 11)$$

ile bölerek Teorem 2.5'i doğrudan ispatlamıştır.

Bileşenlerin Kongrüans Özelliklerinin Doğrudan Hesaplanması

Lemma 2.1 ve Lemma 2.2, $m=11$ için sırasıyla

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3\equiv P(0)\left\{P(5)-3P(4)q+5P(3)q^3-7P(2)q^6+9P(1)q^{10}\right\}(\mathrm{mod}\,11)$$

ve

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)=P(0)\left\{\frac{P(4)}{P(2)}-q\frac{P(2)}{P(1)}-q^2\frac{P(5)}{P(3)}-q^4y\frac{P(1)}{P(5)}+q^5+q^7\frac{P(3)}{P(4)}\right\}$$

sonuçlarını verir. Bu iki ifade ve

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r)=P(0)P(1)P(2)P(3)P(4)P(5)$$

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ MAKUFEBED (2011) 4: 61-73

eşitliği

$$\left\{\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3\right\}^4 \equiv \prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r)\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r) \pmod{11}$$

kongrüansında yerine yazıldıktan sonra q^5 in katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned}&P^3(0)\left\{5yP^2(3)P(1)P(5)+3yP^2(5)P(1)P(2)+2yP^2(2)P(3)P(4)\right.\\&\quad\left.+P^2(4)P(3)P(5)-4y^2P^2(1)P(2)P(4)\right\} \equiv P(0)P(1)P(2)P(3)P(4)P(5) \pmod{11}\end{aligned} \tag{11}$$

kongrüansı bulunur.

Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde (11) in yeni bir kongrüans olduğu ve ilk defa burada görüldüğü anlaşılmaktadır. Atkin ve Swinnerton-Dyer'ın çok daha zor bir yol tercih etmeleri ve (11) kongrüansının bir benzerini kullanmamaları, Teorem 2.5'i daha farklı bir şekilde elde ettiklerini akla getirmektedir. Atkin ve Swinnerton-Dyer'ın, Teorem 2.5 için kullandıkları ispat yöntemine benzer "sentetik" ispatlar izahı zor yöntemlerle elde edilen sonuçları dolaylı yollardan ispatlamak için yapılır. Bu makalede ise Teorem 2.5 doğrudan elde edilmiştir.

(9) kongrüansında q^0 ın katsayısı

$$\begin{aligned}&P^3(0)\left\{-y^2P^3(1)P(2)P(4)P^3(5)+4y^3P^3(1)P^2(2)P^2(3)P(5)+2y^2P^2(1)P^2(2)P(3)P^2(4)P(5)\right.\\&\quad+2y^3P^2(1)P^4(2)P(3)P(4)+3yP^2(1)P(3)P^3(4)P^2(5)+5y^2P^2(1)P(2)P^3(3)P(4)P^2(5)\\&\quad-2y^2P(1)P^3(2)P^3(3)P(5)-3yP(1)P^2(2)P(3)P(4)P^3(5)+3yP(1)P(2)P^3(3)P(4)P^2(5)\\&\quad\left.P(1)P(3)P^2(4)P^4(5)-3yP^3(2)P^2(3)P^2(4)P(5)\right\}/\left\{P^2(1)P^2(2)P^2(3)P^2(4)P^2(5)\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade (10) eşitlikleri ile kolayca yapılabilinecek aritmetik operasyonlarla sadeleştirildikten sonra

$$F^{(0,11)} \equiv \frac{P^3(0)P(2)P(3)P(4)P(5)}{P^2(1)P^2(2)P^2(3)P^2(4)P^2(5)}\{5yP^2(3)P(1)P(5)+3yP^2(5)P(1)P(2)$$
$$+2yP^2(2)P(3)P(4)+P^2(4)P(3)P(5)-4y^2P^2(1)P(2)P(4)\} \pmod{11}$$
$$\equiv \frac{P(2)P(3)P(4)P(5)}{P^2(1)P^2(2)P^2(3)P^2(4)P^2(5)}\{P(0)P(1)P(2)P(3)P(4)P(5)\} \pmod{11}$$
$$\equiv \frac{P(0)}{P(1)} \pmod{11},$$

bulunur, q nun katsayısı

$$F^{(1,11)} \equiv \frac{P^3(0)P(1)P(4)P^2(5)}{P^2(1)P^2(2)P^2(3)P^2(4)P^2(5)}\{5yP^2(3)P(1)P(5)+3yP^2(5)P(1)P(2)$$
$$+2yP^2(2)P(3)P(4)+P^2(4)P(3)P(5)-4y^2P^2(1)P(2)P(4)\} \pmod{11}$$
$$\equiv \frac{P(0)P(1)P(4)P^2(5)}{P^2(1)P^2(2)P^2(3)P^2(4)P^2(5)}\{P(0)P(1)P(2)P(3)P(4)P(5)\} \pmod{11}$$
$$\equiv \frac{P(0)P(5)}{P(2)P(3)} \pmod{11}.$$

elde edilir. Diğer bileşenler ise benzer şekilde kolayca hesaplanır.

Kaynaklar

Andrews, G.E. & Garvan F.G. (1988). Dyson's Crank of a Partition. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 167 – 171.

Atkin, A.O.L. & Swinnerton – Dyer, H.P.F. (1954). Some Properties of Partitions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4, 84 – 106.

Dyson, F.J. (1944). Some Guesses in Theory of Partitions. *Eureka*, Cambridge, 8, 10 – 15,.

Garvan, F.G. (1988). New Combinatorial Interpretations of Ramanujan's Partition Congruences mod 5,7 and 11. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 305, 47—77.

Hardy, G. H., Ramanujan, S. (1918). Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis. *Proc. London Math. Soc.*, 17, 75-115.

Hirschhorn, M.D. (1987). A Generalization of Winquist's Identity and a Conjecture of Ramanujan. *Journal of Indian Mathematical Society*, 51.

Hirschorn, M. D. (1999). Another Short Proof of Ramanujan's Mod 5 Partition Congruences and More. *Amer. Math. Monthly*, 106, 580-583.

Lewis, R. (1995). The Components of Modular Forms. *J. London Math.Soc*., 52 (2), 245-254.

MacMahon, P. A. (1926). The Parity of p(n), the Number of Partitions of n., when $n \leq 1000$. *J. London Math. Soc*. 1, 225-226.

Ramanujan, S. (1927). Some Properties of $p(n)$, the Number of partitions of n. *Paper 25 of Collected Papers of S. Ramanujan*, Cambridge University Pres, London.

Skiena, S. (1990). Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. *Reading*, MA: Addison-Wesley.

Winquist, L. (1968). An Elementary Proof of $p(11m+6) \equiv 0 \pmod{11}$. *J. Combinatorial Theory*, 6, 56-69.