Trakya Eğitim Dergisi
Cilt 12, Sayı 2
Mayıs 2022, 1006-1035

Trakya Journal of Education
Volume 12 Issue 2
May 2022, 1006-1035

ISSN: 2630-6301
Doi: 10.24315/tred.875148

Geliş Tarihi: 10.06.2021

Araştırma Makalesi/
Research Article

Yayına Kabul Tarihi:16.11.2021

ÖZEL DÖRTGENLERİN HİYERARŞİK İLİŞKİSİNİN KURULMASI SÜRECİNDE SORGULAMANIN ROLÜ*

THE ROLE OF INQUIRY IN THE PROCESS OF CONSTRUCTING THE HIERARCHICAL RELATIONSHIP OF SPECIAL QUADRILATERALS

Özge ÇOBAN[1], Melike YİĞİT KOYUNKAYA[2]

ÖZ: Bu çalışmanın temel amacı 10.sınıf öğrencilerinin özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisini kurarken oluşturulan sorgulama topluluğundaki sürecin incelenmesidir. Yedi alt bileşene sahip olan matematiksel sorgulama topluluğu yaklaşımı çalışmanın kavramsal altyapısı olarak ele alınmıştır. Nitel araştırma paradigması benimsenen bu çalışma, durum çalışması ile desenlenmiştir. Bu bağlamda 10. sınıf öğrencilerinin özel dörtgenlerin tanım ve özellikleri hakkındaki var olan bilgileri ve özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisini kurmada hangi sorgulama eylemlerinin kullanıldığı araştırılmıştır. Bununla birlikte öğrencilerin özel dörtgenler konusundaki ön bilgilerinin özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişki kurmadaki sorgulama sürecine etkisinin nasıl olduğu belirlenmiştir. Çalışmanın katılımcıları, bir Anadolu lisesinde öğrenim gören dört 10. Sınıf öğrencisidir. Çalışmada dörtgenler konusu kapsamında sorgulama temelli sorular geliştirilmiş ve bu sorular yardımıyla görüşmeler yapılarak öğrencilerin sorgulama süreçleri incelenmiştir. 10.sınıf öğrencilerinin 6 haftalık uygulama sürecinde alınan video kayıtları ve öğrencilere ait cevap kağıtları çalışmanın veri grubunu oluşturmaktadır. Çalışmada uygulama sürecinde kaydedilen videolar, video metodolojisi kullanılarak analiz edilirken, öğrencilerin cevap kağıtları ise doküman analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Bu çalışmada, sorgulama sürecinde öğrencilerin en fazla diyalog yoluyla matematik anlayışı geliştirme eylemini kullandıkları görülürken bu eylemden sonra sırasıyla risk alma, iş birliği yapma, hataları gözden geçirip kendi kendini düzeltme, matematikçiler gibi matematik yapma, alternatif fikirler önerme eylemleri ortaya çıkmıştır. Bu araştırmanın sonuçları dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisinin kurulması sürecinde matematiksel sorgulama topluluğunun öğrencilerin dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisine dair var olan bilgilerini geliştirmede etkili olduğunu göstermiştir.

Anahtar sözcükler: Özel Dörtgenler, Matematiksel Sorgulama Topluluğu, Sorgulama Temelli Eğitim

ABSTRACT: The main goal of this study is to examine the 10th grade students' inquiry process during their discussion related to the construction of the hierarchical relationship of special quadrilaterals. Mathematical inquiry community approach, which has 7 sub-components, was adopted as the conceptual foundation of the study. The study was designed considering the case study design, which is one of the qualitative research paradigms. In this context, 10th grade students' existing knowledge regarding the definitions and properties of special quadrilaterals as well as their inquiry process related to hierarchical relationships of special quadrilaterals were examined in the study. Additionally, how their existing knowledge of special rectangles affected their inquiry process were identified. Participants of the study were four 10th grade high school students. In the study, inquiry-based questions were developed within the scope of quadrilaterals and interviews were conducted considering those questions in order to identify students' inquiry process. The video recordings of the discussions and the students' wirtten answers regarding question sheets constituted the data of the study. In the study, the recorded videos were analyzed using the video methodology, and the sheets were analyzed using the document analysis method. In this study, it was observed that students mostly used the act of developing mathematical understanding through dialogue in the inquiry process. After the dialogue action, respectively; the actions of taking risk, collaboratively problem solving, self-reviewing and correcting mistakes, doing mathematics like mathematicians, and suggesting alternative approaches occured in the discussions. The results of this study showed that the mathematical inquiry community is effective in establishing or developing the students' existing knowledge about the hierarchical relationship of quadrilaterals.

Keywords: Special Quadrilaterals, Community of Mathematical Inquiry, Inquiry Based Education

* Bu çalışma birinci yazarın, ikinci yazar danışmanlığında tamamladığı yüksek lisans tez çalışmasından üretilmiştir.

[1] Doktora Öğrencisi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir / TÜRKİYE, ozgecoban@outlook.com, ORCID: 0000-0002-0653-9491

[2] Doç. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü – Matematik Eğitimi ABD, İzmir/TÜRKİYE, melike.koyunkaya@deu.edu.tr, ORCID: 0000-0002-7872-3917

Bu makaleye atıf vermek için:
Çoban, Ö. ve Yiğit Koyunkaya, M. (2022). Özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisinin kurulması sürecinde sorgulamanın rolü, *Trakya Eğitim Dergisi, 12*(2), 1006-1035

Cite this article as:
Çoban, Ö. & Yiğit Koyunkaya, M. (2022). The role of inquiry in the process of constructing the hierarchical relationship of special quadrilaterals, *Trakya Journal of Education, 12*(2), 1006-1035

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) emphasizes the needs in order to do mathematics at the targeted level for each student and to have high quality mathematics teaching and learning. One of the models used in order to educate individuals with the competence specified in these standards (2000) is the inquiry-based education approach. The term inquiry-based education refers to a culture of teaching and classroom practices where students examine, research, and evaluate the targeted content (Harlen, 2012). The main goal of this study is examining the 10th grade students' inquiry process during the discussion focused on construction of the hierarchical relationship of special quadrilaterals. Mathematical inquiry community approach was used in order to examine their inquiry process. This approach has 7 sub-components: (1) Developing understanding of mathematics through dialogue, (2) Collaborativelly problem solving, (3) Self-reviewing and correcting mistakes (4) Taking risk, creating a working environment, (5) Suggesting alternative approaches, (6) Reviewing the procedures of inquiry (7) Doing mathematics like mathematicians. This classification was adopted as the conceptual foundation of the study.

Method

The study was designed considering the case study design, which is one of the qualitative research paradigms. In this context, 10th grade students' existing knowledge regarding the definitions and properties of special quadrilaterals as well as their inquiry process related to hierarchical relationships of special quadrilaterals were examined in the study. Additionally, how their existing knowledge of special quadrileterals affected their inquiry process were analyzed. Participants of the study were four 10th grade students (two female, two male). Purposeful sampling method was selected because it gives detailed information about the situations that need to be investigated in depth. In the study, firstly, inquiry-based questions were developed within the scope of quadrilaterals and the focus group interviews were conducted considering those questions in order to identify students' inquiry processes were examined. The video recordings taken during the 6-week and students' written answers regarding the question sheets constituted the data of the study. In the study, the video records were analyzed using the video methodology, and the sheets were analyzed using the document analysis method.

Findings

In this study, it was identified that students mostly used the act of developing mathematical understanding through dialogue in the inquiry process. After the dialogue action, respectively; the actions of taking risk, collaboratively problem solving, self-reviewing and correcting mistakes, doing mathematics like mathematicians, and suggesting alternative approaches were used during the discussions. The act of reviewing the procedures of inquiry was not used by the students during their discussions.

While investigating students' actions during the questioning process, the relations of these actions with each other were also taken into consideration. Considering the effect of questioning actions on each other, the act of developing an understanding of mathematics through dialogue became a tool for other action situations as it provides and supports the communication among students. After using the risk-taking action, the students either reviewed their mistakes and corrected themselves or continued the questioning process by taking risks. The act of taking risks also constituted an environment for cooperation. By supporting the ideas, they found close to their own ideas as well as they took risks against different ideas.

The results of this research showed that in the process of establishing the hierarchical relationship of quadrilaterals, the mathematical inquiry community is effective in improving students' existing knowledge of the hierarchical relationship of quadrilaterals.

Discussion and Conclusion

The results revealed that creating inquiry communities which allow students to establish connections between concepts could strengthen mathematics learning. Examining the relationship between the actions was not the main goal of the study, but we observed that the actions were directly related to develop the community of mathematical inquiry. In future studies, the relationship between the actions used in the inquiry process and how the actions affect each other could contribute to the field as a continuation of this study.

GİRİŞ

Günümüzde matematik eğitimi öğrenciye sunulan hazır bilginin öğrenci tarafından alınıp kullanılmasından ziyade öğrencinin varsayımları değerlendirmesi, çıkarımlar yapması ve gerekçeler sunmasını içeren aktif bir süreç olarak görülmektedir (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]), 2000). NCTM yayınladığı standartlarda (2000) her öğrenci için hedeflenen düzeyde matematik yapmak, kaliteli matematik öğretimi ve öğreniminin olması gerektiğine vurgu yapmaktadır. Bu standartlarda belirtilen yetkinliğe sahip bireyleri yetiştirebilmek amacıyla kullanılan modellerden biri de sorgulama temelli eğitim yaklaşımıdır. Sorgulama temelli eğitimin genel olarak kabul edilmiş net bir tanımı olmasa da ortak temel unsurlar mevcuttur (PRIMAS, 2012). Literatürde sorgulama; uygulamalı, probleme dayalı, tümdengelimsel ve tümevarımsal yaklaşımlar gibi benzer öğretme ve öğrenme yaklaşımlarını yorumlamak ve tanımlamak için farklı şekillerde ve bağlamlarda kullanılan tartışmalı bir kavram gibi görünmektedir (Engeln, Mikelskis-Seifert ve Euler, 2014). Farklı disiplinlerde farklı şekilde ele alınması da bu kavramın net tanımının tartışmalısına öncülük etmektedir. Örneğin, fen eğitiminde sorgulama temelli eğitim, kanıt toplayarak ve fikirleri test ederek anlayış oluşturma süreci olarak görülmektedir. Fen eğitiminde olduğu gibi, matematiksel sorgulama da bir problem ya da soru ile başlar ancak deneyler daha az ön plandadır (Rocard ve ark., 2007). Bununla birlikte matematik eğitiminde sorgulama temelli eğitim çalışmalarına çok fazla rastlanmamakta ama matematik eğitiminde sorgulama yapmanın çeşitli aktivite biçimlerini içerdiği düşünülmektedir. Bunlar; soru sorma veya detaylandırma, modelleme, keşfetme, tahmin etme, test etme, açıklama yapma, muhakeme yapma, tartışma ve kanıtlama, tanımlama ve ilişkilendirme, temsil etme ve iletişim kurma şeklinde belirlenmiştir (PRIMAS, 2012).

Sorgulama temelli eğitim terimi, bir öğretim kültürüne ve öğrencilerin soru sorup sorguladığı, araştırdığı ve değerlendirdiği sınıf uygulamalarına atıfta bulunur (Harlen, 2012). Öğrenme, açık sorular ve çoklu çözüm stratejileri tarafından yönlendirilir. Sorgulama temelli eğitim, öğrencilerin karşılaştıkları belirsizlikleri yönetmek için hayati önem taşıyan sorgulayıcı zihin ve tutumları geliştirmeyi amaçlamaktadır (Artigue ve Blomhoej, 2013). Bu amaçlar doğrultusunda gerçekleştirilen PRIMAS isimli Avrupa Birliği projesinde sorgulama temelli eğitime şu şekilde değinilmiştir:

> "Sorgulama temelli eğitimin, öğrencilerin matematiksel anlayışlarını geliştirmesi beklenir, bu da matematiksel bilgilerinin normal okul görevlerinin ötesinde bir çeşitlilik bağlamında daha sağlam ve işlevsel olmalarını sağlar. Öğrencilere matematiksel ve bilimsel merak ve yaratıcılığın yanı sıra eleştirel düşünme, akıl yürütme ve analiz yapma potansiyellerini geliştirme konusunda yardımcı olacaktır. Aynı zamanda onların bir insan olarak daha doğru bir matematik vizyonu geliştirmelerine, matematiği kültürel mirasımızın temel bir bileşeni olarak görmelerine ve toplumlarımızın gelişiminde oynadıkları kritik rolü takdir etmelerine yardımcı olacaktır." (Fibonacci, 2012a, s. 8).

Geometri, bireyleri problem çözme, eleştirel düşünme, akıl yürütme ve üst düzey düşünme becerileri gibi becerilerle donatır (NCTM, 2000). Bu nedenle geometrik kavramların öğretilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu kavramların öğretimi, bireylerin geometrik şekilleri tanıyarak, niteliklerini keşfederek, bu nitelikleri karşılaştırarak, belirli şekil sınıflandırmalarını geliştirerek ve tümdengelimsel çıkarımlar yapılıp akıl yürütme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olur (Fujita ve Jones, 2007). Özellikle, dörtgenler konusu bu beceriler üzerine araştırma yapmak için çok zengin bir kaynaktır (van de Walle ve ark., 2012). Ülkemizde geometri öğretiminde dörtgenler üzerinde yapılan çalışmalar, dörtgenlerin tanımlanması ve sınıflandırılmasına odaklanmaktadır. Dörtgenlerin sınıflandırılması, dörtgenler arasındaki ilişkilerin kurulmasında ve dolayısıyla geometri ile ilgili problemlerin ve kanıt çalışmalarının çözümünde önem kazanmaktadır. de Villiers'e (1994) göre, hiyerarşik sınıflandırma, dörtgenlerin aile ilişkilerini daha anlaşılır kılan bir sınıflandırma türü olarak tanımlanmıştır. Çeşitli araştırmacıların açıkladığı gibi, dörtgenlerin hiyerarşik olarak sınıflandırılması ve bu şekilde kullanılması desteklenmelidir (de Villiers, 1994; de Villiers, 1998; Fujita, 2012). Buradan hareketle, sorgulama yapmak matematiksel düşünceyi yeniden inşa etmek için fırsat olarak görülürken, dörtgenler konusunun da sorgulama yapmak için uygun olduğu düşünülmüştür. Dolayısıyla, bu çalışmada temel olarak özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisi oluşturulurken öğrencilerin sorgulamayı nasıl kullandıkları araştırılmıştır.

Sorgulama yaklaşımında öğrencilerin, kavramsal bilgilerini inşa etme sürecinde birer sorgulama topluluğu oluşturarak sürece aktif katılmaları ve eleştirel bakış açısı kazanmaları amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda bu çalışmanın kavramsal altyapısı olarak Siegrist (2005) tarafından sorgulama topluluğu temelinde belirlenen ve raporlaştırılan 'Matematiksel Sorgulama Topluluğunun Karakterleri (Characteristics of a High School Classroom Community of Mathematical Inquiry)' modeli kullanılmıştır. Çalışmada belirlenen karakterler bir eylem durumu içerdiğinden, bu çalışma süresince bu karakterler eylem olarak adlandırılacaktır. Siegrist (2005), matematiksel sorgulama topluluğu eylemlerini belirlerken matematiksel olarak uygulanabilir olmasına dikkat etmiş ve sorgulama topluluğunun oluşup oluşmadığının nasıl belirlenebileceği konusunda bir model sunmuştur. Modelde bu eylemler diyalog yoluyla matematik anlayışı geliştirme, işbirlikçi problem çözme, hatalarını gözden geçirme, kendi kendini düzeltme, risk alma, alternatif yaklaşımların değerlendirilmesi, sorgulama prosedürlerini sorgulama, matematikçiler gibi matematik yapma olarak ifade edilmiştir. Bu eylemlerin özellikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir (Şekil 1).

	Matematiksel Sorgulama Topluluklarının Eylemleri
Diyalog Yoluyla Matematik Anlayışı Geliştirme	Diyalog, matematiksel sorgulama topluluğundaki öğrencilerin ortak bir şekilde kendi anlamlarını oluşturdukları dinamik bir ortamdır. Öğrencilerin diyalog aracığıyla fikirlerini ifade etmeleri ve bu sayede de kavrama yönelik anlam oluşturmaları beklenmektedir.
İşbirlikçi Problem Çözme	Bireylerin matematiksel problemleri çözmek için gruplar halinde çalışmaları, çözüm yollarını geliştirmeleri ve daha sonra oluşturdukları çözümleri sınıfa sunarak eleştirel bir biçimde fikirlerini değerlendirmelerine olanak sağlamaktadır (Clarke, 1997; Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, vd., 1991).
Hatalarını Gözden Geçirme- Kendi Kendini Düzeltme	Fikirler arasındaki bir çatışma diyalog yoluyla çözüldüğünde, kendi kendini düzeltme eylemi gerçekleşmiş olmaktadır. Kendi kendini düzeltme aynı zamanda kendi kendini doğrulamayı da gerektirir: Bir öğrenci, yeni bilgiyi kendine doğrular (Gregory, 2002, s. 400).
Risk Alma	Öğrenciler, sorgulama topluluğu içinde ifade edilen fikirlere eleştirilerde bulunup fikrin yanlış ya da eksik olduğunu ifade edebilmektedirler.
Alternatif Yaklaşımların Değerlendirilmesi	Öğrencilerin bir problemin çözümünde alternatif yaklaşımlarının var olabileceği durumunun dikkate almaları, alternatif yaklaşımlar önermeleri ve bu yaklaşımları geliştirmeleridir.
Sorgulama Prosedürlerini Sorgulama	Öğrenciler problem çözme sürecinde yaptıklarını gözden geçirdiklerinde aslında, sorgulama prosedürlerini düşünmektedirler (Siegrist, 2005).
Matematikçiler Gibi Matematik Yapma	Matematiksel sorgulama topluluğuna bir varsayım önerildiğinde, bir karşı örnek bulunana veya varsayım kanıtlanana kadar varsayım incelenmektedir.

