Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science

AKÜ FEBİD **12** (2012) 011302 (15-22) AKU J. Sci.**12** (2012) 011302 (15-22)

# Lojistik Regresyonda Parametre Tahmininde Bayesci Bir Yaklaşım

**Mehmet Ali Cengiz, Erol Terzi, Talat Şenel ve Naci Murat**

*Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Samsun*

*e-posta: macengiz@omu.edu.tr, eroltrz@omu.edu.tr, tlsenel@omu.edu.tr ve nacimurat@omu.edu.tr*

Geliş tarihi:22 Ocak 2013; Kabul Tarihi: 07 Şubat 2013

**Özet**

İstatistikte Bayesci çıkarım, ilave bir bilgi öğrenildiğinde bir parametrenin sonsal tahminini güncellemede Bayes kuralını kullanan bir çıkarım metodudur. Bayesci güncelleme İstatistikte özellikle matematiksel istatistikte önemli bir yöntemdir. Bir istatistiksel metot için Bayesci çıkarım otomatik olarak herhangi bir hesaplama metodu kadar iyi çalışır. Bu çalışmada iki gerçek veri üzerinde Lojistik regresyon için Bayesci yaklaşım verilmiştir.

**Anahtar kelimeler**
Bayesci Yaklaşım;
Lojistik Regresyon;
MCMC

# A Bayesian Approach for Parameter Estimation in Logistic Regression

**Abstract**

In statistics, Bayesian inference is a method of inference in which Bayes' rule is used to update the probability estimate for a parameter as additional evidence is learned. Bayesian updating is an important technique throughout statistics, and especially in mathematical statistics. Exhibiting a Bayesian derivation for a statistical method automatically ensures that the method works as well as any competing method. In this study, we briefly give Bayesian methodology with two real data application to logistic regression.

**Key words**
Bayesian Approach;
Logistic Regression;
MCMC



## 1.Giriş

Klasik istatistiksel metotlar uygulamada yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu metotlar, bilinmeyen parametreleri sabit varsayar ve nispi frekansları kullanarak bu parametrelere ilişkin olasılıkları belirler. Bu varsayımlardan hareketle, parametreler sabit olduğundan onlar hakkında olasılık çıkarımları yapılamayacağı açıktır. "İnanç derecesi" olarak olasılığı (yani, bir olayın doğruluğuna inanılma derecesini) ve tesadüfi değişken olarak deneme parametresini kabul eden Bayesci metotlar alternatif bir yaklaşım sunar. Bu varsayımlardan hareketle olasılıklar subjektif olur ve parametreler hakkında olasılık hesabı yapılabilir. "Bayesci" terimi, 19.uncu yüzyılda yaşamış Thomas Bayes' in Bayes teoreminin yaygın kullanımından gelir.

## 2. Bayesci Yaklaşım

Olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(y|\theta)$ ile tanımlı istatistiksel bir model kullanarak $y=\{y_1,...,y_n\}$ verisine ait $\theta$ parametresinin tahmini elde edilmek istenir. Bayesci yaklaşıma göre, dağılım ve olasılık hakkındaki bilgiler yetersiz olduğunda $\theta$ tam olarak belirlenemeyecektir. En genel olarak, $\theta$

hakkındaki belirsizliği en iyi açıklayacak dağılım, sıfır ortalamalı ve bir varyanslı normal dağılımdır.

Bayesci çıkarımının temelleri aşağıda verilmiştir:

1. $\theta$ için, $\pi(\theta)$ ile gösterilen bir olasılık dağılımı formüle edilir. Bu dağılım, önsel dağılım yada sadece önsel olarak adlandırılır. Önsel dağılım, veri bilinmeden önceki parametre hakkındaki bilgileri ifade eder.

2. Gözlemlenmiş $y$ veri seti için, $\theta$ verildiğinde $y$ -nin dağılımını tanımlayan bir $p(y|\theta)$ olabilirlik fonksiyonu belirlenir.

