# GEORG CANTOR'UN SONSUZLARI

**Zekeriya GÜNEY**
*Muğla Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen/Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi ABD*
E-mail: zguney@mu.edu.tr

**Nebiye KORKMAZ**
*Muğla Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen/Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi ABD*
E-mail: nkorkmaz@mu.edu.tr

***Özet***
*Georg Cantor, kümeler kuramı ve matematiksel biçimciliğin öncüsüdür. Cantor'un özellikle sonsuzluklarla ilgili çalışmaları matematikte devrim niteliğindedir ve başta topoloji olmak üzere matematiğin çeşitli alanlarında önemli gelişmelere yol açmıştır. Cantor Kuramı'nın pür matematiksel karakteri, matematiğe ve matematik eğitimine yeni bir bakış açısı getirmiş ve matematiğin asıl eğitimsel öneminin, bir zihin jimnastiği olmasından geldiği daha iyi anlaşılır olmuştur. Matematiğin, herhangi bir ulus diline bağlı olmayan biçimsel sembolik dili ise, onun evrensel ve dakik bir iletişim aracı olmasının en önemli göstergesidir. Çalışmamızda pür matematiksel teorilerin gelişim süreçleri için en öğretici ve en güzel örneklerden birini oluşturan bu önemli konu, tarihsel gelişimi içinde ele alınmış ve modern sonsuzluklar teorisinin özgün bir pür sembolik biçimsel anlatımı sunulmuştur.*
***Anahtar Kelimeler***: *Matematiksel sonsuz, kardinalite, matematiksel formalism.*

***Abstract***
*Georg Cantor is the pioneer of set theory and mathematical formalism. Cantor's studies especially on infinity are revolutionary in mathematics and led important improvements in various fields of mathematics, mainly on topology. The pure mathematical character of Cantor's Theory brought a new aspect to mathematics and mathematics education and it is beter understood that the actual educational importance of mathematics is coming from it is being a mental gymnastics. Mathematics symbolic language which does not depend to any nation's language, is the most important indicator of its being an universal and punctual means of communucation. In our study, this subject which constitutes one of the most instructive and most beautiful examples for the development processes of pure mathematical theories, is discussed in its historical development and a unique pure symbolic formal expression of modern infinity theory is presented.*
***Keywords:*** *Mathematical infinity, cardinality, mathematical formalism*

## 1. Giriş

Sonsuzluk insanoğlunun çözemediği ürkütücü sırlardan biridir. Tarih boyunca sonsuzluk kavramına dair ileri sürülen düşüncelerde onun gizemliliği vurgulanmıştır: "Sonsuzluk gizemini asla çözemeyeceğimiz bir gerçektir." (Aristo M.Ö. 384-322), "Gözlemleyebildiğimizin ötesinde kaldığından çözemeyeceğimiz bir sırdır." (Bacon 1214-1294), "Sonsuzluk düşünsel bir olgudur."

(İmmanuel Kant 1724-1804), “Sonsuzluk bir varsayımdır.” (Dekart 1596-1650), “Yalnız Tanrı sonsuzdur.” (St. Tomas Aquinas 1225-1234), “Sayılar da sonsuz olabilir.” (Galilei Galileo 1564-1642), “Sonsuzluğun da mertebeleri olabilir.” (Gauss 1777-1855), **“**Dehşet sonsuzluğuna zihinsel olarak dahi ulaşılamaz.” (Cauchy 1789-1857). İlk çağlarda Elea’lı Zeno (M.Ö. 450) sonsuzlukla ilgili paradoksal sonuçlara dikkat çekmiş, ortaçağ matematikçilerinden Saksonya’lı Albert de sonsuzlukla ilgili problemlere değinmiştir (Boyer, 1989; Yıldırım 1985; Rucker, 1983). Alman asıllı Rus matematikçisi Georg Cantor (Petersburg 1845-Halle 1913) ise, en azından çokluk sonsuzluğundaki gizemi ortadan kaldırmış ve sonsuzluğun mükemmel bir teorisini oluşturmuştur (Koetsier ve Mill, 1999; Verriest, 1964).