Şekil 1. Matematiksel sorgulama topluluğu eylemleri

Siegrist'in 2005 yılında literatür taraması yaparak belirlediği matematiksel sorgulama topluluğu eylemleri bu çalışmanın kavramsal altyapısını oluşturmaktadır. Bu çalışmada matematiksel sorgulama topluluğunun özellikleri eylem olarak ele alınmış olup aynı zamanda veri analizini de yönlendirmiştir.

Özel Dörtgenler Temelinde Yapılan Çalışmalar

NCTM'in yayınladığı standartlara dayalı olarak (1989) matematik eğitiminde hem içerikte hem de öğretim yönteminde düzenlemeler yapılmıştır. Bu standartlarda özellikle, "ilişkilendirilmemiş kavramların ve formüllerin ezberlenmesinin egemen olduğu bir müfredattan kavramsal anlayışları, çoklu temsiller ve bağlantıları vurgulayan bir müfredata geçişi gerektirir" (NCTM, 1989) vurgusu yapılmaktadır. Matematiksel kavramlar matematiksel düşünmenin gelişmesi için önemlidir (Toptaş, 2015). Matematikte bir kavramın tüm özelliklerini listelemek onun tanımını yapmak anlamına gelmez (de Villiers, 1998). Tanım oluşturabilmek için gerekli ve yeterli özelliklerin seçilmesi gereklidir (Fujita ve Jones, 2007). Aynı matematiksel kavrama yönelik farklı tanımlar kullanılabilir (Leikin ve Winicki-Landman, 2000) ve literatürde dörtgenlerin farklı tanımları mevcuttur (Leikin ve Zazkis, 2008; Usiskin, Griffin, Witonsky ve Willmore, 2008). Dörtgenlerin birbirleriyle ilişkisi ise nasıl tanımlandıklarına bağlı olarak değişir (Horzum, 2018; Öztoprakçı ve Çakıroğlu, 2013). Usiskin ve arkadaşları (2008), "Dörtgenlerin Sınıflandırılması: Bir Tanım Çalışması" adlı kitaplarında kapsayıcı ve hariç tutan (dışlayıcı) olmak üzere iki tanımdan bahsetmişlerdir. Kapsayıcı tanım hiyerarşik sınıflamaya olanak sağlayan tanımdır. Hariç tutan tanım ise dörtgenlerin birbirleriyle ilişkisi göz ardı edilerek yapılan tanımdır (Usiskin ve ark., 2008). Örneğin paralelkenarın kapsayıcı tanımına göre dikdörtgen aynı zamanda bir paralelkenar olarak alınırken; hariç tutan tanıma göre dikdörtgen, paralelkenar sınıfında yer almaz. Herhangi iki dörtgenin hiyerarşik bir yapıya bağlı olması, bir dörtgenin diğerinin tüm özelliklerine sahip olduğunu gösterir. Dörtgenler arasındaki bu dahil olma kavramı, ilgili dörtgenlerin hiyerarşik ilişkilerini anlamak için ön koşuldur. Fujita ve Jones'a (2007) göre kapsayıcı tanımların sonucu olarak ortaya çıkan hiyerarşik ilişkiler daha kullanışlıdır. Çünkü bir kavram için doğru olan özellik, o kavramın kapsadığı diğer kavramlar için de doğru olacaktır. Kapsayıcı tanımların öğrenilmesi, hariç tutan tanımların öğrenilmesine göre zihinsel düşünme kalitesini arttırma ve daha üst düzey düşünme becerisi kazandırma gibi avantajlar nedeniyle daha ön plandadır (Fujita ve Jones, 2007). Hariç tutan tanımların kapsayıcı tanımlara göre dezavantajlarının olduğu da görülmektedir. Hariç tutan tanımlar zihinde tek tip kavram şekillerinin oluşmasına ve bu nedenle kavramlar arasındaki ilişkilerin anlaşılamamasına yol açabilmektedir (Kondratieva ve Radu, 2009; Schwarz ve Hershkowitz, 1999). Bu sebeple dörtgen öğretimi yapılırken tanımların kapsayıcı olarak ele alınması önem taşımaktadır.

Geometrik şekillerin özelliklerine göre hiyerarşik sınıflandırılması üst düzey bir beceri olmasıyla birlikte matematik dersi öğretim programlarının (Milli Eğitimi Bakanlığı [MEB], 2018a, 2018b) büyük bir kısmını oluşturmaktadır. Araştırmacılar geometrik şekiller arasındaki hiyerarşik ilişkilerin anlaşılmasının, sorgulama ve muhakeme yeteneğinin geliştirilmesinde önemli olduğunu vurgulamışlardır (Clements, 2003; Fujita ve Jones, 2007). Örneğin, bir paralelkenar '*iki çift paralel kenara sahip bir dörtgen'* olarak tanımlanır. Açıkça belirtmese de, bu tanım eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve karenin aynı zamanda (özel bir) paralelkenar olduğu anlamına gelmektedir. Çünkü bu dörtgenler iki çift paralel kenara sahiptir. Matematikçilerin bu tanımı tercih etmelerinin sebebi ekonomik olmasıdır. Yani, paralelkenarlar için bir ifade doğruysa, örneğin 'paralelkenarların köşegenleri orta noktalarında kesişirse', o zaman kareler, dikdörtgenler ve eşkenar dörtgenler için de doğru olacaktır ve bunu, bu tür dörtgenlerin her biri için kanıtlamaya gerek yoktur (Fujita, 2012). Araştırmalar, geometrik şekillerin çizimlerinin geometrik şekillerin tanımlarından ve özelliklerinden daha önemli olarak kabul edildiğini göstermiştir (Hershkowitz ve ark., 1990). Dörtgenlerin bu tek tip örnekleri genellikle doğru bir şekilde tanımlanır, ancak farklı çizimlerle karşılaşılınca dörtgenler ilişkilendirilemez (Fujita ve Jones, 2007; Fujita ve Okazaki, 2007; Fujita, 2012; Monaghan, 2000). Kavramların bu tek tip örnekleri bazen bir kavramın tanımı ve diğer kavramlarla arasında yanlış anlamalara yol açabilir. (Fujita ve Jones, 2007; Fujita, 2012; Hershkowitz ve ark., 1990; Pratt ve Davison, 2003). Örneğin, paralelkenarın standart tanımı "karşılıklı kenarları paralel olan bir dörtgen" olarak verilmesine rağmen, dikdörtgen, kare ve eşkenar dörtgen paralelkenar olarak düşünülmemektedir, çünkü paralelkenarın tek tip görüntüsü iç açılar ve kenar uzunlukları hakkında bilgi vermemektedir (Vinner, 1991). Dörtgenlerin hiyerarşik sınıflandırması ve kavranması, dörtgenler arasında ilişki kurulmasında, problem çözmede, geometrik ispat çalışmalarında ve geometrik akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesinde anahtar rol oynar (Fujita ve Jones, 2007; NCTM, 2000; Türnüklü ve ark., 2012; van Hiele, 1999). Alan yazın incelendiğinde dörtgenleri tanımlamak ve sınıflandırmanın birçok öğrenci için zor bir konu olduğu görülmektedir. Bu konuyu öğrenmede yaşanan sorunların öğrencilerin sorgulama becerileri ile ilişkili olabileceği düşünülmektedir. Öğrencinin öğrenme sürecine aktif katılımının sağlandığı, bilgiyi kendi zihninde yapılandırmaya olanak tanıyan sorgulama sürecinde, kavramlar arasındaki ilişkilerin açığa çıkması daha olasıdır. Kavramlar arası ilişkilerin açığa çıkması öğrencilerin öğrenmelerini kolaylaştırır ve aynı zamanda diğer kavramlarla da kolay biçimde ilişkilendirmelerini sağlar (Artigue ve Blomhoej, 2013).

Bu çalışmada, 10. Sınıf öğrencilerin bir sorgulama topluluğu oluşturularak özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisinin kurulması sürecinde ortaya çıkan sorgulama eylemleri incelenmiş ve bu anlamda matematik eğitiminde az sayıda olan ulusal ve uluslararası alan yazına katkı sağlanması amaçlanmıştır. Aynı zamanda öğrencilerin ön bilgilerinin sorgulama sürecini nasıl etkilediği incelenerek alana katkı yapılacağı düşünülmektedir. Sorgulama yapmanın önemi ve matematik eğitiminde sorgulama temelinde yapılan çalışmaların sayısının az olduğu düşünüldüğünde (örn. Divrik, 2019; Karademir ve Akman, 2021; Schoenfeld ve Kilpatrick, 2013; Sonay Ay ve Bulut, 2017; Yoshinobu ve Jones, 2011), geometri öğreniminde sorgulamanın öneminin araştırılması gerektiği düşünülmektedir. Bu anlamda, bu araştırmaya önderlik eden araştırmanın problemleri şu şekildedir:

1. 10.sınıf öğrencilerinin özel dörtgenlerin tanım ve özellikleri hakkındaki var olan bilgileri nedir?
2. 10.sınıf öğrencileri özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişki kurmalarındaki sorgulama sürecinde hangi sorgulama eylemlerini kullanmaktadırlar?

3. 10. Sınıf öğrencilerinin özel dörtgenler konusundaki ön bilgilerinin özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişki kurmalarındaki sorgulama sürecinde gözlemlenme durumları nasıldır?

YÖNTEM

Araştırmanın modeli

Bu çalışma nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması deseni kullanılarak yürütülmüştür. Durum çalışmasında; bir ortamın, tek bir konunun, tek bir doküman deposunun veya bir özel olayın ayrıntılı bir şekilde incelenmesi söz konusudur (Merriam, 1988; Stake 1994; Yin, 2018). Bu çalışma bütüncül tek durum çalışması ile desenlenmiştir (Yin, 2018). Tek bir analiz birimi olan durum çalışmalarında, benzer özellikte olan bir grup birim olarak kabul edilerek benzer durumda meydana gelen benzerlikler ve farklılıklar araştırılarak durumun özellikleri detaylı şekilde açıklanabilir (Yin, 2018). Bu çalışmada 10. Sınıf öğrencileri bir birim olarak kabul edilmiş ve bu öğrencilerin bir sorgulama topluluğunda özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisini kurma süreçlerinde ortaya çıkan eylemler durumu detaylı olarak incelenmiştir.

Çalışma Grubu

Çalışmanın katılımcılarını İzmir ilinde bir devlet Anadolu lisesinde 10. Sınıfta öğrenim görmekte olan 4 öğrenci (2 kız öğrenci, 2 erkek öğrenci) oluşturmaktadır. Araştırma 2019/2020 öğretim yılı birinci döneminde gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler aynı yaşta, aynı sınıf seviyesinde ve aynı okulun farklı sınıf şubelerinde yer almaktadırlar. Öğrenciler farklı sınıflarda olmasına rağmen daha öncesinde farklı çalışmalar için bir arada çalışmışlardır. Öğrencilerin matematik dersi not ortalamaları 80 ve üstü olduğu için bulundukları sınıfa göre başarılı sayılmaktadırlar.

Araştırmanın yapılacağı katılımcı grubu belirlenirken, derinlemesine araştırılması gereken durumlara dair detaylı bilgi verdiğinden dolayı amaçlı örnekleme kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Katılımcıların daha önce dörtgenler konusuna dair ön bilgilerinin olmaları ve iş birliğine açık, kendini iyi ifade edebilmeleri birer ölçüt olarak alınmıştır. Öğrenci seçimi okulda 10. Sınıflarda görev yapan matematik öğretmenleri referansıyla sağlanmıştır.

Veri Toplama Aracı

Sorgulama temelli sorular (bkz. Ek) hazırlanırken 10.sınıf öğrencilerinin özel dörtgenlerin tanım ve özellikleri hakkındaki var olan bilgilerini ve özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişki kurmalarındaki sorgulama sürecinde hangi sorgulama eylemlerini kullandıklarını belirlemeye odaklanılmıştır. Dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisi 10. Sınıf öğretim programında son konu olarak ele alındığından, araştırmanın yapıldığı dönemde 10. Sınıf olmalarına rağmen öğrenciler bu konuyu lise seviyesinde henüz öğrenmemişlerdir.

Sorgulama temelli sorular hazırlanırken alan yazın taraması yapılmış olup, dörtgenler konusunda yayınlanmış çalışmalar ve ortaokul (MEB, 2018a) ve lise (MEB, 2018b) matematik öğretim programları incelenmiştir. Sorular hazırlandıktan sonra uzman görüşü alınmış olup sonrasında uzman görüşüne göre bir soru açık ve anlaşılır olmadığı için çıkarılmıştır. Ardından yapılacak çalışmanın pilot çalışması yapılmıştır. Pilot çalışma bulgularına göre çoktan seçmeli olarak tasarlanan bazı sorular açık uçlu hale dönüştürülerek veri toplama aracının son hali verilmiştir.

Öğrenciler ile sorgulama temelli soruların uygulamaları kendi okullarında ders saatleri dışında yapılmıştır. Uygulamalar sırasında öğrencilerin düşüncelerini kayıt altında tutma amaçlı video kaydı alınmıştır. Çalışmada araştırmacı, öğrencilere müdahalede bulunmamış fakat öğrencileri diyaloga teşvik etmek amacıyla sorgulama topluluğunu yönlendirdiği durumlar olmuştur. Bu yönlendirmeler öğrencilerin sorgulama sürecinde sessiz kaldıkları veya konudan/bağlamdan çok uzaklaştıkları durumlarda yapılmıştır. Yönlendirme yapılırken öğrencileri cevaba ulaştırıcı sorulardan ziyade kendi fikirlerini oluşturmalarını destekleyici şekilde sorular sorulmuştur.

Verilerin toplanması sorgulama temelli soruların uygulanmasına paralel olarak 6 oturum şeklinde planlanmıştır (bkz. Ek). Öncelikle öğrencilerin özel dörtgenlere dair sahip oldukları ön bilgilerin açığa çıkarılması için 1. Oturumda yer alan tanım ve özellik sorularına yer verilmiştir. 2. Ve 3. Oturumlarda dörtgenler ile ilgili verilen ifadelerin doğru ve yanlış olma durumları göz önüne alınarak nedenleriyle birlikte açıklanması beklenmektedir. 4. oturumda bazı özellikler verilmiş ve verilen özelliklerin hangi dörtgenlere ait olduğunun nedenleri ile açıklanması beklenmektedir. 5. oturumda dörtgen görselleri verilmiş olup, bunların isimlendirilmesi ve nedenlerinin açıklanması beklenmektedir. 6. oturumda ele alınan dörtgenleri düşünerek bir şema ve küme ile ifade edilmesi istenmiş ve bazı dörtgenlerin birbiri ile ilişkisini veren ifadelerin açıklanması istenmiştir.

Bu çalışmanın veri grubunu, 10.sınıf öğrencilerinin 6 haftalık uygulama sürecinde (Oturum-1, Oturum-2, Oturum-3, Oturum-4, Oturum-5, Oturum-6) kaydedilen video kayıtları (Şekil-2'de çalışmadaki oturum süreleri verilmiştir.), bu uygulama sürecinde öğrencilere sorulan sorgulama temelli soruları çözdükleri cevap kağıtları oluşturmaktadır.

Oturumlar	Oturum-1	Oturum-2	Oturum-3	Oturum-4	Oturum-5	Oturum-6
Süre	1:30:00	1:13:18	1:23:29	1:28:35	1:18:09	1:30:17

Şekil 2. Çalışmadaki oturum süreleri

Verilerin Toplanması ve Analizi

Çalışmada toplanan veriler farklı yöntemler kullanılarak analiz edilmiştir. Uygulama sürecinde öğrencilerin cevap kağıtları doküman inceleme (Bowen, 2009) ve kaydedilen videolar, video metodolojisi kullanılarak (Powell, Francisco, & Maher, 2003) analiz edilmiştir. Bu çalışmada doküman analizi, öğrencilerin cevap kağıtlarında yer alan kritik noktaların belirlemesi için kullanılmıştır. Bu çalışmada video verilerini analiz etmek için öğrencilerin matematiksel fikirlerinin geliştirilmesi çalışmasına dayanan Powell ve arkadaşlarının video metodolojisi kullanılmıştır. Matematiksel düşüncenin gelişimini incelemek için kullanılan bu model 7 aşamalıdır: (1) Dikkatle video verilerini görüntüleme, (2) Video verilerini açıklama, (3) Kritik olayları tanımlama, (4) transkript etme, (5) kodlama, (6) Hikaye oluşturma, (7) Hikayeleri birleştirme. Bu metodolojinin kullanılmasının amacı sorgulama sürecinde ortaya çıkan kritik olayların tanımlanması ve sonrasında yorumlanmasıdır.

Verilerin analizi yapılırken Siegrist'in (2005) kavramsal altyapısı kapsamında 7 aşamalı video metodolojisinin önce ilk 5 bileşeni ele alınmıştır. Öncelikle video kayıtlarının tamamı izlenmiştir. Sonrasında videolar ortalama 25 dakikalık bölümlere ayrılmıştır. Ayrılan bölümler tekrar izlenmiş ve bu süreçte gerçekleşen tüm olaylar, öğrencilerin ve araştırmacının aralarında geçen konuşmalar olduğu gibi aktarılmıştır. Sonrasında ayrılan bu bölümlerdeki kritik olaylar belirlenmiştir. Bir eylem, önceki bilgiyi destekleyici şekilde ya da yanlışlığını ortaya çıkaracak biçimde bir değişiklik gösterdiğinde kavramsal bir sıçrama gerçekleşir ve bu durum kritik olay olarak adlandırılır (Kiczek, 2000; Maher ve Martino, 1996; Maher, Pantozzi, Martino, Steencken ve Deming, 1996). Bu çalışmada sorgulama eylemlerinin ortaya çıktığı kısımlar kritik olaylar olarak tanımlanmıştır. Sorgulama eylemleri yani kritik olaylar belirlendikten sonra bu kısımlar transkript edilmiştir. Transkript edilen bölümler benimsenen modele uygun olacak biçimde (7 sorgulama eylemini temel alarak) kodlanmıştır. Bu süreçte renkli kodlama yapılmıştır. Modelde yer alan eylemlerin her biri farklı renklerle ifade edilmiştir. Renkli kodlama verilerin hikayeleştirilmesi ve hikayelerin birleştirilmesi aşamalarında kolaylık sağlamıştır. Veri analizinde tablolaştırma yapılmıştır (bkz. Şekil 3). Veri analiz tablosunda diyalog yoluyla matematik anlayışı geliştirme sarı renk, iş birlikçi problem çözme deniz mavisi, hatalarını gözden geçirme- kendi kendini düzeltme pembe renk, risk alma yeşil renk, problem çözme için alternatif yaklaşımların değerlendirilmesi turkuaz renk ve matematikçiler gibi matematik yapma kırmızı renk ile kodlanmıştır. Sorgulama prosedürlerini gözden geçirme eylemi çalışmada ortaya çıkmadığı için kodlama rengi belirlenmemiştir. Veri analizinden bir kesit örneği Şekil 3'te verilmiştir. Örneğin, Suna eşkenar dörtgeni tanımlarken 4 kenarı 4 köşesi olan ve karşılıklı kenarları paralel olan kapalı şekil biçiminde tanım yapmıştır. Bu kısımda tanım yaptığı için diyalog eylemi olarak tanımlanmış ve analiz tablosunda sarı renkle ifade edilmiştir. Suna, sorgulama sürecinde kare ve eşkenar dörtgenin ilişkili olmadığını ifade etmiştir. Arkadaşlarıyla fikir alışverişleri sonucunda fikrini değiştirmiş ve her karenin bir eşkenar dörtgen olduğunu ancak tersinin doğru olmadığını söyleyerek kendisini gözden geçirip hatalarını düzeltmiştir. Fikirlerin gözden geçirilip hataların düzeltilmesi eylemi sorgulama süreci açısından kritik olaydır ve analiz tablosunda pembe renk ile ifade edilmiştir.