3. Önsel ve olabilirlik güncellenerek $p(\theta|y)$ sonsal dağılımı hesaplanır ve $\theta$ hakkındaki bütün istatistiksel çıkarımlar sonsal dağılımdan elde edilir.

Yukarıda bahsedilen üç adım Bayes Teoremi kullanılarak aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta, y)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)\pi(\theta)}{p(y)}$$
$$= \frac{p(y|\theta)\pi(\theta)}{\int p(y|\theta)\pi(\theta)\,d\theta}$$

Burada $\int p(y|\theta)\pi(\theta)\,d\theta$, sonsal dağılımın normalleştirme sabiti ve $p(y)$, $y$' nin marjinal dağılımıdır. $\theta$ 'nın olabilirlik fonksiyonu $p(y|\theta)$ 'nın herhangi bir orantılı fonksiyonudur, yani $L(\theta) \propto p(y|\theta)$ dır. Buradan, Bayes formülünü aşağıdaki gibi de yazmak mümkündür:

$$p(\theta|y) = \frac{L(\theta)\pi(\theta)}{\int L(\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

$p(y)$ marjinal dağılımı, bir integraldir. İntegral sonlu olduğu sürece, bu integralin değeri sonsal dağılım hakkında herhangi ilave bir bilgi vermez. Bu nedenle, $p(\theta|y)$ aşağıda verilen orantılı formda rastgele sabit olarak yazılabilir:

$$p(\theta|y) \propto L(\theta)\pi(\theta)$$

Basitçe söylemek gerekirse, Bayesci yaklaşım var olan bilginin yeni bilgi ile nasıl güncelleneceğini ifade eder.

### *2.1. Önsel dağılım*

Bir parametrenin önsel dağılımı, veriyi analiz etmeden önce parametre hakkında kesin olmayan bilgileri içeren olasılık dağılımıdır. Önsel dağılım ve olabilirlik fonksiyonunun çarpımı parametrenin sonsal dağılımını verir. Sonsal dağılımı kullanarak tüm çıkarımlar yapılabilir. Önsel dağılım kullanmaksızın modelleme veya Bayesci çıkarım yapılamaz. Bayesci olasılık, tesadüfi bir olaya ait inanç derecesinin ölçüsüdür. Bu tanıma göre, bu olasılık oldukça subjektiftir (bilgilendirici). Dolayısıyla tüm önseller subjektif ve objektif (bilgilendirmeyen) önseller olarak sınıflandırılır. Subjektif önsellere karşı objektif önseller hakkında Berger (2006) ve Goldstein (2006) detaylı bilgiler vermiştir.

Objektif önsel, sonsal dağılım üzerinde minimum etkiye sahiptir ve belirsiz, diffüz ya da düz önseller olarak da isimlendirilir. Bu önseller daha objektif göründüklerinden pek çok istatistikçi tarafından kullanılırlar. Ancak, parametre hakkındaki toplam belirsizliğin objektif önselle verilmesi her zaman uygun değildir. Bazı durumlarda, objektif önseller kullanıcıyı yanlış sonsallara götürebilir. Daha detaylı bilgi için Kass ve Wasserman (1996)'a bakılabilir.

Subjektif önsel dağılımlar pratikte en fazla kullanılan önsellerdir. Bu önsellerden en çok bilinenler Eşlenik önsel ve Jeffreys'in önselidir. Eşlenik önseller, sonsal dağılımı kolay elde etmek ve hesaplamalardaki kolaylık için tercih edilir. Jeffreys (1961) tarafından önerilen ve oldukça kolay hesaplanabilen Jeffreys'in önseli, düzgün dağılım özelliğine sahip olup parametrelerin tanımlı olduğu aralık dışında büyük değerleri içermez. Ayrıca olabilirliğin anlamlı olduğu bölgede çok fazla değişmeyen ve Fisher bilgi matrisi kullanılarak hesaplanan bir önseldir. Detaylı bilgi için Bernardo ve Smith (2000) ve O'Hagan (1994)'e bakılabilir.