Matematikçiler sonsuzluk problemini büyüklük ve çokluk bakımlarından ele almışlardır. Aşağıda büyüklük bakımından sonsuz kısaca tanıtıldıktan sonra, Cantor’un çokluk sonsuzlarının ortaya çıkış öyküsü ve bunların sembolik biçimsel bir anlatımı işlenmiştir.

## 2. Araştırma Sonuçları

**Sonsuz Büyük:** J.Vallis (1616-1703) sonsuz büyüğü, 1655 yılında “sevgi düğümü” denilen $\infty$ simgesini kullanarak $1/0 = \infty$ eşitliği ile tanımlamıştır (Boyer, 1989; Hacısalıhoğlu, Hacıyev, Kalantarov, Sabuncuoğlu, Brown, İbikli ve Brown, 2000). $\infty$ ve $-\infty$ nesnelerinin $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesine eklenmesiyle $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ genişletilmiş gerçel sayılar kümesi elde edilir. Bu elemanlar, adi işlemler ve adi sıralama ile ilgili aşağıdaki varsayımları sağlar:

$$\infty + \infty = \infty,\ -\infty - \infty = -\infty$$

$$x\in\mathbb{R} \Rightarrow -\infty < x < \infty,\ x + \infty = \infty,\ x - \infty = -\infty,\ x/\infty = x/-\infty = 0$$

$$x\in\mathbb{R}^{+} \Rightarrow x.\infty = \infty,\ x.(-\infty) = -\infty,\ x / 0 = \infty$$

$$x\in\mathbb{R}^{-} \Rightarrow x.\infty = -\infty,\ x.(-\infty) = \infty,\ x/0 = -\infty .$$

Bunların dışında kalan,

$$\infty - \infty,\ 0. \infty,\ \infty : \infty$$

gibi ifadelere, ($\overline{\mathbb{R}}$’den belirli elemanların karşılık getirilmesi halinde birtakım çelişkilerin ortaya çıkması nedeniyle) belirsiz ifadeler denir (Saban, 1972). Yukarıdaki varsayımlardan, $\varepsilon$ ($\in\mathbb{R}^{+}$) ne olursa olsun, sonsuzların $\varepsilon$-komşuluklarında hiçbir gerçel sayının olamayacağı; başka bir deyişle sonsuzların yanına yaklaşılamayacağı (!) anlaşılır. Cauchy (1789-1957) gerçel değerli bir f fonksiyonunun ulaştığı sonsuzlukla ilgili olarak “eğer, $f(x)/x^n \to a \neq 0$ ise, f fonksiyonu n. mertebeden sonsuzluğa ulaşır.” tanımlamasını yapmıştır.

**Sonsuz Kümeler:** Kümeler, elemanlarının çokluğu bakımından “sonlu kümeler” ve “sonsuz kümeler” olmak üzere iki sınıfa ayrılır. “Satranç oyununda olası tüm hamleler” veya “bilinen tüm galaksilerdeki atomlar” sonlu kümeler oluşturur. Sonlu bir küme hiçbir öz altkümesi ile 1-1 eşlenemez. Sonsuz kümeler ise sonsuz çoklukta öz altkümeleri ile 1-1 eşlenebilirler. Euclid (M.Ö.III.yy), 13 ciltlik ünlü “Elemanlar” adlı eserinin 9. cildinde, sonsuzlukla ilgili bir tanım vermeden, asal sayılar kümesinin sonsuzluğunu kanıtlamıştır (Kutuzov, 1964). Galile (1564-1642) doğal sayılar kümesi ile bunun bir öz altkümesi olan tam-kare sayılar kümesi arasındaki $n \leftrightarrow n^2$