Araştırmacı video metodolojisinde yer alan ilk 5 aşamayı tüm video kayıtları için yaptıktan sonra hikayeleştirme ve hikayelerin birleştirilmesi aşamalarına geçmiştir. Hikayeleştirme aşamasında öğrencilerin sordukları sorulara ya da verdikleri cevaplara göre sergiledikleri eylemlerin yorumlanması yer almaktadır. Son aşama olan hikayelerin birleştirilmesinde ise araştırmacı daha önce belirlenen hikayeleri kavramsal çerçeveye göre yorumlayarak birleştirmiştir. Yapılan analizler sonucunda bazı eylem durumlarının benzer temalarda olduğu fark edilmiş ve diyalog eylemi altında yeni alt bileşenler tanımlanmıştır. Bu alt eylemler: tanımlama yapma, bilginin anlaşılması, karşılaştırma, onaylama, bilginin sentezlenmesi, fikir önerme, soru-cevap, örnek verme ve bilginin yorumlanmasıdır. Bu anlamda Siegrist (2005) tarafından önerilen kategoriler bu çalışmada genişletilmiş ve detaylandırılmıştır.

44:32 - 54.00	Araştırmacı tüm köşeleri çember üzerinde olan bir paralelkenar çizebilir miyiz diye sordu. Önder çizemeyiz dedi. Araştırmacı nedenini sordu. Önder neden çizilemeyeceğini anlattı. Suna, bu fikrin arkasından hemen devam etmek istedi. Önder'in fikrine katılıp çizilmez dedi. En fazla üç köşenin çember üzerinde olabileceğini söyledi. Bunun yanında pararlelkenar çizemem ama kare, yamuk, eşkenar dörtgen, dikdörtgen çizebilirim dedi. Fulya Suna'ya kendi tanımına göre nasıl çizdin diye sordu. Suna çizdim deyince Fulya hepsi değiyor öyle mi dedi. Hakan şöyle yapılabilir diye araya girdi. Fulya senin tanımına göre bence zaten yamuk çizilebilir diye ekledi. Suna şekil üzerinden gösterdi. Araştırmacı Fulya'ya ne düşündüğünü sordu. Fulya kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgenin bir paralelkenar olduğunu düşündüğüm için bu şekiller çizilebilir dedi. Araştırmacı Hakan'a fikrini sordu. Hakan detaylı bir şekilde açıklamak istediğini söyledi. Kare ve dikdörtgenin nasıl çizilebileceğini ispatladı. Kare ve dikdörtgen de bir paralelkenar olduğu için çizilebilecğini belirtti. Suna, Hakan'ın böyle bir şey ifade edeceğini biliyordum zaten dedi. Araştırmacı Önder'e katılıp katılmadığı sordu. Önder Hakan'ın fikrine karşı çıkarak katılmadığını belirtti. Araştırmacı nedenini sorunca tanım farklılığından kaynaklandığını söyledi. Hakan her şeye paralelkenar diyebilir dedi. Suna, Önder'e hak verdi. Son durumda Önder ve Suna çizilemeyeceğini, Fulya ve Hakan çizilebileceğini belirttiler. Araştırmacı, Fulya ve Hakan'ın kare ve dikdörtgen çizibildiklerini aynı zamanda bunu çizerek de gösterdiklerini söyledi. Suna'nın fikrini ve çizimini sordu. Suna paralelkenarı bireysel olarak aldığını ama Fulya ve Hakan'ın her şeyi birbirine bağladıklarını söyledi. Araştırmacı, Suna sen bazı şekillerin çizilebileceğini söylemiştin, yamuğu çizmişsin dedi. Hakan karşı çıkarak eşkenar dörtgen çizilemez. Çizildiği durumda oval olur dedi.	Araştırmacı tüm köşeleri çember üzerinde olan bir paralelkenar çizebilir miyiz diye sordu. Ömer çizemeyiz dedi. Araştırmacı nedenini sordu. Önder neden çizilemeyeceğini anlattı. (Diyalog) (soru- yorumlama) Suna bu fikrin arkasından hemen devam etmek istedi. Önder'in fikrine katılıp çizilmez dedi. En fazla üç köşenin çember üzerinde olabileceğini söyledi. Bunun yanında pararlelkenar çizemem ama kare, yamuk, eşkenar dörtgen, dikdörtgen çizebilirim dedi. (diyalog- İş birliği- grup çalışması) (yorumlama) Fulya, Suna'ya kendi tanımına göre nasıl çizdin diye sordu. Suna çizdim deyince Fulya hepsi değiyor öyle mi dedi. (Risk alma) Fulya kare, dikdörtgen eşkenar dörtgenin bir paralelkenar olduğunu düşündüğüm için bu şekiller çizilebilir dedi. (Diyalog) (yorumlama) Araştırmacı Hakan'a fikrini sordu. Hakan detaylı bir şekilde açıklamak istediğini söyledi. Kare ve dikdörtgenin nasıl çizilebileceğini ispatladı. Kare ve dikdörtgen de bir paralelkenar olduğu için çizilebilecğini belirtti. (Diyalog) Doğrulama var-matematik yapma (soru- bilginin anlaşılması- sentezlenmesi- yorumlanması) Önder, Hakan'ın fikrine karşı çıkarak katılmadığını belirtti. Araştırmacı nedenini sorunca tanım farklılığından kaynaklandığını söyledi. Hakan her şeye paralelkenar diyebilir dedi. (Risk alma)	Araştırmacı: Tüm köşeleri çember üzerinde olan bir paralelkenar çizebilir miyiz? Önder: Ben çizemeyiz dedim. Araştırmacı: Neden çizemeyiz dedin? Önder: Hocam çizdiğim zaman sadece üst üst tarafı düşünelim üst taraftan başlarsak köşeleri birleşiyor ama alt köşeler dışarıda kalıyor ya da çemberin içinde kalıyor. Aynı şekilde alt taraftan başlarsak bu sefer üst taraftakiler birleşmiyor. Bu yüzden çizemeyiz. Araştırmacı: Önder çizemeyiz dedi. Suna: Devam edebilir miyim hemen bu fikrin arkasından. Çizemem dedim çünkü denedim mutlaka en fazla üç köşe çemberin üzerinde olabiliyor ya bir tanesi çemberin içinde kalıyor ya da dışında kalıyor. Ama ne olursa olsun boşta kalıyor. Kare eşkenar dörtgen dikdörtgen yamuk çizilebiliyor onları da denedim ama paralelkenar çizilmiyor. Araştırmacı: Paralelkenar çizemem ama kare yamuk eşkenar dörtgen dikdörtgen çizebilirim diyorsun. Fulya: Kendi tanımına göre nasıl çizdin? Suna: Çizdim ben. Fulya: Köşelerinin Hepsi değiyor öyle mi? Hakan: Şöyle yapılabilir. Fulya: Ama senin tanımına göre bence zaten yamuk çizilebilir. Suna: Bak bir.(Şekil üzerinde gösteriyor) Araştırmacı: Fulya sen ne diyorsun? Fulya: Ben zaten kare dikdörtgen eşkenar dörtgenin bir paralelkenar olduğunu düşündüğüm için bu şekiller çizilebilir. Araştırmacı: Hakan sen ne düşünüyorsun? Hakan: Ben şimdi açıklayarak bir şey yapmak istiyorum. Çünkü siz büyük ihtimalle şey diyeceksiniz dikdörtgen ve kareyi nasıl çizebiliriz diye büyük ihtimalle soracaksınız ben direkt peşin peşin anlatmaya başlayayım. O merkezli bir çemberimiz olsun. Bir çapımız olsun bu çapa alt ve üst tarafta x mesafede olan 2 tane kenar çizelim.Bu kenarları sol taraflarından ve sağ taraflarından birleştirince başlangıçtaki çizgiler zaten simetriden dolayı eşit olacak.O zaman çizdiğimiz kenarlarda birbirine eşit olacak 90 derece olacak böyle olunca bir dikdörtgen bazen bir kare oluyor ve baktığımız zaman dikdörtgende paralelkenar dır. Bu sebepten dolayı paralelkenar çizilebilir. Araştırmacı: Dedi Hakan. Suna: Böyle diyeceğini biliyordum zaten. Araştırmacı: Önder katılıyor musun? Önder: Hayır. Araştırmacı: Neden peki? Hakan: Çünkü tanım farklılığı. Önder: Çünkü tanımlarımız farklı. Hakan mesela her şeye paralelkenar diyebilir. Suna: Evet her şeye. Hocam gördüğü her şekle yamuk diyor Hakan. Araştırmacı: Yanlış bir şey mi söylüyor? Suna: Bence yanlış. Araştırmacı: Ben burada doğru yanlış diye bir şey diyemem ben sadece tüm köşeleri çember üzerinde olan bir paralelkenar çizilebilir mi çizilemez mi bunu merak ediyorum. Suna: Çizilemez.
	Araştırmacı Suna'nın kare ve dikdörtgeni çizebiliyoruz ifadesine karşılık neden bu şekilleri çizebildiğimizi sordu. Hakan az önce açıkladığını ifade etti. Suna eşkenar dörtgenin mutlaka 1 köşesinin içerde ya da dışarda kaldığını ama kare ve dikdörtgende bu olayın olmadığını belirtti. Araştırmacı Sunaya eşkenar dörtgeni dahil edip etmediğini sordu. Suna dahil ettiğini kareyi döndürünce eşkenar dörtgen olduğu belirtti. Araştırmacı bunun üzerine Suna'nın eşkenar dörtgen dediği şekli gösterek ben sana böyle bir kare çizemeyecek	Suna, Önder'e hak verdi. Son durumda Önder ve Suna çizilemeyeceğini, Fulya ve Hakan çizilebileceğini belirttiler. (İş birliği- grup çalışması) Araştırmacı Fulya ve Hakan'ın kare ve dikdörtgen çizibildiklerini aynı zamanda bunu çizerek de gösterdiklerini söyledi. Suna'nın fikrini ve çizimini sordu. Suna paralelkenarı bireysel olarak aldığını ama Fulya ve Hakan'ın her şeyi birbirine bağladıklarını söyledi. Araştırmacı Suna sen bazı şekillerin çizilebileceğini söylemiştin, yamuğu çizmişsin dedi. (Diyalog) (karşılaştırma)	Araştırmacı: Önder ve Suna çizilemeyeceğini söylüyor. Fulya ve Hakan çizilebilir diyor. Suna: Ama hocam şu da var. Araştırmacı: Ben şunu da merak ediyorum. Fulya ve Hakan diyor ki kare ve dikdörtgen çizebiliriz. Bunlar paralelkenardır dolayısıyla paralelkenar çizilebilir. Hakan kendince bir şekil çizmiş burada sembolik Fulya da çizmiş. Sen ne diyorsun Suna? Sen de bir çizer misin? Suna: Çizdim. Ben diyorum ki ben paralelkenarı bireysel olarak alıyorum ama onlar her şeyi paralelkenara bağladılar. Onlar da bizim gibi paralelkenarı yalnız olsa onlar da çizilemez der. Araştırmacı: Şunu merak ediyorum. Dedin ki kare dikdörtgen eşkenar dörtgen çizebilirim. Yamuk bir de. Yamuğun çizmişsin onu gördüm. Hakan: Eşkenar dörtgen çizilemez çünkü oval oluşur. Suna: Yamuk ve kareyi ben kabul ettim. Kareyi ben direkt kabul ettim. Araştırmacı: Peki bir şey merak ettim. Neden kare ve dikdörtgeni çizebiliyorsunuz? Suna: Çünkü.

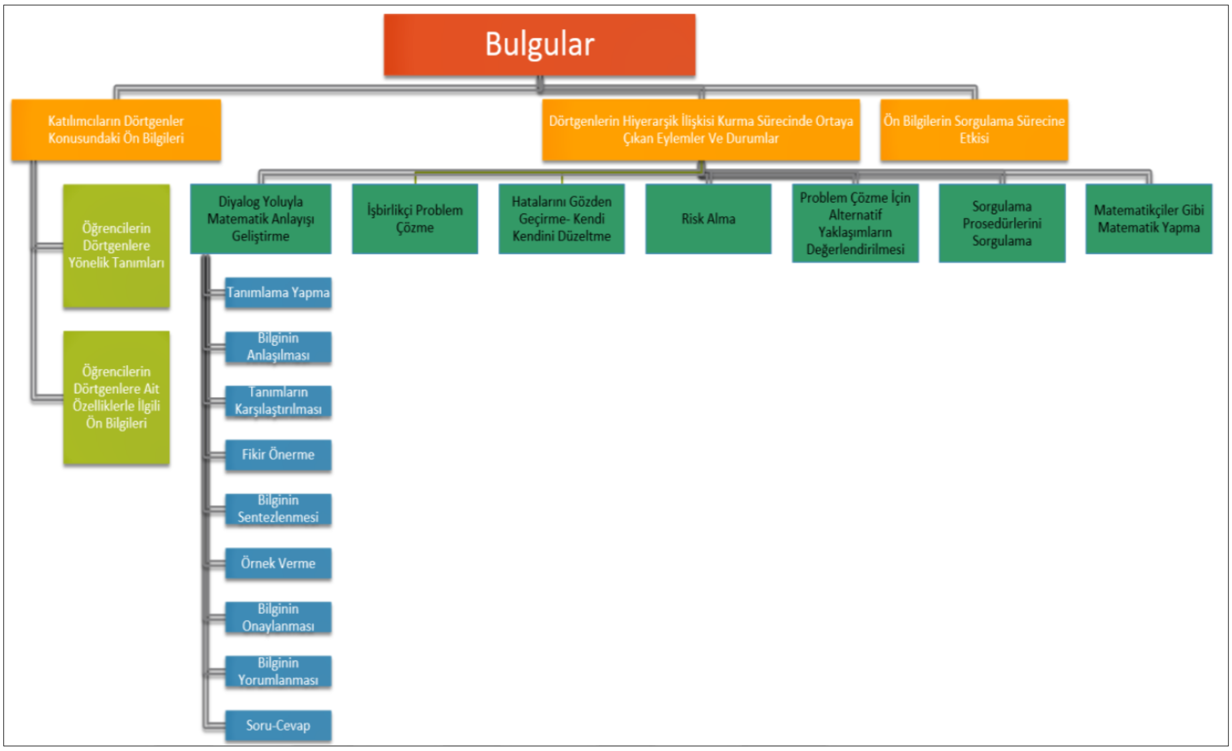
Şekil 3. Örnek analiz tablosu

Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Çalışmanın geçerliliğini arttırmak amacıyla, çalışmada öğrencilerin cevap kağıtları ve kaydedilen videolar kullanılarak farklı veri grupları aracılığıyla veri çeşitlemesi yapılmıştır (Patton, 2000). Öğrencilerin kağıtlarındaki yanıtlar ile tartışma süresince değindikleri noktalar karşılaştırılarak veri grubunun geçerliliği sağlanmıştır. Çalışmanın güvenirliğini sağlamak için özel dörtgenler konusunda geliştirilen sorgulama temelli sorular için uzman görüşü alınmış aynı zamanda pilot çalışma yapılmıştır. Analiz aşamasında, veriler iki araştırmacı tarafından da incelenmiş, video kayıtları birebir transkript edilerek ve cevap kağıtları incelenerek güvenilirlik sağlanmıştır. Analiz sürecinde, araştırmacıların farklı görüşleri ve kodlamaları olduğu durumlar tartışılarak fikir birliğine varılmıştır.

BULGULAR

Bu bölümde çalışmanın katılımcılarının dörtgenlerin tanım ve özelliklerine dair var olan bilgilerini ölçmek amaçlı ilk oturumda sorulan sorulara dair elde edilen bulgular aşağıda belirtilen şekle göre paylaşılacaktır (Şekil 4). Verilen şekilde turuncu dikdörtgen ile araştırmanın 3 alt problemi göz önünde bulundurulmuştur. Bu alt problemlere yönelik ortaya çıkan alt bileşenler, her bir alt problemi temsil eden turuncu dikdörtgenin alt kısmında verilmiştir. Katılımcıların dörtgenler konusundaki ön bilgileri, öğrencilerin dörtgenlere yönelik tanımları ve öğrencilerin dörtgenlere ait özelliklerle ilgili ön bilgileri şeklinde belirlenmiştir. Dörtgenlerin hiyerarşik ilişki kurma sürecinde ortaya çıkan eylem ve durumlar kavramsal çerçevede yer alan 7 eylem olarak ele alınmıştır. Bu çalışmada özel olarak en çok ortaya çıkan eylem olan diyalog yoluyla matematik anlayışı geliştirme eyleminin alt bileşenleri de belirlenmiştir. 3. turuncu dikdörtgende ise ön bilgilerin sorgulama sürecine olan etkisi sunulmaktadır.