Bayesci analiz kullanmanın avantajlarından bazıları ise şöyle ifade edilebilir: Teorik çatı altında, verinin önsel bilgi ile birleşiminin temel ve doğal bir yolunu sağlar. Asimptotik yaklaşım olmaksızın, veriden şartlı ve kesin çıkarımlar verir. Küçük örnek büyüklüklerinde de kullanılabilir. Parametre tahminleri ve hipotez testlerinde direk çıkarımlar verir. Kayıp veri problemleri ve hiyerarşik modeller için kolaylıkla uygulanır. Aynı zamanda bazı dezavantajlara da sahiptir. Önselin seçiminde kesin bir yöntem yoktur. Özellikle parametre sayısının fazla olduğu modellerde hesaplama oldukça zordur. Bayesci analizin daha fazla ayrıntısı için; Berger (1985), Berger and Wolpert (1988), Bernardo and Smith (1994), Carlin and Louis (2000), Robert (2001) ve Wasserman (2004)'e bakılabilir.

Uygulamada karşılaşılan problemlerden birisi de sonsal dağılımlardan istatistiksel çıkarımlar için gerekli integrallerin çözümünde analitik çözümlerin olmamasıdır. Bu durumda, hesaplamalar için simülasyon metotlarının kullanımı gerekir. Son yirmi yılda Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) metotlarının kullanımı yaygın hale gelmiştir.

### *2.2. Markov Zinciri Monte Carlo Metodu*

MCMC metodu, sonsal miktarların hesaplanması ve sonsal dağılımlardan örnekleme yapmak için genel bir simülasyon yöntemidir. MCMC, bir hedef dağılımdan örnekleme yapma yöntemidir. Her örnek bir öncekine bağlı olduğundan burada Markov zincir notasyonu vardır. Markov zinciri, bir önceki $\theta^{t-1}$ tesadüfi değişkenine bağlı $\theta^t$ tesadüfi değişkenlerinin oluşturduğu, $\theta^1,\theta^2,\ldots$ şeklinde bir dizidir. Herhangi bir geçmişe sahip olmayan bir hedef dağılıma tesadüfi olarak yaklaşan bir mekanizma olarak Markov zincirinin bir örnekleme uygulaması düşünülebilir. Tanner (1993), Gilks ve ark. (1996), Chen ve ark. (2000), Liu (2001), Gelman ve ark. (2004), Robert ve Casella (2004), Congdon (2001, 2003, 2005) tarafından yapılan çalışmalarla MCMC metodu Bayesci yaklaşımın pratikte kolay uygulanabilir hale gelmesini sağlamıştır.

### *2.3. Metropolis Algoritması*

Metropolis algoritması, Amerikalı fizik ve bilgisayar bilimcisi Nicholas C. Metropolis tarafından icat edilmiştir. Algoritma basit ve pratiktir ve normalleştirme sabiti olarak bilinen herhangi boyuttaki keyfi kompleks hedef dağılımından tesadüfi örnekler elde etmek için kullanılır. $f(\theta|y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip tek değişkenli bir dağılımdan örnekler elde edilmek istensin. $f$ 'den elde edilen *t*.nci örnek $\theta^t$ olsun. Metropolis algoritmasını kullanmak için başlangıç değeri $\theta^0$ alınır ve simetrik bir $q(\theta^{t+1}|\theta^t)$ hedef yoğunluk fonksiyonuna gerek vardır. ($t$+1).nci iterasyonda $\theta^t$ parametre değeri için $q(.|.)$' dan bir örnek üretme ve yeni örneğin ret veya kabul edilmesine karar verme algoritmasıdır. Eğer yeni örnek kabul edilirse, algoritma yeni örnekle başlayarak kendi kendini tekrarlar. Eğer yeni örnek reddedilirse, algoritma şimdiki noktadadır ve tekrara başlar. Gerekli oluncaya kadar algoritma kendi kendini tekrarlar. Pratikte kullanıcı, yeterli iterasyon tamamlandıktan sonra örneklemeyi durdurma ve toplam örnek sayısına karar verme avantajına sahiptir.