eşlemesini bir paradoks olarak yorumlamıştır. ( Simmons, 1963) Bernard Bolzano (1781-1848) ise, (0,1) aralığıyla, bunun iki katı uzunluktaki (0,2) aralığının, bijektif (1-1 örten)

$$f: (0,1) \rightarrow (0,2), \ f(x) = 2x$$

fonksiyonu ile 1-1 eşlenmesindeki çelişkisel duruma dikkat çekmiş (Boyer, 1989) ve ilk kez Dedekind (1831-1916), sonsuz kümeleri sonlulardan ayıran karakteristiği "bir öz altkümesine denk olmak" olarak tanımlamıştır (Crilly ve Johnson, 1998).

**Cantor'un Sonsuzlari:** Cantor, "(sonlu ya da sonsuz) iki kümenin birinden diğerine bijektif bir fonksiyon (1-1 eşleme) varsa, bu iki küme ( elemanlarının miktarı bakımından) denktir." biçimindeki basit bir varsayımdan hareketle "sonsuz kümeleri kıyaslamak cüretkar problemini çözmeye muvaffak olmuştur (Verriest, 1964)".

İlk çalışmalarını Berlin'de, Kummer, Kronecker ve Weierstrass'ın yanında yapan ve doktora tezini, 1869'da Halle Üniversitesinde sayılar teorisi üzerine hazırlayan Cantor, daha sonra da analiz çalışmıştır. 1870'de, danışmanı Edward Heine'nin önerisi üzerine, "Bir fonksiyonun bir trigonometrik seri ile temsilinin tek türlü olup olmadığı" problemini ele almış ve aynı yıl içinde, "f: $(0,2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer

$$a_o/2 + \Sigma(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

trigonometrik serisi, $\forall x \in (0,2\pi)$ için f(x)'e yakınsarsa, f fonksiyonu başka bir trigonometrik seri tarafından temsil edilemez." önermesini ileri sürmüştür. Cantor, 1871'de, $(0,2\pi)$ aralığından sonlu sayıda nokta çıkarıldığında da, eğer geriye kalan tüm x'ler için yukarıdaki seri f(x)'e yakınsarsa, f fonksiyonunun trigonometrik seri temsilinin yine tek türlü olacağını kanıtladı. 1872'de İsviçre'de Richard Dedekind (1831-1916) ile tanıştıktan sonra, hariç tutulan noktalar kümesinin ne kadar genişletilebileceğini araştırmaya başladı. Bu amaçla önce, türev kümesi (yığılma noktalarının kümesi) kavramını tanımlayarak, kümeleri, yığılma noktaları bakımından sınıflandırdı.

$$\begin{aligned}
A &= \{1/n_1+\ldots+1/n_k \mid n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}\},\\
D(A) &= \{1/n_1+\ldots+1/n_{k-1} \mid n_1,\ldots,n_{k-1} \in \mathbb{N}\},\\
D^2(A) &= \{1/n_1+\ldots+1/n_{k-2} \mid n_1,\ldots,n_{k-2} \in \mathbb{N}\},\\
&\ldots\\
D^{k-1}(C) &= \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\},\\
D^k(C) &= \{0\}.
\end{aligned}$$

gibi, k. türev kümesi tek eleman içeren kümelere, k. Cinsten yığılma noktalı kümeler diyerek, k. cinsten yığılma noktalı kümelerin hariç tutulması halinde de teoreminin geçerli olduğunu kanıtladı (http//ww.shu.edu/project/reals/ history/ cantor.html). Bu noktada, "hariç tutulan noktalar daha ne kadar genişletilebilir ?" sorusunu sordu. Buna cevap ararken, Cantor'un kafasına sonsuz kümeleri elemanlarının miktarı bakımından sınıflandırmak fikri gelmiş olabilir. 1873 te Dedekind'e "Doğal sayılar kümesi ile rasyonel sayılar kümesinin 1-1 eşlenebildiğini ve o halde bunların aynı miktarda eleman içerdiklerini" yazdı (Crilly ve Johnson, 1998). Cantor'un bu ünlü eşlemesi aşağıdaki gibidir: Rasyonellerin,