Şekil 4. Bulgular alt başlıklarının temsili gösterimi

Bu bölümde katılımcıların dörtgen çeşitlerini nasıl tanımladıkları incelenmiştir. Şekil 5'te her bir katılımcının dörtgen, yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve kare tanımlarına yer verilmiştir.

	Fulya	Hakan	Suna	Önder
Dörtgen	4 köşenin bileşiminden oluşan çizgiler bütünüdür.	4 kenarı ve 4 köşesi vardır. İç açılar toplamı 360 derecedir. Mesela 4 tane doğru parçamız olsun. Bunların her biri 4 farklı köşede kesişiyorlar. Ve bunlar kesişerek içeride bir alan oluşturuyorlar. Biz burada oluşan şekle dörtgen diyoruz.	4 kenarı 4 köşesi bulunan ve açıkta kalan tarafı olmayan kapalı şekillerdir.	4 tane doğru parçasının kesişmesinden oluşan şekildir.
Yamuk	Yamuk da dörtgen gibi hayali çizgilerden oluşan bir şekildir. Bu sefer yamukta paralellik sınırlandırması yok 2 çizgide. Yine aynı şekilde 4 köşe bulunmalı. Sadece paralellik kuralını kaldırıyoruz yine çok benziyor.	Sadece taban ve tavandaki kenarlar birbirine paraleldir. En fazla 2 açı kendi arasında eşit olabilir.	Alt ve üst kenarları paralel olan ve dik açı bulundurmak zorunda olmayan kapalı şekildir.	4 kenarı, 4 köşesi, 2 köşegeni olan her kenarı birbiri ile aynı uzunluğa sahip olmayan biçimsiz şekil.
Paralelkenar	Kareye çok benzeyen geometrik şekildir. 2 paralel çizginin karşı karşıya gelmesi ve onu 2 paralel çizginin kesmesi.	Karşılıklı bulunan her 2 kenar birbirine paralel ve karşılıklı açılar birbirine eşittir.	Karşılıklı kenarları birbirine paraleldir. Karşılıklı kenar uzunlukları birbirine eşittir. Dikdörtgenden tek farkı 90 derece bulundurmamasıdır.	İç açılar toplamı 360 derecedir. 4 kenar, 4 köşesi, 2 köşegeni vardır.
Eşkenar Dörtgen	Birbirine eşit çizgiler kullanmak zorundayız. Açıları 90 derece olmalı.	Bütün kenarları eşit olan paralelkenar olarak da adlandırılabilir. Karşılıklı ikişer açıları eşittir. Paralelkenarın daha da düzene sokulmuş hali olarak adlandırılabilir. Simetriktir.	Baklava dilimi gibidir. Uçurtma gibidir.	İç açıların toplamı 360 derecedir. 4 kenarı, 4 köşesi, 2 köşegeni vardır. Karşılıklı kenarlar paraleldir. Özel bir dörtgendir. Halk arasında baklava denir.
Dikdörtgen	2 uzun 2 kısa çizginin bileşimi gibi gelebilir insanın gözüne. Fakat bu çizgiler uyum içindedir.	Karşılıklı kenarları birbirine eşit ve bütün açıları 90 derece olan dörtgendir. Bütün kenarları eşit olursa kare olur. Bütün açıları 90 derece olduğu için karşılıklı kenarları paraleldir. Simetriktir.	Tüm açıları 90 derecedir. Karşılıklı kenarları eşit uzunluktadır. Köşegen uzunlukları eşittir ama birbirlerini dik kesmezler.	İç açıların toplamı 360 derecedir. Her bir açı 90 derecedir. 4 kenarı, 4 köşesi, 2 köşegeni vardır. Karşılıklı kenarlar paraleldir. Özel bir dörtgendir. 2 uzun 2 kısa kenarı vardır.
Kare	En kurallı, en emek gerektiren dörtgendir. Hem çizgiler aynı boyda hem açıları hem çizgilerin konumu. Hayatımızın her kısmında vardır.	Bütün kenarları eşit ve her açısı 90 derecedir. En çok kuralla sınırlanan şekildir. Simetriktir.	Tüm kenarları eşittir. Tüm açıları 90 derecedir. Köşegenler açıları 2 eşit parçaya böler. Köşegenler birbirini dik ekser ve eşit böler. Köşegenlerin oluşturduğu bütün üçgenler birbirine eşittir. Alanı bir kenar uzunluğunun karesidir.	İç açıları toplamı 360 derecedir. 4 kenarı, 4 köşesi, 2 köşegeni vardır. Karşılıklı kenarlar paraleldir. Her açısı 90 derecedir. Yüksekliği ile açıortay uzunluğu aynıdır. Açıortay uzunluğu köşegenleri ile aynı uzunluktadır.

Şekil 5. Öğrencilerin dörtgenlerin tanımlarına ve özelliklerine yönelik ön bilgileri

Şekil 5 detaylı olarak incelendiğinde, dörtgen için Fulya ve Önder köşegen ve kenarların birleşimini kullanarak benzer tanımlar yapmışlardır. Hakan köşe ve kenar bileşenlerinin yanı sıra bunun bir alan olduğuna değinmiş ve Suna da benzer şekilde oluşturulan alan derken kapalı şekil ifadesini kullanmıştır. Yamuk için Suna ve Hakan sadece alt kenar ile üst kenar paralelliğinden söz etmişlerdir. Ancak Hakan daha sonra sorgulama sürecine geçildiğinde sadece ifadesini kullanmamış en az 1 çift karşılıklı kenarın paralel olması durumunu ele almıştır. Fulya dörtgende koyduğu paralellik koşulunu, yamuğu tanımlarken kullanmamış; kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve paralelkenarda tekrar paralellik koşulunu getirmiştir. Önder, dörtgen ve yamuk tanımını aynı şekilde yapmıştır. Paralelkenar tanımı için Suna, Hakan ve Fulya karşılıklı kenarların paralel olması gerektiğini belirtmiş ancak Suna özel olarak paralelkenarın açılarının 90^o olamayacağını da ifade etmiştir. Önder, paralelkenar tanımı için dörtgen ve yamuk tanımından farklı bir tanım yapmamıştır. Eşkenar dörtgen tanımı için Hakan, bütün kenarları eşit olan paralelkenar ifadesini kullanmıştır. Hakan burada kapsayıcı tanım yaparak aslında hiyerarşik ilişkiden bahsetmiştir.

Suna, eşkenar dörtgeni baklava dilimi ve uçurtma şekli olarak tanımlamıştır. Ancak sorgulama sürecinde Suna, eşkenar dörtgenin kenar uzunluklarının eşit olmadığı fikrini savunmuştur. Önder, şimdiye kadar yaptığı diğer tanımlardan farklı olarak karşılıklı kenarların paralel olmasını eklemiştir. Fulya da kenar uzunlukları eşit ve karşılıklı kenarları paralel olan dörtgen diyerek Hakan ile benzer bir tanım yapmıştır. Dikdörtgen tanımı için Hakan, bütün kenar uzunlukları eşit olursa kare oluşacağını belirtmiştir. Hakan burada kapsayıcı tanım yaparak hiyerarşik ilişkiyi fark etmiştir. Önder, diğer dörtgenlerden farklı olarak 2 uzun 2 kısa kenarı vardır diyerek hariç tutan tanım yapmıştır. Suna ve Fulya dikdörtgen tanımı için benzer tanımlar yapmış ancak Suna iç açılarının 90 derece olması gerektiğini de eklemiştir. Kare için Suna, Hakan ve Önder en çok özellik taşıyan şekil olduğunu belirtip karenin özelliklerine yer vermişlerdir. Fulya, kare için de matematiksel bir tanım yapmayarak dörtgen ve çeşitleri için matematiksel tanımlar yapmamıştır. Ancak sorgulama süreci boyunca matematiksel tanımlara yer vermiştir. Başlangıçta Suna ve Önder ile benzer olarak hariç tutan tanımlara yer vermiştir. İlerleyen süreçte fikrini değiştirip kapsayıcı tanımlara yer vererek Hakan ile benzerlik göstermiştir.

Dörtgenlerin Hiyerarşik İlişki Kurma Sürecinde Ortaya Çıkan Eylemler ve Durumlar

Bu bölümde, katılımcıların dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisini kurma sürecinde ortaya çıkan durum ve eylemler benimsenen kavramsal altyapı başlıkları altında tartışılacaktır. Aşağıda verilen Şekil 6'da, tüm süreç boyunca belirlenen eylemler ve hangi oturumda kaç tane bu eylemlerden ortaya çıktığının sayıları verilmiştir. Şekil 6'da da görüldüğü gibi en çok diyalog yoluyla matematik anlayışı geliştirme eylemi görülürken en az matematikçiler gibi matematik yapma eylemi görülmüştür. Sorgulama sürecinde sorgulama prosedürlerinin gözden geçirilmesi eylemine hiç rastlanmamıştır.

	Diyalog Yoluyla Matematik Anlayışı Geliştirme	Öğrencilerin Gruplar Halinde Çalışması	Kendini Düzeltme-Hataları Gözden Geçirme	Topluluk Üyelerinin Risk Alması	Alternatif Yaklaşımlar Önerilmesi Ve Geliştirilmesi	Sorgulama Prosedürleri nin Gözden Geçirilmesi	Matematikçiler Gibi Matematik Yapma
1. Oturum	79	24	9	28	3	-	-
2. Oturum	57	18	5	24	2	-	-
3. Oturum	56	15	9	23	2	-	-
4. Oturum	34	11	7	27	-	-	2
5. Oturum	39	13	8	27	-	-	-
6. Oturum	33	6	5	13	1	-	-
Toplam	298	87	43	143	8	-	2

Şekil 6. Sorgulama eylemlerinin ortaya çıkma durumları

1. Diyalog Yoluyla Matematik Anlayışı Geliştirme

Bu çalışmada, veri analizi sürecinde diyalog aracılığıyla matematik oluşturma olarak belirlenen bölümlerde alt bileşenler ortaya çıkmıştır. Bu alt bileşenler (1) tanımlama yapma, (2) bilginin anlaşılması, (3) karşılaştırma, (4) onaylama, (5) bilginin sentezlenmesi, (6) fikir önerme, (7) soru-cevap, (8) örnek verme ve (9) bilginin yorumlanması şeklinde bulunmuştur. Şekil 7'de bu alt bileşenlerin içeriğine göre oluşturulan tanımlar verilmiştir. Bu alt bileşenlerin hepsi öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtlara karşılık, sorgulama yapma sürecinde ortaya çıkan sorgulama eylemleri olarak ele alınmıştır. Bu eylemler görüşme sırasında sorulan sorular çerçevesinde tanıtılmıştır.

Tanımlama yapma	Öğrencilerin diyalog sürecinde matematiksel kavramların tanımlarını kullanma durumlarını içermektedir.
Bilginin anlaşılması	Verilen soruda yer alan matematiksel durum ve kavramların anlaşılması ve bunların ifade edilmesi şeklinde belirlenmiştir.
Karşılaştırma	Yapılan tanımların farklı ya da benzer yönlerinin kıyaslanması ile özelliklerin birbiri ile ilişkileri veya kıyaslanması olarak ortaya çıkan durumları içermektedir.
Onaylama	Öğrencilerin birbirlerinin fikirlerini desteklemeleri şeklinde belirlenmiştir.
Bilginin sentezlenmesi	Yapılan tanımların birleştirilmesi, verilen ya da ifade edilen özelliklerin birleştirilmesi şeklinde tanımlanmıştır.
Fikir önerme	Sorgulama sürecinde ifade edilen konu hakkında yeni bir bilgi, özellik ortaya atılmasını içermektedir.
Soru-cevap	Diyalogun sorular aracılığıyla devam etmesi durumunda ortaya çıkan eylemleri kapsamaktadır.
Örnek verme	Özellikleri ya da kavramlar hakkında örnekler yardımıyla matematiksel anlayışa katkı sağlanan durumları içermektedir.
Bilginin yorumlanması	Ortaya çıkan fikirlerin ilişkisinin kurulması, özelliklerin değerlendirilmesi sürecindeki eylemleri tarif etmektedir.

Şekil 7. Diyalog eyleminin alt bileşenleri

1.1 Tanımlama Yapma

Bu bileşenin diyalog eyleminin alt bileşeni olarak belirlenmesinin sebebi diyaloğun, matematiksel sorgulama topluluğundaki öğrencilerin ortak bir şekilde kendi anlamlarını oluşturdukları dinamik bir ortam olmasıdır. Bu bileşende, katılımcıların matematiksel kavramların tanımlarının yapılması ve verilen soru ile ilişkilendirilen diğer kavramların tanımlamalarının yapılmasına yer verdiği durumlar ele alınmıştır. Öğrenciler doğrudan tanım sorulan sorularda tanımlama yaparken, aynı zamanda diğer sorularda da argümanlarını desteklemek, bir fikri çürütmek ya da sorgulama sürecini devam ettirmek için tanım yapma ihtiyacı duymuşlardır.

Dörtgen nedir sorusuna karşılık sorgulama sürecinde Fulya, Hakan, Suna ve Önder tanımlarını oluşturmak için birbirlerinin argümanlarını destekleyerek ya da karşı çıkarak ortak diyalog süreci oluşturmuşlardır. Bu süreçte aralarında şöyle bir diyalog geçmiştir:

Fulya: *4 köşenin bileşiminden oluşan çizgiler bütünüdür.*

Hakan: *En az iki karşılıklı kenarı paraleldir.*

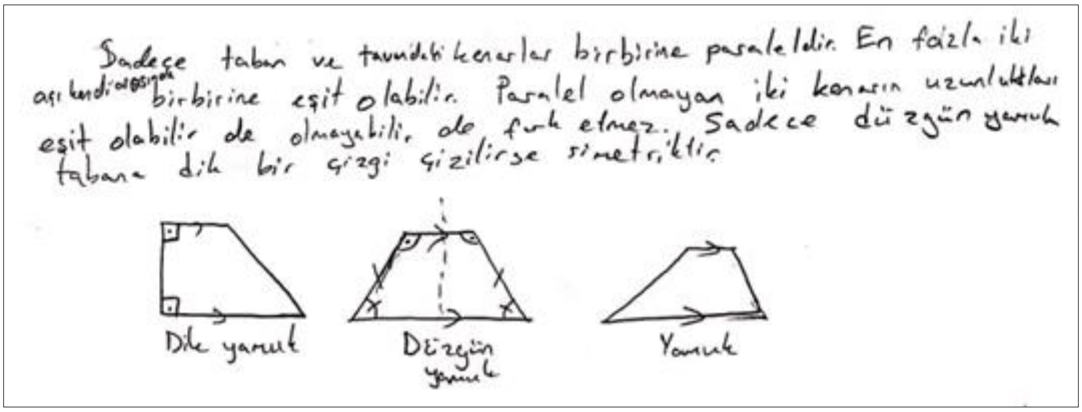
Önder: *İç açılarının toplamının 360 olması. İki tane köşegen olması lazım.*

Hakan: *Her kenar iki tane kenarla bir köşe oluşturuyor. O zaman hepsi birbirine bir şekil oluşturarak bağlanıyorlar. Kapalı bir şekil oluşturuyorlar.*

Suna: ***Aslında Hakan ve Fulya'nın dediğini birleştirirsek** 4 köşede her biri 2 köşe oluşturacak şekilde bir şeklin kapanması diyebiliriz. Her bir doğru parçası 2 köşeye gelecek şekilde şekil oluşturmasıdır.*

Öğrenciler, yukarıda görüldüğü gibi dörtgen tanımının inşa edilmesi için ortak bir çaba göstermişlerdir. Sonrasında Önder de özellik ilave ederek ortak bir tanım oluşturmaya çalışmışlardır. Öğrenciler bu şekilde fikirlerini sentezleyerek ortak bir biçimde kendi anlamlarını oluşturdukları bir dinamik ortam yaratıkları için bu kısımlar diyalog eylemi olarak ele alınmıştır.

Yamuğu tanımlama sorusuna karşılık Hakan cevap kağıdında sadece 2 karşılıklı kenarın paralel olması gerektiğini yazmasına rağmen (Şekil 8) bu soruyu arkadaşlarıyla tartıştığı süre boyunca en az 1 çift karşılıklı kenarın paralel olmasını savunmuş ve en az ifadesini tanımına eklemiştir.

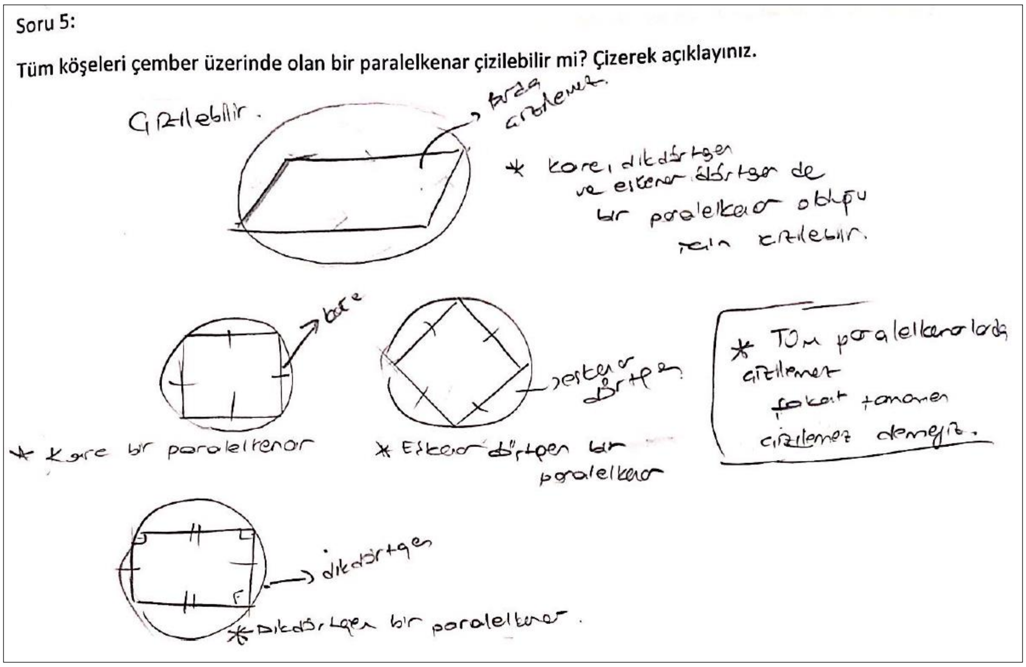


Şekil 8. Hakan'ın yamuk tanımı

1.2. Bilginin Anlaşılması

Diyalog eyleminin 2. Alt bileşeni olan bilginin anlaşılması, verilen soruda yer alan matematiksel durum ve kavramlara dair var olan bilginin anlaşılması ve bu bilginin ifade edilmesi şeklinde belirlenmiştir.