$q(\theta_{yeni}|\theta^t)$ simetrik bir dağılım olsun. Önerilen dağılım, örneklemi kolay bir dağılım olmalı ve $\theta^t$' den $\theta_{yeni}$ elde etme olabilirliği, $\theta_{yeni}$' den geriye doğru $\theta^t$ elde etmenin olabilirliği ile aynı anlamda olan $q(\theta_{yeni}|\theta^t) = q(\theta^t|\theta_{yeni})$ olmalıdır. Metropolis algoritması aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. $f(\theta^0|y) > 0$ olacak şekilde $t = 0$ ve başlangıç noktası $\theta^0$ seçilir.

2. Önerilen dağılım $q(.|\theta^t)$ kullanarak $\theta_{yeni}$ üretilir.

3. $r = \min\left\{\dfrac{f(\theta_{yeni}|y)}{f(\theta^t|y)}, 1\right\}$

hesaplanır. $\theta^{t+1} = \theta^t$

4. $U(0,1)$' den bir $u$ üretilir.

5. Eğer $u < r$ ise $\theta^{t+1} = \theta_{yeni}$ , aksi halde alınır.

6. $t = t+1$ alınır. Eğer $t < T$ ise ($T$ istenen örnek sayısı) 2.nci adıma dönülür, aksi taktirde işlem tamamlanır.

### *2.4. Gibbs Örneklemesi*

Amerikan fizikçisi Josiah W.Gibbs' den sonra Geman ve Geman (1984) tarafından isimlendirilen Gibbs örneklemesi, "Metropolis ve Metropolis-Hastings algoritması" nın özel bir durumudur. Bayesci çıkarımda problem çözümü için Gibbs örneklemesini ilk olarak Gelfand ve ark.(1990) kullanmıştır. Gibbs örneklemesi, modeldeki her parametre ve onların örneği için tam şartlı dağılımlar içinde birleşik sonsal dağılımın ayrıştırılmasını gerektirir. Metropolis algoritmasının uygulanışı için yardımcı dağılım gerekli olmadığından bazı araştırmacılara göre bu algoritma daha kullanışlıdır.

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)'$ parametre vektörü, $p(y|\theta)$ olabilirlik ve $\pi(\theta)$ önsel bir dağılım olsun. $\pi(\theta_i|\theta_j\ , i \neq j, y)$ aşağıdaki gibi yazılabilir,

$\pi(\theta_i|\theta_j\ , i \neq j, y) \propto p(y|\theta)\pi(\theta)$.

Gibbs örneklemesi algoritması aşağıdaki gibidir:

1. $t = 0$ alınır ve keyfi bir $\theta^{(0)} = \left\{\theta_1^{(0)}, \ldots, \theta_k^{(0)}\right\}$ başlangıç değeri seçilir.

2. $\theta$' nın her bir bileşeni

$\pi(\theta_1|\theta_2^{(t)}, \ldots, \theta_k^{(t)}\ , y)$' den $\theta_1^{(t+1)}$ ,

$\pi(\theta_2|\theta_1^{(t+1)}, \theta_3^{(t)}, \ldots, \theta_k^{(t)}\ , y)$' den $\theta_2^{(t+1)}$ ,

.................................

$\pi(\theta_k|\theta_1^{(t+1)}, \ldots, \theta_{k-1}^{(t+1)}\ , y)$' den $\theta_k^{(t+1)}$

biçiminde elde edilir.

3. $t = t+1$ alınır ve eğer $t < T$ ($T$ arzu edilen örneklem genişliği) ise 2.nci adıma gidilir. Aksi durumda işlem bitirilir.