$$1/1 \rightarrow 1/2 \quad 1/3 \rightarrow 1/4\ldots$$
$$\swarrow \quad \nearrow \quad \swarrow$$

$$
\begin{array}{cccc}
2/1 & 2/3 & 2/5 & 2/7\ldots \\
\downarrow\ \nearrow & \swarrow & \nearrow & \\
3/1 & 3/2 & 3/4 & 3/5\ldots \\
\swarrow & \nearrow & & \\
4/1 & 4/3 & 4/5 & 4/7\ldots \\
\downarrow\ \nearrow & \ldots & &
\end{array}
$$

şeklindeki dizilişinden,

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
1/1 & 1/2 & 2/1 & 3/1 & 2/3 & 1/3\ldots
\end{array}
$$

eşlemesi elde edilir. Richard Dedekind, cevabında tüm cebirsellerin bile doğal sayılarla 1-1 eşlenebileceğinin kanıtını gönderdi (Crilly ve Johnson, 1998). Kanıt şöyledir: Satranç tahtası şeklinde fakat sonsuz satır ve sütunlu bir tablo düşünelim. Her m, n doğal sayı çifti için m. satır n. sütundaki kareye, katsayılarının mutlak değerlerinin toplamı m olan n. dereceden cebirsel denklemleri (yani tam katsayılı polinom denklemleri) yerleştirelim. Böylece her cebirsel denklem bir karede yer alır ve her karede de sonlu sayıda cebirsel denklem yer alır. Örnek olarak 3x2. karede,

$$3x^2 = 0,\ 2x^2 + x = 0,\ 2x^2 - x = 0,\ x^2 + 2x = 0,\ x^2 - 2x = 0,\ x^2 + x + 1 = 0,$$
$$x^2 - x + 1 = 0,\ x^2 + x - 1 = 0,\ x^2 - x - 1 = 0,\ x^2 + 2 = 0,\ x^2 - 2 = 0$$

olmak üzere 11 denklem olacaktır. Cebirsel sayılar, cebirsel denklemlerin kökleridir; bu kökler gerçel veya kompleks olabilirler. Şimdi tahtanın gözlerini çapraz olarak, yani 1x1, 1x2, 2x1, 3x1, 2x2, 1x3,… şeklinde sıralayalım. Her bir gözdeki denklemlerin sonlu sayıdaki gerçel köklerini de, i. sıradakinin 1.si, i-1. sıradakinin sonuncusundan hemen sonra gelecek, ve aynı cebirsel sayı tekrarlanmayacak şekilde sıralayalım. Böylece gerçel cebirsel sayıların bir dizisi elde edilmiş yani gerçel cebirsel sayılar doğal sayılarla 1-1 eşlenmiş olur.

Cantor aynı yıl içinde Dedekind'e yazdığı ikinci mektupta, olmayana ergi yöntemini kullanarak doğal sayılarla gerçel sayıların aynı miktarda olmadığını kanıtladı (Crilly ve Johnson, 1998; Rademacher ve Toeplitz, 1964). Gerçekte, çok doğal gibi görünen bu sonuç, yukarıda belirttiğimiz ve sanki tüm sonsuz kümeler birbirleri ile bir şekilde 1-1 eşlenebilecekmiş izlenimi veren şaşırtıcı sonuçlardan sonra elbette ki kanıt gerektiriyordu. Bunun için (0,1) aralığındaki gerçellerin doğal sayılardan çok olduğunu göstermek yeter. Çünkü $\varepsilon$ ( >0 ) ne olursa olsun

$$f:(0, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan(x/\varepsilon - 1/2)\pi$$