Önder ve Suna bütün noktaları çember üzerinde olan bir paralelkenar çizilemeyeceğini çünkü bir noktanın mutlaka dışarıda kaldığını belirtmişlerdir. Buna karşılık Hakan ve Fulya ise kare ve dikdörtgeninin de bir paralelkenar olduğunu dolayısıyla paralelkenarın çizilebileceğini belirtmişlerdir. Şekil 9'da görüldüğü gibi Fulya, özel dörtgenleri çember içine yerleştirerek bu önermeyi sağlayan dörtgenleri bulmuştur. Kare, eşkenar dörtgen ve dikdörtgen aynı zamanda bir paralelkenar olduğundan önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Fulya, burada matematiksel kavramları ilişkilendirmiştir. Önder ve Suna, tanımları hariç tuttuklarından kare ve dikdörtgenin çizilebileceğini ancak paralelkenarın çizilemeyeceğini belirtmişlerdir. Hakan, sorgulama sürecinde gerekçesiyle birlikte bu şekillerin neden çizilebileceğini açıklamıştır. Topluluk üyeleri diyalog sayesinde matematiksel fikirleri ilişkilendirip derinlik kazanmaya çalışmışlardır. Öğrenciler tüm köşeleri çember üzerinde olan bir şekil çizilemeyeceğini ya da hangi şekillerin çizilebileceğini nedenleriyle açıklamışlardır. Yani bilgiyi inşa ettikleri için bu kısım diyalog eylemi altında incelenmiştir.



Şekil 9. Fulya'nın 5. soruya yönelik cevabı

Araştırmacı:	*Tüm köşeleri çember üzerinde olan bir paralelkenar çizebilir miyiz?*
Önder:	*Ben çizemeyiz dedim.*
Araştırmacı:	*Neden çizemeyiz dedin?*
Önder:	***Hocam çizdiğim zaman sadece üst tarafı düşünelim üst taraftan başlarsak köşeleri birleşiyor ama alt köşeler dışarıda kalıyor ya da çemberin içinde kalıyor. Aynı şekilde alt taraftan başlarsak bu sefer üst taraftakiler birleşmiyor. Bu yüzden çizemeyiz.***
Araştırmacı:	*Önder çizemeyiz dedi.*
Suna:	*Devam edebilir miyim hemen bu fikrin arkasından. Çizemem dedim çünkü denedim mutlaka en fazla üç köşe çemberin üzerinde olabiliyor ya bir tanesi çemberin içinde kalıyor ya da dışında kalıyor. Ama ne olursa olsun boşta kalıyor.* ***Kare eşkenar dörtgen dikdörtgen yamuk çizilebiliyor onları da denedim ama paralelkenar çizilmiyor.***
Araştırmacı:	*Paralelkenar çizemem ama kare yamuk eşkenar dörtgen dikdörtgen çizebilirim diyorsun.*
Fulya:	*Kendi tanımına göre nasıl çizdin?*
Suna:	*Çizdim ben.*
Fulya:	*Köşelerinin hepsi değiyor öyle mi?*
Hakan:	*Şöyle yapılabilir.*
Fulya:	*Ama senin tanımına göre bence zaten yamuk çizilebilir.*
Suna:	*Bak bir.(Şekil üzerinde gösteriyor)*
Araştırmacı:	*Fulya sen ne diyorsun?*
Fulya:	***Ben zaten kare dikdörtgen eşkenar dörtgenin bir paralelkenar olduğunu düşündüğüm için bu şekiller çizilebilir.***
Araştırmacı:	*Hakan sen ne düşünüyorsun?*
Hakan:	*Ben şimdi açıklayarak bir şey yapmak istiyorum. Çünkü siz büyük ihtimalle şey diyeceksiniz dikdörtgen ve kareyi nasıl çizebiliriz diye büyük ihtimalle soracaksınız ben direkt anlatmaya başlayayım.* ***O merkezli bir çemberimiz olsun. Bir çapımız olsun bu çapa alt ve üst tarafta x mesafede olan 2 tane kenar çizelim. Bu kenarları sol taraflarından ve sağ taraflarından birleştirince başlangıçtaki çizgiler zaten simetriden dolayı eşit olacak. O zaman çizdiğimiz kenarlarda birbirine eşit olacak 90 derece olacak böyle olunca bir dikdörtgen bazen bir kare oluyor ve baktığımız zaman dikdörtgende paralelkenardır. Bu sebepten dolayı paralelkenar çizilebilir.***

Karşılaştırma

Öğrenciler, tanımlarını karşılaştırarak birbirlerinin fikirlerinin neden farklılaştığını ya da fikirlerini neden desteklediklerini açıklamışlardır. Özellikle başlangıçta öğrencilere doğrudan tanımları nedir şeklinde yöneltilen sorularda tanım karşılaştırması daha çok yapılmıştır. En fazla tanım karşılaştırılması yapılan soru bir yamuk sorusudur. Tüm kenarları birbirine dik ve eşit olan dörtgen her zaman yamuktur sorusunda her zaman bu durumun sağlanıp sağlanmadığını göstermek için öğrenciler sık sık karşılaştırmaya başvurmuşlardır. Tanımların karşılaştırılması aynı zamanda dörtgenler arasındaki tanım farklılıklarını da dile getirilerken kullanılmıştır.

Diyagrama göre yamuk olduğunu düşündüğünüz şekilleri belirleyiniz sorusuna karşılık öğrenciler ikiye bölünmüştür. Hakan ve Fulya, diyagramda yer alan bütün şekillerin yamuk olduğunu belirtirken Önder ve Suna, sadece 3 şeklin yamuk belirttiğini söylemişlerdir. Hakan, iki grubun yamuk tanımlarını karşılaştırarak sebebin tanım farklılığı olduğunu belirtmiştir. Suna, tanımlarının farklı olduğunu kendi yamuk tanımına göre sadece 1 çift kenarın paralel olması gerektiğini ama Hakan ve Fulya'nın tanımında en az 1 çift kenarın paralel olma koşulu olduğunu belirtmiştir. Bu süreçte aralarında şöyle bir diyalog geçmiştir:

Araştırmacı: *Şimdi ikiye iki bölündünüz. Bir grup diyor ki 3,9 ve 11 yamuktur diğer grup diyor ki şekillerin hepsi yamuktur. Ne olacak bu durumda?*

Hakan: *Tanımdan dolayı böyle.* ***Onlar diyor ki sadece bir çift paralellik olacak.***

Suna: *Tanımlar farklı, farklı şekiller. Bizim kafamızda oluşturduğumuz şekiller sadece onlara yöneliyor. Mesela ben bu 4 numaralı şekli görünce sadece aklıma kare geliyor yamuk olduğu aklıma gelmiyor.*

Hakan: ***Kafamızda sadece kare oluşması onun yamuk olmadığını mı gösteriyor?***

Suna: *Ama şimdi şöyle bir şey var.* ***Sen diyorsun ya en az iki kenarı birbirine paralel olacak diye bendeki yamuk tanımı sadece alt ve üst kenarın birbirine paralel olması. Siz diyorsunuz ki en az 1 çift kenarı paralel olan ama ben diyorum ki sadece bir karşılıklı kenarları paralel en az değil.***

Hakan: *Evet, işte fark o.*

Sorgulama sürecinde öğrenciler, iki farklı gruplama yapmışlardır. Bu farklılığın nedeninin tanım farklılıkları olduğunu fark etmişler ve diyalog sayesinde yeniden tanımlama yapıp tanımların farklı yönlerini ifade etmişlerdir. Şekilleri gruplandırırken ortaya çıkan farklılıklar öğrencilerin tekrardan tanıma dönmelerine sebep olmuştur. Tanımlarını şekillere aktardıkları için yani bilginin dönüşümü gerçekleştiğinden dolayı bu kısım diyalog eylemi altında incelenmiştir.

Fikir Önerme

Fikir önerme, sorgulama sürecinde ifade edilen konu hakkında yeni bir bilgi veya özellik önerilmesi şeklinde tanımlanmıştır. Eşkenar dörtgen nedir sorusuna karşılık Hakan, bütün kenarları birbirine eşit ve karşılıklı kenarları birbirine paralel olan, karşılıklı açıları birbirine eşit olan dörtgen eşkenar dörtgendir demiştir. Açılar 90 derece olmayacak diye eklemiştir.

Hakan: *Aslında şöyle bir şey oluşturabiliriz.* ***Yamuğun özelliklerini barındıran bir küme, şurada paralelkenar var, şurada bir dikdörtgen ve eşkenar dörtgen var. Bu ikisinin kesişim noktasında ise kare var.***

Suna: *Ben bir şey söylemek istiyorum. Eşkenar dörtgenle ilgili. Tamam bunun bütün kenarları eşit de olabilir ama olmayabilir.*

Araştırmacı: *Eşkenar dörtgenin mi?*

Suna: *Evet.*

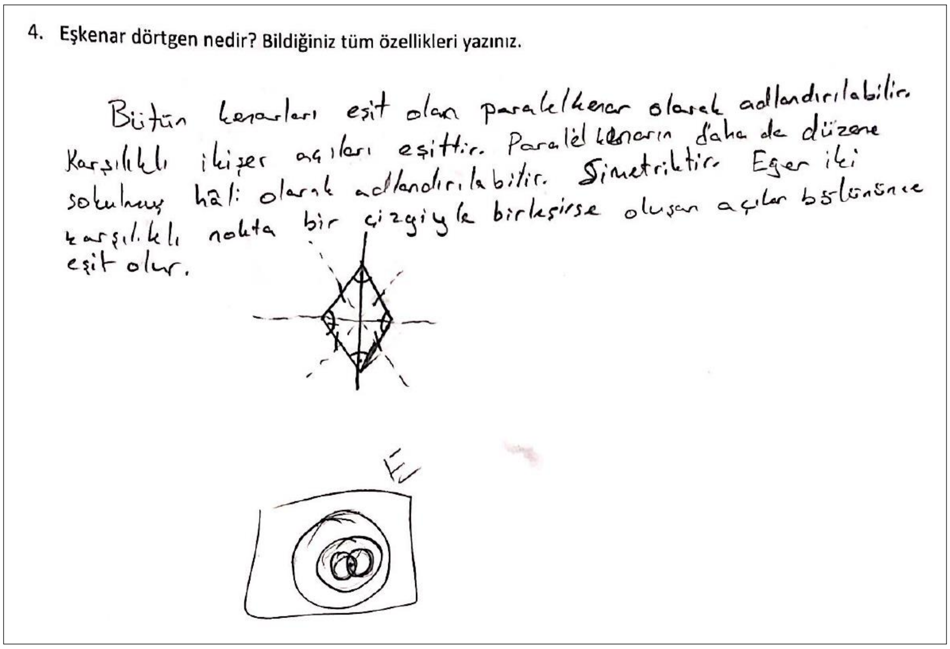
Hakan: *O zaman paralelkenardan ne farkı oluyor?*

Suna: *Bak şimdi, ben şöyle diyorum üstü daha kısa olsun, altını kısa yapayım.*

Hakan: *O zaman bütün kenarlar paralel de olmuyor.*

Fulya: *Eşkenar dediği için bütün kenarlar eşit olur.*

Sorgulama sürecinde Hakan, şekillerin birbirine dönüşebileceğini fark edip şekilleri ayırmaya çalışmıştır. Eşkenar dörtgenin iç açıları 90 derece olduğunda kareye dönüştüğünü süreçte fark ettiği için bu koşulu getirmiştir. Bununla birlikte sorgulama sürecinde Hakan, dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisini gösteren bir küme çizerek bir fikir önermiştir (Şekil 10). Hakan bilgiyi sentezleyip yapılandırdığından dolayı bu kısım diyalog eylemi altında incelenmiştir.



Şekil 10. Hakan'ın eşkenar dörtgen ve özelliklerine yönelik cevabı

Bilginin Sentezlenmesi

Bilginin sentezlenmesi, dörtgenlere ait yapılan tanımların veya verilen ya da üzerinde durulan özelliklerin birleştirilmesi şeklinde ele alınmıştır. Tüm kenarları birbirine eşit olan dörtgen her zaman eşkenar dörtgendir önermesine karşılık Suna, ifadenin yanlış olduğunu başka dörtgenlerin de bu koşulu sağlayabileceğini, sadece kelimesinin ifadeyi yanlış yaptığını belirtmiştir. Bu süreçte araştırmacı ile aralarında şöyle bir diyalog geçmiştir:

Suna: *Tüm kenarları birbirine eşit olan dörtgen her zaman eşkenar dörtgendir demiş.* ***Ben yanlış dedim, kare de olabilir, eşkenar dörtgen de olabilir. Hatta paralelkenar da olabilir bazı durumlarda. Eşkenar dörtgen diyemeyiz.*** *Benim düşünceme göre eşkenar dörtgenin tüm kenarları eşit olmak zorunda değil. Tabi üstteki 2 tane ve alttaki 2 tane kendi içinde eşit olmak zorunda ama bunlar eşit olmak zorunda değil diye biliyorum. Bunun yanında Hakan diyecek ki kare bir eşkenar dörtgendir.*

Araştırmacı: *Peki, sen neden bu düşünceye karşı çıkıyorsun?*

Suna: *Aslında düşünceye kapalı gibi gözüküyor ama* ***biz hepsine dörtgen diyoruz ve hepsinin ortak özellikleri var ama bunların hepsi ayrık kümeler. Kesişim kümeleri var ama Hakan kesişim kümeleri alt küme olarak alıyor.***

Araştırmacı: *Sen nasıl alıyorsun?*

Suna: *Ben kesişim kümesi olarak alıyorum.*

…

Hakan: *Evrensel küme dörtgenler olmuş oluyor.*

Suna: *Tamam, tabi ki de canım. Hakan burada diyor ki eşkenar dörtgen ve dikdörtgenin kesişimi karedir. Ben diyorum ki hepsi birbirine bağlı ama hiç biri birbirinin alt kümesi değildir.*

Sorgulama sürecinde Suna, dörtgenleri hariç tutan tanımlara göre ifade etmiştir. Suna, bunun yanında Hakan'ın ifadeyi nasıl yorumlayacağını da söylemiştir. Suna, diyalog aracılığıyla Hakan'ın ve kendinin ortaya attığı dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisini gösteren kümeleri karşılaştırmıştır. Yapılan sorgulamalar sonucunda Suna, dikdörtgen ve eşkenar dörtgenin kesişmesiyle karenin ortaya çıktığını belirtmiştir. Suna, matematiksel anlamını oluşturmak için daha önce Hakan'ın ifade ettiği kümeler üzerinden içeriği anlayıp bilgiyi yapılandırmıştır. Burada dikdörtgen ve eşkenar dörtgenin ortak özelliklerinin kare belirttiğini ifade ederek bilgiyi sentezlediğinden bu kısım diyalog eylemi altında incelenmiştir.

Örnek Verme

Örnek verme, özellikler ya da kavramlar hakkında örnekler yardımıyla matematiksel anlayışa katkı sağlama olarak tanımlanmıştır. Önder, yamuk tanımında her kenar uzunluğunun birbirinden farklı olması gerektiğine değinmiştir. Bunun üzerine Hakan ve Suna örnek vererek böyle bir koşul olmadığını ifade etmiştir. Bu süreçte aralarında şöyle bir diyalog geçmiştir:

Önder: *4 kenarı olan 4 köşesi olan 2 köşegeni olan her kenarı birbiriyle aynı uzunluğa sahip olmayan dörtgendir.*

Araştırmacı: *Olmak zorunda mı?*

Suna: *Değil.*

Hakan: *Hayır.*

Araştırmacı: *Neden? Neden aynı olabilir? Neden farklı olmalı?*

Hakan: *Çünkü kenarla ilgili bir kısıtlama yok. Kenar uzunluğu ile ilgili.* ***Mesela dik yamuğun üst kenarı ile yan kenarı birbiri ile eşit uzunlukta olabilir.***

Suna: ***Dik olmasa da üst kenar ve yan kenar birbiri ile eşit olabilir. Ya da yan kenarlar birbiri ile eşit olabilir.*** *Biz alttakine en uzun diyoruz ama tabi bakış açımıza göre değişir ama diğerlerinin eşit olmama gibi bir zorunluluğu yok ki.*

Sorgulama sürecinde, topluluk ile yapılan sorgulamalar sayesinde öğrencilerin varsayımları değerlendirmelerini sağlamaktadır. Araştırmacının kenar uzunluklarının neden aynı ya da farklı olacağını sorması öğrencilerin fikirlerini gerekçelendirmelerini sağlamıştır. Bu süreçte kendi argümanlarını desteklemek için örneklerden yararlanmışlardır. Bu sayede öğrenciler matematiksel anlamlarını derinleştirmişlerdir. Önder'in kenar uzunluklarının farklı olması argümanına karşılık Suna ve Hakan kenar uzunluklarının aynı olabileceği biçimde örnek vererek kendi argümanlarını desteklemişlerdir. Bu örnekler sayesinde Önder'in argümanını çürütmüşler ve dolayısıyla bu kısım diyalog eylemi altında incelenmiştir.

Bilginin Onaylanması

Onaylama, öğrencilerin birbirlerinin fikirlerini desteklemeleri şeklinde tanımlanmıştır. Sorgulama topluluğunda akran grupları birlikte yapılan matematiksel sorgulama, öğrencilerin fikirlerini değerlendirmelerini ve kimi zaman da ortak fikre sahip olmalarını sağlamaktadır.