## 3. Uygulamalar

### *3.1. Uygulama 1*

Kullanılan veri, zeka testleri yapılan bir merkezde belirli bir aralıkla merkeze gelen 118 kişiye uygulanan anket çalışmasından elde edilmiştir. Anket çalışmasından çıkarılan temel değişkenler; kişinin hayat memnuniyet derecesi (0=düşük derecede memnuniyet, 1= yüksek derecede memnuniyet), yaş(yıl olarak), zeka testi sonucu, eğitim(yıl olarak), aylık gelir(TL cinsinden) ve ağırlık(Kg) sürekli değişkenleri alınmıştır. Açıklayıcı değişkenler olan yaş($x_1$), zeka($x_2$), eğitim($x_3$), gelir($x_4$) ve ağırlık($x_5$) değişkenlerinin memnuniyet derecesi üzerine etkilerini incelemek amacı ile ilk olarak binary lojistik regresyon uygulanmıştır. Daha sonra SAS 9.3 programı kullanılarak Bayesci yaklaşım incelenmiştir.

$P$ : memnun olma olasılığını ifade ederse, model

$$\log it(p_i) = \log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)$$
$$= \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5$$

olur. $\alpha$ ve $\beta_i\,(i=1,\dots,5)$ parametreleri olarak diffüz normal seçilirse,

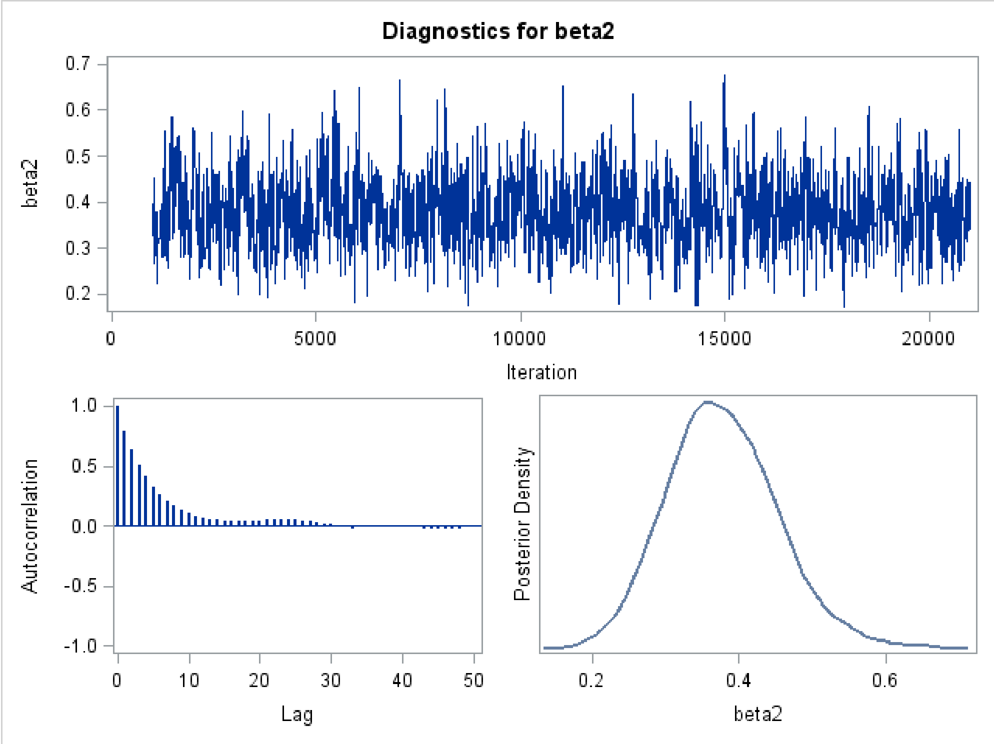
$\alpha \sim N(0, 1000)$ , $\beta_i \sim N(0, 1000)$ , $(i=1,...,5)$

biçimindedir. Yakınsama 1000 iterasyonda sağlanmış ve yakma peryodu olarak kullanılmıştır. Yakma peryodundan sonra 5000 iterasyonla sonsal özetler, inanç aralığı ve Monte Carlo Standart hataları Tablo 1’ de verilmiştir.