1-1 eşlemesi, istenildiği kadar küçük bir aralıktaki noktalara karşılık gelen gerçel sayıların tüm gerçel sayılardan daha az olmadığını gösterir. (0,1) aralığındaki gerçel sayıları sonsuz ondalıklı açılımları ile ele alalım ve bunların, doğal sayılarla,

$$g: \mathbb{N} \to (0,1),\ g(n) = 0,\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots$$

fonksiyonu tarafından 1-1 eşlendiğini varsayalım. Fakat

$$b_i = \begin{cases} 0, & a_{ni} = 1 \\ 1, & a_{ni} \neq 1 \end{cases}$$

olmak üzere, $b = 0, b_1b_2b_3\ldots$ gerçel sayısı (0,1) aralığında olduğu halde,

$$n\in\mathbb{N} \Rightarrow g(n) = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots\neq 0, b_1b_2b_3\ldots$$

olduğundan $g(n) = b$ olacak şekilde hiçbir n doğal sayısı yoktur ve o halde g'nin bir 1-1 eşleme olduğu varsayımımız yanlıştır.

Böylece iki tip sonsuz kümenin varlığı ortaya çıkmıştır: Doğal sayılarla 1-1 eşlenebilen (ve sayılabilir sonsuz adını alan) kümeler ve doğal sayılarla 1-1 eşlenemeyen (sayılamaz) kümeler. 1844'de Liouville, hiçbir cebirsel denklemin kökü olmayan aşkın (transandan) sayıların varlığını ortaya koymuştu. 1873'de Hermite *e* sayısının, 1882'de Lindemann $\pi$ sayısının aşkın olduğunu kanıtlamışlardı. Cantor ise 1874'de, istenildiği kadar küçük bir aralıkta sayılamaz çoklukta aşkın sayı olduğunu ve böylece istenildiği kadar küçük bir aralıktaki aşkın sayıların, tüm cebirsel sayılardan daha çok olduğunu kanıtlamıştır (Rademacher ve Toeplitz, 1964). Gerçekten eğer bir $(0,\varepsilon)$ aralığındaki aşkın'lar sayılabilir olsaydı (sayılabilir iki kümenin birleşimi de sayılabilir olacağından) bunlarla bu aralıktaki rasyonellerin birleşimi yani $(0,\varepsilon)$ aralığındaki tüm gerçel'ler de sayılabilir olur ve bu yukarıdaki (gerçel'lerin sayılamazlığı) sonucuyla çelişirdi.

Cantor 1874-1877 yılları arasında, iki boyutlu sürekliliğin bir boyutlu süreklilikten daha çok nokta içerdiğini kanıtlamaya çalıştı. Bu olmayınca, Heinrich Weber, Rudolph Lipshitz gibi birçok meslektaşlarının ısrarla savunduğu, "farklı boyuttan figürler arasında 1-1 bir eşleme olamaz." tezinden vazgeçerek, Gaus'un doğumunun yüzüncü yılından (30.05.1877) sonra, farklı boyuttan kümeler arasında 1-1 eşlemeler aramaya koyuldu. 20.06.1877 tarihli mektubunda, Dedekind'e, "yüzeyler, solid'ler, hatta $\rho$-boyutlu sürekli figürler sürekli eğrilerle bire-bir eşlenebilirler: sonuç olarak yüzeyler, solidler, hatta $\rho$-boyutlu figürler eğrilerle aynı kuvvete sahiptirler." diye yazdı ve n-boyutlu bir kübün noktalarının birim aralıktaki noktalarla 1-1 eşlenebileceğini gösterdi (Crilly ve Johnson, 1998; Scholz, 1999). Kanıtını, birim aralıktaki her sayının sonsuz ondalıklı açılımının tek türlü olarak gösterilebileceğine dayandırmış ve