Karşılıklı kenarları paralel olan ve 2 tane dar, 2 tane geniş açıya sahip olan dörtgen sadece paralelkenardır önermesine karşılık Fulya, sadece paralelkenar olduğunu düşünmediğini, yamuğun da olabileceğini söyledikten sonra Suna, Fulya'yı onaylayarak kendini ifade etmiştir. Bu süreçte aralarında şöyle bir diyalog geçmiştir:

Fulya: *Sadece paralelkenar olduğunu düşünmüyorum, yamuk da olabilir.*

Suna: ***Sadece paralelkenar demek yanlış olur.*** *Çünkü bu ifadeyi yanlış yapan sadece kavramıdır. Yoksa biz zaten paralelkenarda dedik bunları. Karşılıklı kenarları paralel, 2 dar 2 geniş açısı var dedik. Ama bunun yanında eşkenar dörtgen de olabilir ve eğer sadece 1 karşılıklı kenarları paralel kastediyorsa yamuğu da alabiliriz. Ama tüm karşılıklı kenarları diyorsa yamuğu alamayız. Bu kadar. Bu ifade yanlıştır.*

Hakan: ***Galiba Suna ile ilk defa aynı cevabı veriyoruz.*** *Ama tek fark yamuk kesinlikle olabilir. Eşkenar dörtgen de olabilir yamuk da olabilir paralelkenar da olabilir.*

Sorgulama sürecinde, öğrenciler önermede yer alan sadece kelimesinden dolayı önermenin yanlış olduğunu belirtmişlerdir. Suna, önermenin yanlış olduğunu ifade ettikten sonra diyalog aracılığıyla nedenlerini açıklamıştır. Hakan, Suna ile aynı cevabı verdiğini sadece yamuk konusunda Suna'ya katılmadığını belirtmiştir. Hakan sorgulama süreci sayesinde, Suna'nın fikrini değerlendirip düşüncesini yapılandırarak kavramsal bilgisini derinleştirmeye çalışmıştır. Fulya'nın yamuk da olabilir ifadesine karşılık Suna da sadece paralelkenar ifadesinin yanlış olduğunu, yamuk olabileceğini belirtmiştir. Hakan, Suna'nın açıklamalarından bazı noktalarda farklılıklar olmasına rağmen ortak bir fikri kabul edip birbirlerinin düşüncesine katıldıklarından dolayı bu kısım diyalog eylemi altında incelenmiştir.

Bilginin Yorumlanması

Bilginin yorumlanması, ortaya çıkan fikirlerin ilişkisinin kurulması, özelliklerin değerlendirilmesi şeklinde tanımlanmıştır. Sorgulama sürecinde, öğrenciler diyagramlarını oluştururken temel aldıkları bilgileri diyalog aracılığıyla açıklamışlardır. Öğrenciler, sorgulama süreci boyunca yapılandırdıkları tanımları temel alarak diyagramlarını oluşturmuşlardır. Diyagram oluşturarak dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisini fark etmeleri beklenmiştir. Öğrenciler dörtgenlerin kapsayıcı tanımlarını temel alarak diyagramı oluştururken zorluk çekmemişlerdir.

Araştırmacı: *Eşkenar dörtgene geçtim.*
Fulya: *4-5-10-14 eşkenar dörtgendir*
Hakan: *Evet.*
Suna: *5-10-14.*
Önder: *5-14.*
Araştırmacı: *Yanıtlarınız arasında farklılıklar var. Önce 4. Şekli ele almak istiyorum. 4 neden eşkenar dörtgendir? Neden değildir?*
Hakan: ***4 ün bütün kenarları eşit.***
Fulya: ***Karşılıklı kenarları paraleldir.***
Suna: ***O zaman 4. Şekli de dahil edebiliriz.***
Fulya: *Ben de aynı şekilde karşılıklı kenarları paralel tüm kenarları eşit olma zorunluluğu var. 90 derece olmak zorunda değil. Olabilir de olmayabilir de.*
Araştırmacı: *Neden 4. Şekli dahil etmedin Önder?*
Önder: ***Şimdi aynısı da eşkenar dörtgende her bir iç açısı 90 derece olmak zorunda değil. 30-150 de olabilir. O yüzden ben buna kare dedim. Ortak olarak 4 ü hem eşkenar dörtgen hem kare diye alabilir miyiz?***
Fulya: *Onu soruyor zaten.*

Öğrenciler diyagram olarak aynı şekli oluşturmalarına rağmen nasıl oluşturduklarını anlatırken farklı şekilde düşündükleri ortaya çıkmıştır. Bunun sebebi tanımların farklı olmasından kaynaklanmaktadır. Öğrenciler diyagramlarını tanıtırlarken daha önce ortaya çıkan fikirlerin ilişkisini kurup, özellikleri değerlendirdiklerinden dolayı bu kısım diyalog eylemi altında incelenmiştir.

Soru-Cevap

Soru- cevap, diyalogun sorular aracılığıyla devam etmesi şeklinde tanımlanmıştır. Matematiksel sorgulamaların devam edip bilginin derinlik kazanması için sorulan sorular çok önemlidir. Suna, eşkenar dörtgende bütün kenar uzunluklarının eşit olup olmadığını merak ettiğini söylemiştir. Bunun üzerine öğrenciler arasında şöyle bir diyalog geçmiştir:

Suna: *Gerçekten merakımdan soruyorum. Alt kenarlar eşit üst kenarlar eşit.* ***Ama bu bir eşkenar dörtgen mi?***
Araştırmacı: *Bir şey merak ediyorum burada. Dedinki paralellik kayboluyor.* ***Peki, eşkenar dörtgen ile paralellik arasında nasıl bir ilişki var?***
Suna: *Ama paralellik kaybolmayabilir.*
Araştırmacı: *Nasıl kaybolmaz. Ya da hangi durumda kaybolmaz?*
Suna: *Şunların toplamı 180 derece olursa.*
Araştırmacı: *Peki, birinci oturumda şöyle bir bilgi geçmişti. Dörtgenin iç açıları toplamı 360 derecedir. O zaman bu durum doğrudan bunu sağlamaz mı?*
Hakan: *Evet, paralel olur. 180 180 paralellik var.*
Fulya: *Karşılıklı açıları birbirine eşit olduğu için.*
Hakan: *Aynen.*
Suna: *Evet, aslında sağlıyor.*

Cobb ve arkadaşları (1991) öğrenme, öğrenciler akranlarıyla aktif olarak müzakere ederek anlam kazanmaya çalıştıklarında meydana gelir demiştir. Yukarıdaki diyalogda da görüldüğü gibi öğrenciler Suna'nın eşkenar dörtgenin kenar uzunlukları hakkındaki belirsizliğini sorular sorarak ve müzakere ederek yeniden yapılandırmışlardır. Suna, sorgulama süreci sayesinde eşkenar dörtgenin kenar uzunluklarının eşit olmadığı durumda paralellik koşulunun bozulduğunu fark etmiştir. Bu farkındalıkla eşkenar dörtgenin tüm kenar uzunluklarının eşit olması gerektiğini öğrenmiştir. Eşkenar dörtgenin kenarları arasındaki ilişkiyi açığa çıkarabilmek için sorular sorulduğundan dolayı bu kısım diyalog eylemi altında incelenmiştir.

İşbirlikçi Problem Çözme

Öğrenciler, matematiksel problemleri çözmek için gruplar halinde çalışmışlar, çözüm yollarını geliştirmişler ve daha sonra oluşturdukları çözümleri sunarak eleştirel bir biçimde fikirlerini değerlendirmişlerdir. Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgen her zaman paralelkenardır önermesinde Önder, fikrini belirttikten sonra Suna devam etmiştir. Bu süreçte aralarında şöyle bir diyalog geçmiştir:

Önder: *Yanlış çünkü Tüm dörtgenlerin karşılıklı kenarları paralel ama bazı özel şekillerin, yamuğun böyle bazı özel şekilleri var hocam, mesela bunların hiç biri paralel değil birbirine.*

Suna: *Tüm paralelkenarların her zaman karşılıklı kenarları paraleldir. Bu doğru ifade olur. Burada verilen ifade kesinlikle yanlıştır,* ***Önder'in dediği gibi.*** *Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgen her zaman paralelkenardır. Bu başka bir şey de olabilir. Dikdörtgen, kare, eşkenar dörtgen ya da dediği gibi yamuk da olabilir.*

Sorgulama sürecinde yapılan sorgulamalar da öğrenciler bazen birbirlerinin fikirlerine karşı çıksalar da bazı durumlar da bu fikirleri desteklemişlerdir. Suna, "Önder'in dediği gibi" diyerek açıklamasını yapmıştır. Suna'nın kullandığı bu ifadeden dolayı bu kısım işbirlikçi problem çözme eylemi altında incelenmiştir.

Hatalarını Gözden Geçirme- Kendi Kendini Düzeltme

Öğrenciler topluluk içerisinde matematiksel fikirlerini tartıştıklarında, bir açıklamanın fikirlerini değiştirecek kadar iyi olup olmadığına karar vermeleri gerekmektedir. Fikirler arasındaki bir çatışma diyalog yoluyla çözüldüğünde, kendi kendini düzeltme eylemi gerçekleşmiş olmaktadır. Eşkenar dörtgen nedir sorusunda sorgulama süreci devam ederken Suna, eşkenar dörtgenin tüm kenar uzunluklarının eşit olmak zorunda olmadığını belirtmiştir. Bu süreçte öğrenciler arasında şöyle bir diyalog geçmiştir:

Suna: *Ben bir şey söylemek istiyorum. Eşkenar dörtgenin bütün kenarları eşit de olabilir ama olmayabilir de.*

Hakan: *O zaman paralelkenardan ne farkı oluyor?*

Suna: *Bak şimdi, ben şöyle diyorum üstü daha kısa olsun, altını kısa yapayım.*

Hakan: *O zaman bütün kenarlar paralel de olmuyor.*

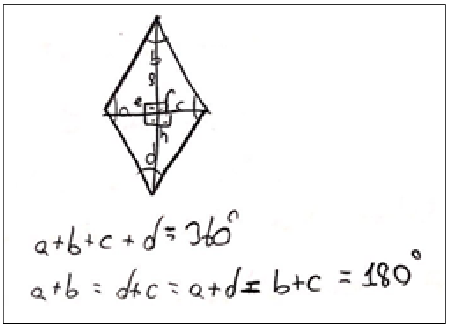
Fulya: *Eşkenar dediği için bütün kenarlar eşit olur.*

Suna: ***Evet, paralellik bozuldu.***

Hakan: ***Evet.***

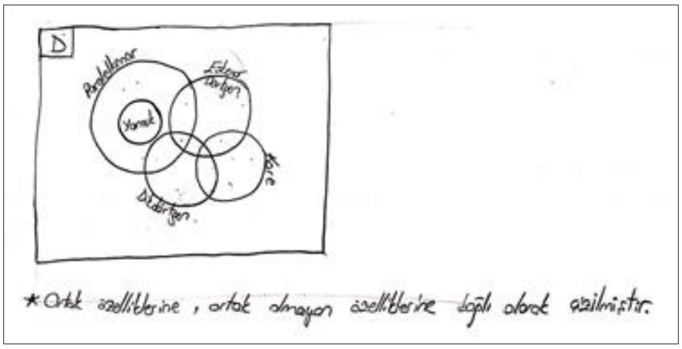
Suna: ***Bütün kenarlar birbirine eşittir.***

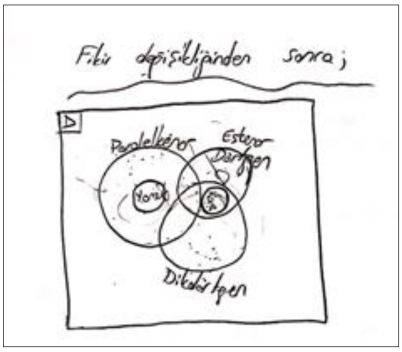
Öğrenciler, sorgulama sayesinde sahip oldukları bilgiyi yeniden yapılandırırlar. Suna, sorgulama sürecinde Şekil 11'de görüldüğü gibi kenar uzunluklarını alt kenarlar ve üst kenarlar şeklinde kodlayıp ikili olarak eşit olduklarını ama bu ikililerin birbirinde farklı olabileceğini söylemiştir. Bunun üzerine Hakan, paralellik durumunun bu şekilde bozduğunu söyleyince Suna fikrini değiştirdiğinden dolayı bu kısım hatalarını gözden geçirip kendi kendini düzetme eylemi altında incelenmiştir.



Şekil 11. Suna'nın eşkenar dörtgene yönelik çizim ve açıklaması

Ele aldığınız dörtgenleri düşünerek birbiri ile ilişkilerini açıklayan bir küme çiziniz ifadesine karşılık Suna, dörtgenleri küme yardımıyla ifade etmiştir. Bu küme şeklinde kare, dikdörtgen ve eşkenar dörtgen ile kesişmiştir (Şekil 12). Suna, sorgulama sürecinde kareyi dikdörtgenin ve eşkenar dörtgenin kesişim bölgesinde olması gerektiğini, daha önce bunu bu şekilde kabul ettiğini ifade etmiştir (Şekil 13). Suna fikir değiştirdikten sonraki küme şeklini de çizmiştir. Suna fikir değiştirdiğinden dolayı bu kısım hatalarını gözden geçirip kendi kendini düzetme eylemi altında incelenmiştir.





Şekil 12. Suna'nın 1. küme şekli

Şekil 13. Suna'nın 2. küme şekli

Topluluk Üyelerinin Risk Alması

Öğrenciler, sorgulama topluluğu içinde ifade edilen fikirlere eleştirilerde bulunup fikrin yanlış ya da eksik olduğunu ifade edebilmektedirler. Bu çalışmada risk alma eylemi, fikirleri eleştirmek ya da öğrencilerin diğer fikirleri reddetmesi şeklinde ortaya çıkmıştır. Diyalogdan sonra en çok kullanılan eylemdir. Tüm komşu kenarları birbirine dik ve eşit uzunlukta olan dörtgen her zaman yamuktur önermesinin Önder, yanlış olduğunu ifade etmiştir. Hakan, Önder'e önermenin ifade ettiği bilgiyi açıklamıştır. Bu süreçte aralarında şöyle bir diyalog geçmiştir:

Araştırmacı: *Tüm komşu kenarları birbirine dik ve eşit uzunlukta olan dörtgen her zaman yamuktur.*

Önder: *Yanlış çünkü yamuğun kenar uzunlukları farklı olduğundan ve belli bir şekli olmadığından dik ve eşit uzunlukta kesmez.*

Hakan: ***Yamuk her zaman böyledir demiyor, yamuk bu özellikleri taşıyabilir ve bu özelliğe sahip olan dörtgen her zaman yamuktur, diyor.***

Önder: ***Tamam, yamuk diyor işte.***

Suna: ***Her zaman yamuk olmaz işte. Önder onu söylüyor.***

Sorgulama sürecinde Önder'in ifadeyi yorumlama şekline Hakan karşı çıkmıştır. Önder'in önermeyi yanlış yorumladığını ve önermenin aslında neyi ifade ettiğini açıklamıştır. Öğrenciler bilgilerini yapılandırmak ve derinlik kazandırmaya çalışmışlardır. Suna da her zaman yamuk olamaz diyerek Önder'in fikrini desteklerken Hakan'a karşı çıkmıştır. Öğrencilerin ortaya çıkan diğer fikirlere karşı çıkıp reddetmelerinden dolayı bu kısım risk alma eylemi altında incelenmiştir.

Problem Çözme İçin Alternatif Yaklaşımların Değerlendirilmesi

Matematiksel sorgulama topluluğunun bir diğer özelliği, öğrencilerin problem çözme için alternatif yaklaşımların dikkate almaları, alternatif yaklaşımlar önermeleri ve bu yaklaşımları geliştirmeleridir. Bir süreç başarılı olduğunda öğrenciler sorgulamanın bittiğine karar vermektedirler. Oysa diğer fikirler daha iyi kavrayışlara, ek bilgilere ve başka çalışma alanlarına yol açabilmektedir.

Matematiksel sorgulama topluluğunun üyeleri, çözüm sürecinde atılan her adım için gerekçe sunabilmelidir. Bir öğrencinin bir fikri, yaklaşımı kabul etmesi veya reddetmesi için topluluğa nedenler vermesi gerekmektedir. Bu çalışmada öğrenciler alternatif yaklaşımlar sunarken daha çok benzer durumlarla ilişkilendirebilecekleri kavramları seçmişlerdir.

Bütün komşu açıları paralel olan dörtgen her zaman paralelkenardır önermesi için sorgulama süreci devam ederken Önder ifadenin yanlış olduğunu belirtip yeni bir yaklaşım önermiştir. Bu süreçte şöyle bir diyalog geçmiştir:

Önder: *Ben bu ifadeye tamamen yanlıştır dedim. Ben şöyle bir şey düşündüm.* ***Sayma sayısı, doğal sayı tamsayı sonra rasyonel sayı, rasyonel olmayanlar ve evrensel küme. Karenin içinde 90 derece var tüm kenarları eşit var ama yamukta böyle bir şey yok. Yani bunu biz ayrı değerlendirmeliyiz.***

Fulya: *Yamuğun bir sınırlandırması var.*

Önder: *90 derece olamaz bir yamuk.*

Hakan: *Olabilir 90 derece olabilir.*

Önder: *Biz o zaman özel bir ad vermezdik.*

Hakan: ***O zaman biz doğal sayıya neden reel sayı diyoruz, özel bir isim vermemize gerek yok.***

Önder dörtgenleri sayı kümeleri ile ilişkilendirerek yeni bir yaklaşım önermiştir. Hakan ve Fulya Önder'in yaklaşımının doğru olmadığını belirtmişlerdir. Hakan bunun üzerine doğal sayılar ve reel sayılar üzerinden kare ve yamuk ilişkisini sorgulattığından dolayı bu kısım problem çözme için alternatif yaklaşımların değerlendirilmesi altında incelenmiştir.