**Tablo 1.** Sonsal özetler

| Parametre | Ortalama | SS | MC Hata | MC Hata/SS | %95 İnanç Aralığı | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sabit | -31.1833 | 6.5343 | 0.2567 | 0.0393 | -44.3497 | -19.0069 |
| Yaş | 0.0194 | 0.0291 | 0.00109 | 0.0374 | -0.0385 | 0.0753 |
| Zeka | 0.3784 | 0.0753 | 0.00290 | 0.0385 | 0.2261 | 0.5213 |
| Eğitim | -0.0268 | 0.0293 | 0.00111 | 0.0377 | -0.0857 | 0.0103 |
| Gelir | 0.00201 | 0.000734 | 0.000032 | 0.0439 | 0.000683 | 0.00349 |
| Ağırlık | -0.0740 | 0.0222 | 0.000758 | 0.0342 | -0.1169 | -0.0308 |

Tablo 1’de bütün parametreler için MC hatanın SS’nin %5’inden küçük olduğu açıktır. Dolayısıyla Thumb kuralına göre yakınsama sağlanmıştır. %95 inanç aralığına bakılarak zeka, gelir ve ağırlığın yaşam memnuniyeti üzerinde etkili olduğu söylenebilir. Yakınsamanın gerçekleştiğine dair diğer kanıtlar ise parametrelere ait iz grafiği, sonsal yoğunluk grafiği ve otokorelasyon grafiğidir. Bütün parametreler için bu grafikler incelendiğinde yakınsama problemi olmadığı açıktır. Örnek olarak Beta2(zeka) parametresine ilişkin grafikler Şekil 1’de verilmiştir.




**Şekil 1.** Beta2 parametresi için yakınsama grafikleri

Klasik ve Bayesci yaklaşımın karşılaştırılması amacıyla AIC ve BIC değerleri hesaplanmış ve Tablo 2' de verilmiştir. Açık bir şekilde, AIC ve BIC değerlerinin her ikisi de Bayesci yaklaşımda çok daha küçük olduğu görülmektedir.

**Tablo 2.** AIC ve BIC değerleri

| | Yaklaşım | |
|---|---|---|
| Kriter | Klasik | Bayesci |
| AIC | 192.171 | 132.743 |
| BIC | 188.465 | 124.887 |

### *3.2. Uygulama 2*

$N$ tane böcekten farklı dozajda çevresel zehire $(x)$ maruz kalanlardan ölenlerin sayısını $(y)$ gösteren veri seti Tablo 3' de verilmiştir.

**Tablo 3.** Veri seti

| n | y | x | n | y | x | n | y | x | n | y | x | n | y | x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 25.7 | 8 | 2 | 35.9 | 5 | 2 | 32.9 | 7 | 7 | 50.4 | 6 | 0 | 28.3 |
| 7 | 2 | 32.3 | 5 | 1 | 33.2 | 8 | 3 | 40.9 | 6 | 0 | 36.5 | 6 | 1 | 36.5 |
| 6 | 6 | 49.6 | 6 | 3 | 39.8 | 6 | 4 | 43.6 | 6 | 1 | 34.1 | 7 | 1 | 37.4 |
| 8 | 2 | 35.2 | 6 | 6 | 51.3 | 5 | 3 | 42.5 | 7 | 0 | 31.3 | 3 | 2 | 40.6 |

$y_i$'ler $y_i \mid p_i \sim Binomial(n_i, p_i)$ şeklinde ifade edilir ve

$$logit(p_i) = log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = \alpha + \beta x_i \ .$$

$\alpha$ ve $\beta$ üzerindeki önsellerin her ikisi de diffüz (dağınık) önseller olup,

$$\alpha \sim N(0, 10000)$$
$$\beta \sim N(0, 10000)$$

alınarak WinBUGS programı kullanımıyla Tablo 4 ve Tablo 5' deki sonuçlar elde edilmiştir.