$$x_i = \alpha_{i,1}/10+\alpha_{i,2}/10^2+...+\alpha_{i,\nu}/10^\nu+...$$

olmak üzere, n-küb'ün bir $(x_1,x_2,...,x_n)$ noktasına, birim aralığın

$$y = 0.\alpha_{1,1}\alpha_{2,1}...\alpha_{n,1}\alpha_{1,2}\alpha_{2,2}...\alpha_{n,2}...\alpha_{1,3}...\alpha_{2,3}\alpha_{n,3}...$$

noktasını karşılık getirmiştir (Crilly ve Johnson, 1998). Böylece, örnek olarak, "açıkça 2-boyutlu (!)" olan bir karenin içindeki noktalar kümesi ile, "1-boyutlu olduğu besbelli (!)" olan, karenin bir kenarındaki noktalar kümesi,

$$[0,1]^2 \leftrightarrow [0,1]$$
$$(0,a_1\, a_2\, a_3\ldots\ 0,b_1\, b_2\, b_3\ldots) \leftrightarrow 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$$

biçiminde 1-1 eşlenebiliyordu (Verriest, 1964). Cantor, mektubunda bu eşleme karşısındaki heyecanını "Görüyorum ama inanamıyorum." şeklinde ifade etmiştir (Boyer, 1998; Taşkesen, 2001; Crilly ve Johnson, 1998). Fakat Dedekind, Cantor'un eşlemesindeki pürüzü hemen görmüş ve bu eşlemenin 1-1 olmadığını kendisine bildirmiştir. Gerçekten, bu bir 1-1 eşleme değildir; çünkü örnek olarak,

$$(0,2999\ldots;0,4731\ldots) = (0,300\ldots;0,4731\ldots)$$

olduğu halde, bunlara karşılık gelen, 0,249793… ve 0,340703… gerçel sayıları farklıdır. Cantor iki gün içinde yanılgısını düzeltmiş ve Dedekind'e yeni bir ispat sunmuştur; yanılgısını, sayıların ondalık açılımlarında, her sıfır veya ardışık sıfırlar grubu ile bunlardan hemen sonra ilk sıfırdan farklı ondalığı bir bir blok olarak ele alıp, aynı karma kuralını uygulayarak düzeltmiştir.(Rademacher ve Toeplitz, 1964). Böylece, basit ve sezgisel boyut kavramı hemen problemli hale gelmiş ve zamanın matematikçilerinin inceleme altına aldıkları bir konu olmuştur.