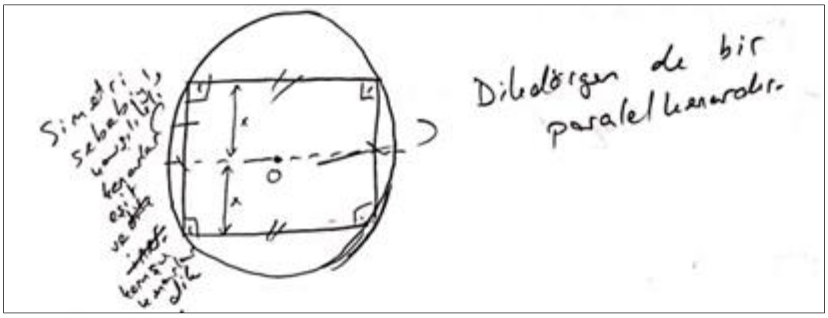
Matematikçiler Gibi Matematik Yapma

Tüm köşeleri çember üzerinde olan bir paralelkenar çizilebilir mi sorusuna karşılık Hakan, kare ve dikdörtgenin birer paralelkenar olduğunu doğrulamıştır. Bu süreçte şöyle bir açıklama yapmıştır:

Hakan: *Ben şimdi açıklayarak bir şey yapmak istiyorum. Çünkü siz büyük ihtimalle şey diyeceksiniz dikdörtgen ve kareyi nasıl çizebiliriz diye büyük ihtimalle soracaksınız ben direkt peşin peşin anlatmaya başlayayım. O merkezli bir çemberimiz olsun. Bir çapımız olsun. Bu çapa alt ve üst tarafta x mesafede olan 2 tane kenar çizelim. Bu kenarları sol taraflarından ve sağ taraflarından birleştirince başlangıçtaki çizgiler zaten simetriden dolayı eşit olacak. O zaman çizdiğimiz kenarlarda birbirine eşit olacak 90 derece olacak böyle olunca bir dikdörtgen bazen bir kare oluyor ve baktığımız zaman dikdörtgende paralelkenardır. Bu sebepten dolayı paralelkenar çizilebilir.*

Hakan burada 4 köşesi çember üzerinde olacak şekilleri aşamalı olarak anlatmıştır. Şekil 14'te görüldüğü gibi O merkezli bir çember çizip çapı oluşturmuştur. Çapa paralel olacak biçimde alt ve üst tarafta x mesafede doğru parçaları çizmiştir. Köşeler çember üzerinde olacak şekilde bu doğru parçalarının başlangıç ve bitiş noktalarını birleştirmiştir. Yan kenarların simetriden dolayı eşit olacağını söyledikten sonra kenar uzunluklarına göre kare ya da dikdörtgen oluşabileceğini belirtmiştir. Kare ve dikdörtgen de bir paralelkenar olduğu için bu şekillerin dolayısıyla paralelkenarın çizilebileceğini ifade etmiştir.

Hakan, daha önceki çıkarımları yardımıyla kare ve dikdörtgen çizilebileceğini dolayısıyla da paralelkenar çizilebileceğini göstermiştir. Sorgulama sürecinde Hakan'ın bir önermeyi doğru biçimde doğrulaması, sorgulamanın matematiksel derinlik kazandırdığını göstermektedir.



Şekil 14. Hakan’ın cevabı

Matematiksel sorgulama topluluğunda, aksiyomlar ve tanımlar topluluk tarafından yeniden incelenmeye açıktır. Ancak geriye kalan sorularda matematikçiler gibi matematik yapma eylemi ortaya çıkmamıştır. Bunun sebebi öğrencilerin varsayımları değerlendirme ve doğrulamaya sık başvurmamaları olabilir.

Ön Bilgilerin Sorgulama Sürecinde Gözlemlenme Durumları

Öğrencilerin dörtgenler ile ilgili ön bilgilerini belirlemek amacıyla ilk oturumda dörtgenlerin tanımları ve özelliklerine yönelik sorulara yer verilmiştir. Öğrencilerin dörtgen tanımından ziyade özellikleri sıraladıkları sonrasında bu özellikleri birleştirerek bir tanım yaptıkları görülmüştür. Öğrenciler ele aldıkları dörtgen tanımlarını, diğer dörtgenlerle ilişkilendirmeden hariç tutan tanımlar şeklinde ifade etmişlerdir. Bu durum tanım soruları ilerledikçe oluşturdukları sorgulama topluluğunda, öğrencilerin daha çok diyalog kurmalarına ve risk almalarına sebep olmuştur. Çünkü öğrencilerden bir tanesi tanımlar hakkında konuşurken cevap kağıdında hariç tutan tanımlara yer vermesine rağmen aslında bu dörtgenlerin birbiri ile ilişkili olduğunu fark ederek kendi fikirlerini gözden geçirmiştir. Bu gözden geçirme sonrasında diğer öğrencilerin fikirlerine karşı çıkarak risk alma eylemini kullanmıştır. Bu risk alma eylemi öğrencilerin kendi fikirlerini gözden geçirmelerine sonrasında ise hatalarını düzetmelerine sebep olmuştur. Öğrencilerin sahip olduğu yanlış bilgiler sorgulama sürecinde genellikle öğrencilerin iş birliği yapmasıyla çözülmüştür. Bir fikrin doğruluğunu göstermek için 2 yerde kanıt kullanılmıştır. Bu durum çalışma için çok önemlidir. Çünkü öğrenciler hiçbir müdahale olmadan kendileri bir önermeyi doğrulamak amacıyla matematikçiler gibi matematik yapma eylemini kullanmışlardır. Öğrencilerin bu eylemi çok fazla kullanmamalarının bazı sebepleri olabilir. Bunlar; kanıt yapma, doğrulama üst bilişsel becerilere yönelik olduğu için öğrencilerin kullanamaması, öğrencilerin doğrulamadan ziyade soruların doğru cevaplarıyla ilgilenmeleri ve sahip oldukları ön bilgilerin yanlış olması sonucu doğrulama yapamamaları olduğu düşünülmektir. Öğrencilerin kapsayıcı tanımlara yer vermeleri de özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisini kurma sürecinde doğru yapıyı kurmalarını sağlamıştır.

Öğrencilerin Özel Dörtgenler Hakkında Var Olan Bilgilerinin Değişimi

Paralelkenar tanımında öğrenciler başlangıçta ortak bir tanıma sahiptirler ve sahip olduğu özellikler konusunda da diğer dörtgenlere göre daha çok fikir birliğine varılmıştır. Eşkenar dörtgen nedir sorusunda öğrenciler 2 farklı fikir sunmuşlardır. Öğrencilerden bazıları eşkenar dörtgenin karenin 45^{o} döndürülmüş hali olduğunu dolayısıyla karenin aynısı olduğunu belirtmişlerdir. Bazı öğrenciler ise eşkenar dörtgenin sahip olduğu özelliklerden bahsettikten sonra karenin de bir eşkenar dörtgen olduğunu söylemişlerdir. Bu çalışmada, sorgulama topluluğunda katılımcılar ilk kez kapsayıcı tanımı eşkenar dörtgen ile karenin ilişkisinde ortaya koymuşlardır. Eşkenar dörtgen için sorgulama süreci devam ederken öğrencilerden biri ele alınan dörtgenlerin hepsini ilişkilendirmiştir. Bu ilişkilendirmeyi küme şeklinde ve doğru biçimde yaparak aslında öğrencinin özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişki bilgisine sahip olduğu görülmüştür. Sorgulama topluluğunda, hiyerarşik bilgiye sahip olan öğrenci, diğer öğrencilere karşı risk alarak hatalarını gözden geçirmelerini sağlamıştır. Sorgulama topluluğu sayesinde öğrenciler bilgi paylaşımında bulundukça birbirlerine karşı risk alarak doğru bilgiyi ayırt etmeye çalışmışlardır. Sorgulama topluluğunda yer alan öğrenciler ele aldıkları fikirleri sorgulayarak doğru bilgiye ulaşıp doğru ilişkilendirmeler yapmaya çalışmışlardır.

Öğrencilerin ön bilgilerini belirleyebilmek için ilk oturumda sorulan tanım sorularında öğrenciler tanım yaparken özellikleri sıralamışlardır. Ancak sorgulama topluluğu sayesinde öğrenciler sorgulama süreci ilerledikçe tanım yapmaya başlamışlar ve argümanlarını desteklemek için tanımlar kullanmışlardır. Bu durum sorgulama topluluğunun oluşturulmasının etkiliğini ve gerekliliğini göstermektedir.

Usiskin ve arkadaşları (2008), kapsayıcı tanımın hiyerarşik sınıflamaya olanak sağlayan tanım olduğunu belirtmiştir. Yapılan bu çalışmada da kapsayıcı tanım kullanmayan öğrencilerin hiyerarşik ilişki kurmada zorluk yaşadıkları görüşmüştür. Ancak oluşturulan sorgulama topluluğu sayesinde öğrencilerin tanımları süreçte değişiklik göstermiştir. Sorgulama topluluğu sayesinde öğrenciler yeni ilişkiler fark edip özellikleri keşfetmişlerdir. Bu anlamda sorgulama topluluğu oluşturmanın önemli olduğu görülmüştür.

Öğrencilerin sahip oldukları ön bilgiler incelendiğinde, özel dörtgenlerin tanımları ve özellikleri düşünüldüğünde öğrencilerin tanım yapma ya da tanımın ifade ettiği durumu anlama konusunda zorluk yaşadıkları fark edilmiştir. Bunun yanında öğrencilerin dörtgenleri ilişkilendirmeden birbirinden hariç olarak ele almaya daha yatkın oldukları görülmüştür. Sürecin başından beri yalnızca bir öğrenci şekilleri kapsayıcı olarak ele almıştır. Öğrencilerden bir tanesi başlangıçta tanımları hariç olarak ele almasına rağmen sorgulama süreci ilerledikçe, sorgulama topluluğu sayesinde fikirlerini değiştirip özel dörtgenleri birbiriyle ilişkilendirmiştir. Sorgulama sürecinde kurduğu diyaloglar, risk alması öğrencinin kendini gözden geçirip hatalarını düzeltmesini sağlamış ve hatalarını düzelten öğrenci doğru bilgiye ulaşmıştır. Bu durum sorgulama topluluğunun etkili olduğunu göstermektedir.

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmanın amacı, 10. sınıf öğrencilerinin özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişkilerinin yapılandırılması sürecinde ortaya çıkan sorgulama süreçlerinin incelenmesidir. Bu kapsamda ortaya çıkan sonuçlar ele alındığında öğrencilerin en çok kullandıkları eylem iletişim ortamı sağladığından dolayı diyalog yoluyla matematik anlayışı geliştirme olduğu görülmektedir. Burbules (1993), diyalogun kendi aramızda kabul edilebilir cevapları ve uygulanabilir çözümleri tanımlamak için elimizdeki en iyi araç olduğuna değinmiştir. Öğrencilerin iletişim kurması ve ortak bir anlam oluşturma çabası diyalog eylemi sayesinde gerçekleşmiştir. Diyalog yoluyla, öğrenciler fikirlerinin diğer öğrencilere anlamlı gelip gelmediğini, anlam ifade eden başka açıklamalar olabileceğini veya yanlış anlamalar neticesinde düzeltmeler olabileceğini fark etmişlerdir. Öğrencilerin fikirleri, matematiğe nasıl çalıştıklarına dair topluluğa sundukları ifadeler diyaloğu harekete geçirmiştir ve buna karşılık diyaloglar öğrencileri kendi anlamlarını yaratmaya teşvik etmiştir. Öğrencilerin düşüncelerini topluluğa açık bir şekilde ifade etme riskini almaları sorgulama topluluğu için gereklidir çünkü fikirler diyaloğu canlandırmıştır, farklı fikirler topluluğun fikir birliğine ihtiyaç duyduğunu göstermiştir ve topluluğun sorgulama sürecini ilerletmiştir.

Bu çalışmada, Siegrist'in (2005) kavramsal modeline ek olarak sorgulama sürecinde eylemleri değerlendirmede kullanılabilecek model detaylandırılmıştır. Öğrenciler kendi fikirlerinin ve argümanlarının doğruluğunu göstermek için diyalog yoluyla matematik anlayışı geliştirme eyleminden sonra en çok risk alma eylemini kullanmışlardır. Öğrencilerin kişisel değerlerini kendi fikirlerinin kabulüne bağlamamaları için deneyim kazanmaları gerektiğini (Siegrist, 2005) ve fikirlerinin eksik ya da yanlış olabileceğini değerlendirmek zorunda oldukları için (Robertson, 1999) risk alma eyleminin önemli bir sorgulama eylemi olduğu görülmüştür. Risk almadan sonra en çok ortaya çıkan eylem iş birlikçi problem çözme eylemi olmuştur. İş birlikçi problem çözme eylemi öğrencilerin açıklamalarda bulunmalarını sağlayarak kendi anlamlarını yaratmalarını desteklemiştir. Öğrenciler diyalog yoluyla matematik anlayışı geliştirirken ve risk alırken iş birliği içinde de çalışmışlardır. Vygotsky (1986), işbirlikçi problem çözmeyi öğrencilerin daha üst düzey düşünme becerilerine ulaşmalarının ve kendi anlamlarını yaratmalarının bir yolu olarak tanımlamıştır. İşbirlikçi problem çözme ile uğraşan öğrenciler, problemleri başlangıçta diyalog yoluyla araştırmak ve çözüm yollarındaki ilerlemelerinin makul olup olmadığı konusunda topluluk üyeleriyle sorgulayarak doğru bilgiye ve doğru ilişkilendirmeye ulaşmaya çalışmışlardır. Bireylerin matematiksel problemleri çözmek için gruplar halinde çalışmaları, iş birliği yapmaları, çözüm yollarını geliştirmeleri ve daha sonra oluşturdukları çözümleri topluluğa sunarak eleştirel bir biçimde fikirlerini değerlendirmelerine olanak sağlamaktadır (Clarke, 1997; Cobb ve ark., 1991). Bu çalışmada da iş birliği, öğrencilerin bir fikri güçlendirmek ya da bir fikrin yanlışlığını ortaya çıkarmak için en çok kullandıkları 3. eylem olmuştur. Fikirler arasındaki bir çatışma diyalog yoluyla çözüldüğünde, kendi kendini düzeltme eylemi gerçekleşmiş olmaktadır. Gregory (2002), kendi kendini düzeltmenin aynı zamanda öğrencinin bir bilginin doğruluğunu kendine göstermesi olduğunu belirtir. Öğrenciler kendi bilgi ve yorumlarının eksik ya da yanlış olduğunu fark edip fikirlerini değiştirdikleri görülmüştür. Bu durum iki şekilde ortaya çıkmıştır. Bunlardan biri öğrencilerin sahip oldukları fikirleri kendi kendilerine değiştirmeleridir. Diğeri ise akranlarının yönlendirmeleriyle fikir değiştirmeleridir. Öğrenciler, sorgulama topluluğunda ifade ettikleri düşünceleri kabul ettiremediklerinde ya da düşüncenin yanlış ya da eksik olduğu diğer öğrenciler tarafından açıklandığında kendilerini gözden geçirip hatalarını düzeltmişlerdir. Öğrencilerin dörtgenler için ön bilgileri olmasına rağmen sorgulama süreci sayesinde kendi anlamlarını yarattıklarında farklı kavramsal bakış açıları oluşturmuşlardır. Bu yüzden sorgulama sürecinde 5. en çok kullandıkları eylem alternatif yaklaşımların önerilmesi, geliştirilmesi eylemi olmuştur. Öğrencilerin alternatif yaklaşımlarla fikirlerini desteklemeleri sorgulama topluluğu deneyimini her birey için daha zengin hale getirdiği düşünülmektedir (Siegrist, 2005). Sorgulama topluluğunda, öğrencilere kendi matematiksel anlamlarını oluşturmada fırsat verildikçe öğrencilerin sahip oldukları bilgileri keşfettikleri ve bu bilgileri ilişkilendirebildikleri görülmüştür. Bu nedenle, kendi anlamlarını ya da matematiksel bilgilerini yaratma özgürlüğüne sahip öğrenciler, fikir alışverişi yapabilecek bir kitle yani sorgulama topluluğu oluşturmanın gerekli olduğunu göstermiştir. Alternatif yaklaşımlar önerilmesi ve geliştirilmesi, öğrencilerin hatalarını gözden geçirip kendilerini düzeltmelerinden sonra en az ortaya çıkan eylem olmuştur. Öğrencilerin doğru cevaplara odaklanmaları yerine, sorgulama sürecine, kavramlar arasındaki bağlantılara ve matematiğin yapısına odaklanmaları gerekmektedir (Lakatos, 1976; Peressini ve Knuth, 2000; Tymoczko, 1985). Bu eylemin az ortaya çıkmasının sebebinin öğrencilerin konuları ve kavramları ilişkilendirme alışkanlıklarının pek olmamasından kaynaklandığı görülmektedir. Öğrenciler alternatif çözümler sunduklarında, topluluk üyeleri sorgulanan konuyu anlama fırsatlarını genişletmişlerdir. Öğrenciler oturumlarda benzer sıklıkta kendini gözden geçirme- hatalarını düzeltme eylemini kullanmışlardır ve bu durumda çoğunlukla zayıf fikirleri daha güçlü fikirlerle değiştirmişlerdir. Öğrenciler genellikle sorgulama topluluğunda yer alan diğer öğrencilerin fikirlerini dinledikten sonra kendi fikirlerini gözden geçirmişlerdir. Bu sorgulama süreci sayesinde kendi kendini düzelten öğrenciler daha dikkatli bir şekilde argümanlarını savunmuşlardır. En az ortaya çıkan eylem ise matematikçiler gibi matematik yapma eylemidir. Bunun sebebi matematik yapmanın üst bilişsel bir durum olması ve öğrencileri ispat ve doğrulama yapma alışkanlıklarının olmaması olduğunu düşünülmektedir. Bu çalışmada matematikçiler gibi matematik yapma eylemi sadece ispat yapma olarak iki yerde ortaya çıkmıştır. İspat yapma bir bilgiyi doğrulamak olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmada sorgulama prosedürlerini sorgulama eylemine rastlanmamıştır. Çünkü sorgulama prosedürleri hipotez kurup, bu hipotezin doğruluğunun denenmesidir. Bu çalışmada hipotez kurmak için uygun problem olmadığından bu eyleme rastlanmadığı düşünülmektedir. Aynı zamanda sorgulama prosedürlerinin uygulanması ve sorgulanması üst bilişsel bir beceri olduğundan bu eylemin ortaya çıkmadığı düşünülmektedir. Matematikçiler gibi matematik yapma eylemine ve alternatif yaklaşımlar önerilmesi eylemine sınırlı sayıda kanıt bulunmuştur. Veriler tanımlanan eylemlerin hepsinin öğrencilerin kendi anlamlarını oluşturmalarını desteklediğini göstermektedir. Öğrenciler müfredatta yer alan bir konu ile uygulama yapmış olsalar da sorgulama topluluğu sayesinde ortak bir matematik kültürü paylaşarak matematiğin zenginliğini fark etmişlerdir. Aynı zamanda öğrenciler matematiği kendi terimleriyle görme ve ifade etme şansı yakalamışlardır. Bu durum sorgulama topluluğun öğrencilere kendi matematik kültürlerini oluşturmak için fırsat sunduğunu göstermektedir.