**Tablo 4.** Yakma periyodu süresinde sonsal özetler

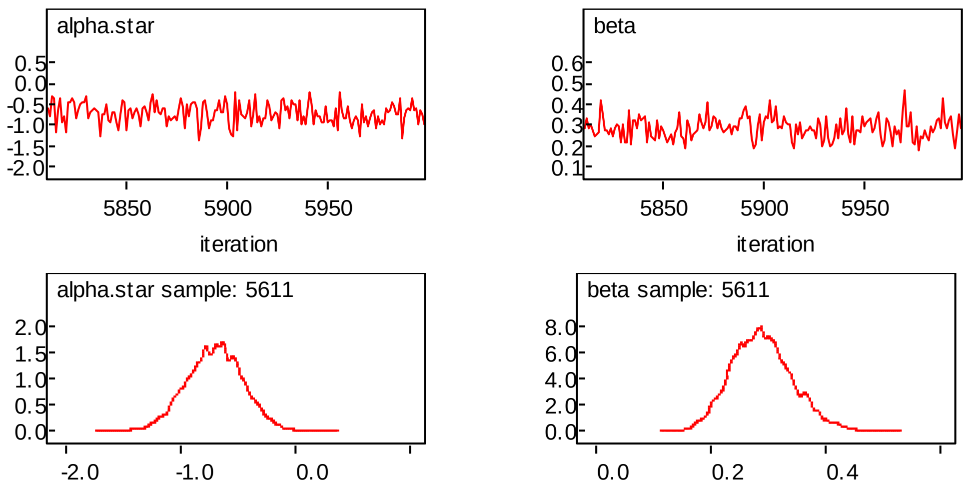
| Düğüm | Ortalama | S.S. | S.S.*5% | M.C.E. | 2,50% | Medyan | 97,50% | Başlama | Örnek |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alpha.star | -0,7041 | 0,2329 | 0,01165 | 0,01083 | -1,176 | -0,6801 | -0,2419 | 1 | 390 |
| Beta | 0,2906 | 0,05196 | 0,0026 | 0,00217 | 0,2066 | 0,2878 | 0,3986 | 1 | 390 |

Tablo 4' de 390 güncellemede yakınsamanın sağlandığı görülmektedir. Her bir parametrenin MC hata değerleri standart sapma değerlerinin %5' inden küçük bulunmuştur. Dolayısıyla yakma periyodu olarak 390 alınarak 5611 örneklem daha çekilerek parametre tahmini yapılmıştır.

**Tablo 5.** Sonsal özetler

| Düğüm | Ortalama | S.S. | M.C.E. | 2,50% | Medyan | 97,50% | Başlama | Örnek |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alpha.star | -0,7012 | 0,2472 | 0,003428 | -1,193 | -0,6938 | -0,2253 | 390 | 5611 |
| beta | 0,2904 | 0,05381 | 7,27E-04 | 0,1933 | 0,2877 | 0,404 | 390 | 5611 |

Tablo 5' de %2.5-%97.5 inanç aralığı 0 değerini içermediği için tüm parametreler anlamlıdır.




**Şekil 2.** Sonsal parametre tahminleri için yakınsama grafikleri

Şekil 2' deki grafikler de, yakınsamanın sağlandığına dair kuvvetli deliller sunmaktadır.