Dedekind, Cantor'un iddiaları ve kanıtları karşısında, farklı boyut'tan kümeler arasında, 1-1 eşleme yapılabileceğini kabul etti fakat bu kez de, eşlemenin sürekli olamayacağını savundu. Cantor'a, "Eğer, bir *a* boyutlu A sürekli manifoldunun noktaları ile *b* boyutlu bir B manifoldunun noktaları arasında 1-1 ve tam bir eşleme oluşturulabilirse, bu eşlemenin eğer *a* ve *b* eşit değilse süreksiz olması gerekir." diye yazdı. Cantor bunun da kanıtının gerektiğine dair ısrar etti. Cantor'un "Manifoldlar teorisine katkı" eserinin basılmasıyla, boyut kavramı ile ilgili çalışmalar hız kazandı. Jakob Lüroth (1844-1910), Johannes Thomae (1840-1921), Enno Jürgens (1849-1907), Eugen Netto (1848-1919) ve bizzat Cantor, sürekli 1-1 eşlemeler altında boyut değişmezliği savını kanıtlamaya koyuldular. İspat girişimleri ilginç fakat son derecede karmaşıktı. Belki de, o sıralarda henüz gelişmemiş durumda olan topoloji'nin araçlarının yeterince kullanılamaması yüzünden kesin sonuç alınamadı. Cantor, 1878'in sonunda Dedekind'e, "Bana öyle geliyor ki durum hala tam olarak çözülmedi." diye yazmıştır. 1879'daki mektubunda ise, problemi "Bir sürekli $M_\mu$ ve bir sürekli $M_\nu$, $\mu < \nu$ halinde, $M_\mu$'nün her bir elemanına $M_\nu$'nün bir tek elemanı ve $M_\nu$'nün her bir elemanına $M_\nu$'nün bir veya daha çok elemanı karşılık gelecek şekilde, sürekli eşlenemezler." şeklinde ifade ederek, ispatı için bir yıldan çok zaman istemiştir. 1880'lerde birçok matematikçi, yapılan çalışmaların, Cantor'un boyut paradoksunu çözdüğünü düşünüyordu. Ancak 1890'da Giuseppe Peano (1858-1932), (*Peano Eğrisi* ile), 1891'de Hilbert (*Hilbert Eğrisi* ile) birim aralığı, birim karenin noktalarına sürekli dönüştürerek bu inançları sarsmışlardır. Ayrıca, Henri Lebesgue (1875-1941) naif geometrik sezgilerin yanlış çıkabileceğini gösteren ve Peano'nunkinin aksine katlı noktaları da olmayan, ölçülebilir bir alana sahip ilginç bir eğri örneği vermiştir. Topolojinin ünlü isimlerinden Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) ise, Arthur Schoenflies tarafından "Mengenlehre" (1898) adlı eserde konu edilen, " m≠n için m-boyutlu bir domain'den n-boyutlu bir domaine 1-1 sürekli bir fonksiyon gerçekten mümkün müdür?" sorusuna karşılık, "Bunu ispatlamak son derecede zor görünüyor, ve belki bu uzun bir süre çözülmemiş bir problem olarak kalacak." Yorumunu yapmıştır; 1910'da, Hilbert'e gönderdiği mektupta ise, "tek ve çift boyutlu yuvarlar ve onların dönüşümleri arasındaki topolojik farklılığa ilişkin" kısmi bir çözüme ulaştığını yazmıştır 5, (Boyer, 1989; Crilly ve Johnson, 1998; Scholz, 1999; Dalen,1999).

Cantor, sayılabilir sonsuzlukla gerçel sayıların sonsuzluğu (continum) arasında başka sonsuzluk olup olmadığını araştırmış, sonunda böyle bir sonsuzluğun almadığını varsayım olarak ileri sürmüştü. 1878'de, "Ya sayılabilir ya da en az continium" diye ifade ettiği bu varsayım, Hilbert'in 1900 kongresinde sunduğu çözülememiş 23 problemden biridir ve *continium problemi* olarak bilinir. Doğal sayılarınkinden büyük, gerçel sayılarınkinden küçük bir sonsuzluk bulunabilirse, bu ünlü problem çözülmüş olacaktı; fakat tüm çabalara karşın çözülememiştir. Cantor'un da, kendi hipotezini kanıtlama çabaları, kendi küme teorisinde (aşağıda değineceğimiz) bazı tutarsızlıklar ortaya çıkana kadar sürmüştür. 1940'da Kurt Gödel, *continium problemi'*nin kümeler teorisinin aksiyomları ile çözülemeyeceğini; 1963'de Poul Cohen, *Cantor Hipotezi*'nin kümeler teorisinin aksiyomlarından bağımsız olduğunu kanıtlamışlardır (Taşkesen, 2001; Halmos, 1987).

Cantor, "Gerçel sayıların sonsuzluğundan daha büyük sonsuzluklar var mıdır?" sorusuna cevap ararken, yukarıda açıkladığımız gibi, her n doğal sayısı için $R^n$' lerin, istenildiği kadar küçük bir aralığın sonsuzluğundan daha büyük sonsuzluklar olmadığını kanıtlamış, fakat bunlardan daha büyük bir sonsuz küme olarak,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

gerçel değerli fonksiyonlar kümesini bulmuştur. Gerçekten bu kümenin sadece gerçel sayılar kadar fonksiyon içerdiği varsayılırsa,