Sorgulama sürecinde tek tek eylemler araştırılırken aynı zamanda bu eylemlerin birbiri ile ilişkileri de göz önünde bulundurulmuştur. Sorgulama eylemlerinin birbirine etkisine bakıldığında diyalog yoluyla matematik anlayışı geliştirme eylemi öğrenciler arasında iletişim sağladığı için diğer eylem durumları için bir araç olmuştur. Risk alma eylemi kullanıldıktan sonra öğrenciler ya hatalarını gözden geçirip kendilerini düzeltmişlerdir ya da risk alarak sorgulama sürecini devam ettirmişlerdir. Risk alma eylemi aynı zamanda iş birliği için de ortam hazırlamıştır. Öğrenciler kendi fikirlerine yakın buldukları fikirleri destekleyerek aynı zamanda farklı fikirlere karşı da risk almışlardır. Bu durumlar bu çalışmanın temel amacı değildir fakat gelecek çalışmalarda sorgulama sürecinde kullanılan eylemlerin birbiri ile ilişkisi, eylemlerin birbirini nasıl etkilediği araştırılarak bu çalışmanın devamı olarak alana katkı sağlanabilir. Çalışmanın amacı kapsamında, katılımcıların dörtgenler konusunda sahip oldukları bilgilerin sorgulama sürecine etkisi de incelenmiştir. Bu noktada, sorgulama eylemlerini geliştirmede bu konuda sahip oldukları bilgilerin etkili olduğu belirlenmiştir. Literatür incelendiğinde birçok araştırmada (de Villiers, 1998; Tall ve Vinner, 1981; Vighi, 2003) olduğu gibi bu araştırmada dörtgenleri tanımlarken katılımcılar formal tanımlardan çok kişisel tanımlarını kullanmışlardır. Bu araştırmada, bireylerin oluşturduğu dörtgenlere dair kişisel tanımlar, bireylerin sorgulama sürecinde kullandıkları eylemlere dair ipuçları sağlamıştır.

Yackel ve Cobb (1996), sosyomatematiksel normlarla ilgili olarak, bir sınıfta matematiksel olarak normatif hale gelen şeyin, sınıf katılımcılarının mevcut hedefleri, inançları, ve varsayımları tarafından sınırlandırıldığına değinmişlerdir. Bu anlamda, sosyomatematiksel normlar, matematiksel etkinlik ve öğrenme hakkındaki hedefler ve inançların refleks olarak ilişkili olduğunu ifade etmişlerdir. Bu sebeple matematiksel sorgulama topluluğunda yer alan bireylerin uzun süreli aynı grupla çalışmasının önemli olduğu düşünülmektedir. Çünkü bu sayede bireyler arasında sosyomatematiksel normlar oluşmuş olur. Bu normların oluşması bireylerin daha rahat kendilerini ifade etmelerini ve tartışma ortamını daha iyi yönetmelerini sağlar. Bu çalışmada öğrenciler daha önceden birlikte çalışma ortamlarında bulunmuş olsalar da normların ortaya çıkmasını sağlayacak kadar çok etkileşimde bulunmamışlardır. Bu sebeple yapılacak benzer çalışmanın katılımcı grubu belirlenirken bireylerin uzun süre birlikte çalışmış olmaları önerilmektedir.

Kabul edilebilir bir açıklama ve gerekçelendirme olarak sayılan sosyomatematiksel norm, öğrencilerin katkıda bulunduğu gerçek süreci ele alır. Öğrencilerin açıklayabilecekleri ve gerekçelendirebilecekleri kişisel olarak anlamlı çözümler geliştirmeye çalışmak zorunda kaldıkları bir sınıf ortamının matematiksel sorgulama topluluğu oluşturmada çok daha etkili olduğu görülmüştür (Yackel ve Cobb, 1996). Bu sebeple öğrencilerin sorgulama topluluğunun oluşumunda yer almaları ve sürece aktif katılabilmeleri için açık uçlu sorular ya da üst bilişsel becerilere hitap eden soruların sorulması bireyleri daha çok düşünmeye teşvik edebilir ve bu sayede sorgulama süreci daha etkili bir hale dönüşebilir. Bu tarz problemlerin seçilmesinin bireylerin var olan bilgilerini düzeltme ve geliştirmede etkili olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Artigue, M. ve Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry-based education in mathematics. *ZDM, 45*(6). 797-810.

Bowen, Glenn A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal*, *9*(2), 27-40.

Burbules, N. (1993). *Dialogue in teaching.* New York: Teachers College Press

Clarke, D. (1997). The changing role of the mathematics teacher. *Journal of Research in Mathematics Education, 28*(3), 278-305.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatly, G., Trigatti, B. ve Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second grade mathematical project. *Journal for Research in Mathematics Eduaction,* 22, 3-29.

Clements, D. H. (2003). *Learning and teaching measurement (2003 Yearbook)*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: NCTM.

de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 11-18.

de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A.Oliver & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Volume 2, s. 248-255). University of Stellenbosch: Stellenbosch.

Divrik, R. (2019*). Sorgulamaya dayalı öğrenme yönteminin 4. sınıf matematik dersinde kullanılmasına ilişkin öğretmen görüşleri ve öğrencilerin problem çözme ile problem kurma becerilerine etkisi*. (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü Temel Eğitim Anabilim Dalı, Konya.

Engeln, K., Mikelskis-Seifert, S., ve Euler, M. (2014). Inquiry-based mathematics and science education across Europe: A synopsis of various approaches and their potentials. In *Topics and trends in current science education* (pp. 229-242). Springer, Dordrecht.

Fibonacci (2012a). *Learning through inquiry*, https://projectfibonacci.org/wp/ (Erişim Tarihi: 05/05/2022).

Fujita, T. ve Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, *9*(1), 3-20.

Fujita, T. ve Okazaki, M. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 41-48.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 60-72.

Gregory, M. (2002). Constructivism, standards, and the classroom community of inquiry. *Educational Theory, 52*(4), 397 - 408.

Harlen, W. (2012). *Inquiry in science education. Resources for implementing inquiry in science and mathematics at school.* https://projectfibonacci.org/wp/ adresinden alınmıştır. (Erişim Tarihi: 05/05/2022)

Horzum, T. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının dörtgenler hakkındaki anlamalarının kavram haritası aracılığıyla incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 9*(1), 1- 30.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., ve Vinner, S. (1990). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Karademir, A. ve Akman, B. (2021). Okul öncesinde sorgulama temelli matematik: Öğretmen ve ebeveyn görüşleri. *Journal of Qualitative Research in Education,* 25, 156-184.
Kiczek, R. D. (2000). *Tracing the development of probabilistic thinking: Profiles from a longitudinal study*. (Unpublished doctoral dissertation) Rutgers University, New Brunswick.
Kondratieva, M. F. ve Radu, O. G. (2009). Fostering connections between the verbal, algebraic, and geometric representations of basic planar curves for student's success in the study of mathematics. *The Mathematics Enthusiast, 6*(1&2), 213-238.
Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations: *The logic of mathematical discovery*. New York: Cambridge University Press.
Leikin, R. ve Winicki-Landman, G. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 1. *For the learning of Mathematics*, *20*(1), 17-21.
Leikin, R. ve Zazkis, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.
Maher, C. A.,& Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 194–214.
Maher, C. A., Pantozzi, R. S., Martino, A. M., Steencken, E. P. ve Deming, L. S. (1996). *Analyzing students' personal histories: Foundations of mathematical ideas*. Paper presented at the American Educational Research Association, New York.
MEB (2018a). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar).* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.
MEB (2018b). *Matematik dersi öğretim programı (Lise 9. 10. 11. ve 12. sınıflar).* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.
Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass.
Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(2), 179-196.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
Öztoprakçı, S. ve Çakıroğlu, E. (2013). Dörtgenler. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (s. 249-272). Ankara: Pegem Akademi.
PRIMAS. (2012). *Promoting inquiry in mathematics and science across Europe.* Erişim adresi: http://www.primas-project.eu. Erişim Tarihi (05/05/2022).
Powell, A., Francisco, J.M., & Maher, C.A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 405-435.
Peressini, D. ve Knuth, E. (2000). The role of tasks in developing communities of mathematical inquiry. *Teaching Children Mathematics, 6*(6), 391-396
Patton, M. Q. (2003). Qualitative evaluation checklist. *Evaluation checklists project*, 21, 1-13.
Pratt, D., ve Davison, I. (2003). Interactive whiteboards and the construction of definitions for the Kite. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4,* 31-38.
Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. ve Hemmo, V. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe* (EU 22845). Brussels: Office for Official Publications of the European Communities.
Robertson, E. (1999). The value of reason: Why not a sardine can opener? *Philosophy of Education Archive*, 1-14.
Siegrist, R. (2005). *A community of mathematical inquiry in a high school setting* (Unpubliched Doctoral Dissertation). Montclair State University, Upper Montclair, NJ.
Schwarz, B. B. ve Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30(4),* 362-389.
Stake, R. E. (1994). Case study: Composition and performance. *Bulletin of the Council for Research in Music Education*, 31-44.
Sonay Ay, Z., ve Bulut, S. (2017). Üst bilişsel sorgulamaya dayalı problem çözme yaklaşımının öz-düzenleme becerilerine etkisinin araştırılması. *İlköğretim Online*, *16*(2), 547-565.
Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2013). A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 901-909.
Toptaş, V. (2015). Matematiksel dile genel bir bakış. *International Journal of New Trends in Arts, Sports &Science Education, 4*(1), 18-22.
T.C. Millî Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı, (2018a). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı.* Ankara: MEB.
Tymoczko, T. (1985). *New directions in the philosophy of mathematics.* Boston: Birkhauser.
Tall, D., ve Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169.

Türnüklü, E., Akkaş, E. N., ve Gündoğdu-Alaylı, F. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dörtgen algılarına yönelik bir çalışma. *X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi Bildiri Kitapçığı,* (s.27-30). Niğde, TÜRKİYE.

Usiskin, Z., Griffin, J., Witonsky, D. ve Willmore, E. (2008). *The classification of quadrilaterals: A study in definition*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Van De Walle, J. A., Karp, K. S., ve Bay-Williams, J. M. (2012). *İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim* (Çev. S. Durmuş). Ankara: Nobel Yayıncılık.

van Hiele, P. M. (1999). Begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 310-316.

Vighi, P. (2003). The triangle as a mathematical object. *European Research in Mathematics Education III Congress Proceedings,* Bellaria, Italy, 28 Februrary-3 March, 1-10.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–79). *Kluwer Academic Publicions.*

Vygotsky, L. (1986). *Thought and language*. A. Kozulin (Çev. ve Ed.) Chambridge, MA: MIT Press.

Yackel, E., ve Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri (6. Baskı).* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications. Design and methods*, (6. Baskı). Sage, Thousand Oaks, CA.

Yoshinobu, S., & Jones, M. (2011). An overview of inquiry-based learning in mathematics. *Wiley encyclopedia of operations research and management science*, 1-11.

EK
ODAK GRUP GÖRÜŞME FORMU
OTURUM -1

Soru 1:

1. Dörtgen nedir? Bildiğiniz tüm özellikleri yazınız.
2. Yamuk nedir? Bildiğiniz tüm özellikleri yazınız.
3. Paralelkenar nedir? Bildiğiniz tüm özellikleri yazınız.
4. Eşkenar dörtgen nedir? Bildiğiniz tüm özellikleri yazınız.
5. Dikdörtgen nedir? Bildiğiniz tüm özelliklerini yazınız.
6. Kare nedir? Bildiğiniz tüm özellikleri yazınız.

OTURUM – 2

Soru 2: Aşağıdaki ifadelerin doğru veya yanlış olma durumlarını göz önüne alarak nedenleriyle açıklayınız.

1. Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgen her zaman paralelkenardır.
2. Tüm komşu kenarları birbirine dik ve eşit uzaklıkta olan dörtgen her zaman yamuktur.
3. Paralelkenarın karşılıklı kenarları birbirine paralel ve dik olabilir.
4. Karşılıklı kenarları paralel olan ve 2 tane dar, 2 tane geniş açıya sahip olan dörtgen sadece paralelkenardır.

OTURUM-3

Soru 2'nin devamı: Aşağıdaki ifadelerin doğru veya yanlış olma durumlarını göz önüne alarak nedenleriyle açıklayınız.

5. Tüm kenarları birbirine eşit olan dörtgen her zaman eşkenar dörtgendir.
6. Bütün komşu açıları bütünler olan dörtgen her zaman paralelkenardır.

Soru 3:
En az 3 kenar uzunluğu birbirine eşit olan ve en az bir çift kenarı birbirine paralel olan dörtgen/dörtgenler nelerdir? Açıklayınız.

OTURUM – 4

Soru 4:

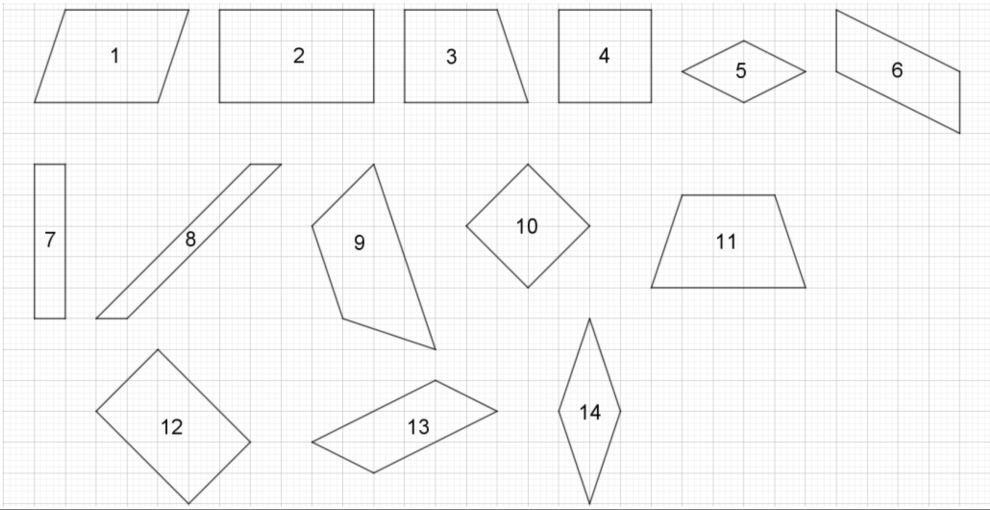
- 2 çift eşit uzunluklu komşu kenarı vardır.
- En az 1 çift karşılıklı kenarları eşittir.
- Köşegenlerden biri diğerin dik ortalar.
- Dik ortalayan köşegeni, bir çift karşılıklı açının açıortayıdır.
- Açıortay olan köşegen kendisinin simetri eksenidir.

Yukarıda verilen özelliklerin hepsini sağlayan dörtgen veya dörtgenler nelerdir?

Soru 5:
Tüm köşeleri çember üzerinde olan bir paralelkenar çizilebilir mi? Çizerek açıklayınız (Fujita ve Jones, 2007).

OTURUM – 5

Soru 6: Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz. (Fujita ve Jones, 2007).



Yamuk	Dörtgen Numaraları	Neden bu dörtgenleri seçtiğinizi açıklayınız.

Paralelkenar	Dörtgen Numaraları	Neden bu dörtgenleri seçtiğinizi açıklayınız.

Eşkenar Dörtgen	Dörtgen Numaraları	Neden bu dörtgenleri seçtiğinizi açıklayınız.

Dikdörtgen	Dörtgen Numaraları	Neden bu dörtgenleri seçtiğinizi açıklayınız.

Kare	Dörtgen Numaraları	Neden bu dörtgenleri seçtiğinizi açıklayınız.

OTURUM – 6

Soru 7:
Ele aldığınız dörtgenleri düşünerek birbiri ile ilişkilerini açıklayan bir şema (diyagram) çiziniz.

Soru 8:
Ele aldığınız dörtgenleri düşünerek birbiri ile ilişkilerini açıklayan bir küme çiziniz.

Soru 9:

1) Cansu, dikdörtgenin özel bir yamuk olduğunu ifade ediyor. Cansu'nun bu matematiksel ifadesine katılıyor musunuz? Tartışınız. Nedenleriyle açıklayınız.
2) Ufuk, paralelkenarın özel bir dikdörtgen olduğunu ifade ediyor. Ufuk'un matematiksel ifadesine katılıyor musunuz? Tartışınız. Nedenleriyle açıklayınız.
3) Emre, kare ve dikdörtgenin bir paralelkenar olduğunu ifade ediyor. Emre'nin matematiksel ifadesine katılıyor musunuz? Tartışınız. Nedenleriyle açıklayınız.
4) Nil, eşkenar dörtgenin bir dikdörtgen olduğunu ifade ediyor. Nil'in matematiksel ifadesine katılıyor musunuz? Tartışınız. Nedenleriyle açıklayınız.

5) Evrim, dikdörtgenin özel bir kare olduğunu, karenin de özel bir yamuk olduğunu ifade ediyor. Evrim'in bu matematiksel ifadesine katılıyor musunuz? Tartışınız. Nedenleriyle açıklayınız.

Soru 10:

Ele aldığınız dörtgenleri düşünerek birbiri ile ilişkilerini açıklayan bir şema (diyagram) çiziniz.