**Tablo 6.** AIC ve BIC değerleri

| | Yaklaşım | |
|---|---|---|
| Kriter | Klasik | Bayesci |
| AIC | 94.21 | 84.77 |
| BIC | 91.31 | 82.65 |

## 4. Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada, uygulamada çok yoğun olarak kullanılan Bayesci yaklaşımlar için basit bir literatür taraması verilmiştir. Son 10 yılda yoğun olarak kullanılan MCMC yöntemlerinden Gibbs örneklemesi ve Metropolis algoritması sunulmuştur. Lojistik regresyonun iki farklı uygulaması yapılmıştır. Birinci uygulamada, SAS 9.3 programında uygun makro yazılımı ile Metropolis algoritması kullanılmıştır. İkinci uygulamada, WinBUGS programında Gibbs örneklemesi kullanılmıştır. Her iki uygulama açık bir şekilde göstermiştir ki Bayesci yaklaşımlar klasik yaklaşımlara göre çok daha küçük AIC ve BIC değerleri vermektedir. Dolayısıyla bu çalışma için Bayesci yaklaşımların tercih edilebileceğine dair yeterli deliller sunmaktadır.

Model belirsizliğini önseller kullanarak göz önüne alan Bayesci yaklaşımların kullanımı, hesaplama zorlukları nedeniyle çoğu zaman ihmal edilir. Oysa bu çalışmada da görüldüğü gibi MCMC yöntemlerinin kullanımıyla bu zorlukların üstesinden rahatlıkla gelinebilir.

## Kaynaklar


Berger, J.O., 1985. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, New York: Springer- Verlag.

Berger, J.O., 2006. The Case for Objective Bayesian Analysis. *Bayesian Analysis,* **3**,385–402.

Berger, J.O. and Wolpert, R., 1988. The Likelihood Principle, 9, Second Edition, Hayward, California: Institute of Mathematical Statistics, monograph series.

Bernardo, J.M. and Smith, A.F.M., 1994. Bayesian Theory, New York: John Wiley & Sons.

Bernardo, J.M. and Smith, A.F.M., 2000. Bayesian Theory, New York: John Wiley & Sons.

Carlin, B.P. and Louis, T.A., 2000. Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis, Second Edition, London: Chapman & Hall.

Chen, M.H., Shao, Q.M. and Ibrahim, J.G., 2000. Monte Carlo Methods in Bayesian Computation, New York: Springer-Verlag.

Congdon, P., 2001. Bayesian Statistical Modeling, John Wiley & Sons.

Congdon, P., 2003. Applied Bayesian Modeling, John Wiley & Sons.

Congdon, P., 2005. Bayesian Models for Categorical Data, John Wiley & Sons.

Gelfand, A.E., Hills, S.E., Racine-Poon, A. and Smith, A.F.M., 1990. llustration of Bayesian Inference in Normal Data Models Using Gibbs Sampling. *Journal of the American Statistical Association,* **85**, 972–985.

Gelman, A., Carlin, J., Stern, H. and Rubin, D., 2004. Bayesian Data Analysis, Second Edition, London: Chapman & Hall.

Geman, S. and Geman, D., 1984. Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution, and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence,* **6**, 721–741.

Gilks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J., 1996. Markov Chain Monte Carlo in Practice, London: Chapman & Hall.

Goldstein, M., 2006. Subjective Bayesian Analysis: Principles and Practice. *Bayesian Analysis,* **3**, 403–420.

Jeffreys, H., 1961. Theory of Probability, third Edition, Oxford: Oxford University Press.

Kass, R.E. and Wasserman, L., 1996. Formal Rules of Selecting Prior Distributions: A Review and Annotated Bibliography. *Journal of the American Statistical Association,* **91**, 343–370.

Liu, J.S., 2001. Monte Carlo Strategies in Scientific Computing, Springer-Verlag.

O'Hagan, A., 1994. Bayesian Inference, volume 2B of Kendall's Advanced Theory of Statistics, London: Arnold.

Robert, C.P., 2001. The Bayesian Choice, Second Edition, New York: Springer-Verlag.

Robert, C.P. and Casella, G., 2004. Monte Carlo Statistical Methods, 2nd ed. New York: Springer-Verlag.

Tanner, M.A., 1993. Tools for Statistical Inference: Methods for the Exploration of Posterior Distributions and Likelihood Functions, New York: Springer-Verlag.

Wasserman, L., 2004. All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference, New York: Springer- Verlag.