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ h(x) = f_x$$

biçiminde bir 1-1 eşlemenin varlığını kabul etmek gerekir. Fakat bu durumda

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f_x(x) + 1$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$'ye ait olduğu halde, bunun h altında orijinali olmaz ve varsayım yanlış olur. Buna göre, (Evren'in, bir küçük zerrecikten, büyük patlama (big-bang) ile oluştuğunu ileri süren astronomi teorilerine de anlam katan), istenildiği kadar küçük çaplı bir toz zerreciğinin noktalarının, istenildiği kadar büyük çaplı bir uzay parçasının noktalarından, hatta istenildiği kadar büyük boyutlu bir soyut uzayın noktalarından daha az olmamasına karşın, fonksiyonlar bunlardan çoktur! Cantor sonsuzluklar teorisine son noktayı "Her sonsuzluktan daha büyüğü vardır." teoremini kanıtlayarak koymuştur. Gerçekten, (sonlu ya da sonsuz) bir A kümesinin alt kümelerinden oluşan P(A) kuvvet kümesinin elemanları A'nın elemanlarından çoktur. Çünkü eğer

$$f: A \to 2^A,\ f(x) = A_x \subset A$$

biçiminde bir 1-1 eşleme olduğunu varsayarsak,

$$B = \{x \mid x \notin A_x\}$$

kümesinin f altında orijinali olmaz! ve çelişkiye düşülür. Kümeler teorisi ile ilgili biçimselleştirme (formalizasyon) çalışmaları Cantor'dan önce, George Peacock (1791-1858), Duncay Gregory (1806-1871), William Rowan Hamilton(1805-1865), Augustos De Morgan (1806-1871), George Bole (1815-1864) gibi matematikçiler tarafından gerçekleştirilmişti. Tüm bunlar daha çok sonlu kümelerle ilgiliydi. Sonsuz kümeleri de içeren ilk önemli küme teorisini Cantor oluşturmuştur. Cantor orijinli küme teorisi, tüm kümelerden oluşan mutlak bir evrensel kümenin varlığını temel almıştır. Kümeler x,y,z ile gösterilir ve bir eleman, tek elemanlı bir küme olarak düşünülür. Mantığın simgeleri, varsayımları ve çıkarım kuralları geçerlidir. Tüm önermeler simgelerle formülleştirilmiştir. Örnek:

$$x = \phi := \forall y\,(y \notin x)\,,$$
$$|x| = 1. = \exists y \forall z\,(z \in x \Rightarrow z = y).$$

Varsayımlar: 1. (extensionality-kaplamsallık ) $\forall z\,(z\in x \Leftrightarrow z\in y) :\Rightarrow x = y$
2. (Comprehension-kapsamlılık) $\exists x \forall y\,[y\in x \Leftrightarrow F(y)] \Leftrightarrow x = \{y \mid F(y)\}$
3. (Seçme aksiyomu) $\exists f : x \to \cup x,\ f(x)\in x$

Cantor seçme aksiyomunu, örnek olarak

$$\aleph_o \leq \#x \Rightarrow \exists y \subset x,\ \#y \leq \aleph_o$$

(Her sonsuz kümenin en az bir sayılabilir sonsuz alt kümesi vardır.) “Her küme iyi sıralanabilir” gibi teoremlerin ispatında sezgisel olarak kullanmış fakat bunun formülünü vermemiştir (Taşkesen, 2001; Halmos, 1987). Cantor’un 1884’de Berlin Üniversitesine geçme isteği Schwarz ve Kronecker tarafından engellendi. 1884’de Mittag Leffler’e Kronecker’i tenkit eden 52 mektup yazmıştır. 1895-1897 de küme teorisine dair ilk kitaplarını yayınladı. (Schröder-Bernstein Teo. diye anılan) ünlü,

$$x \subset y,\ z \subset t,\ \# x = \# t\ ,\ \# z = \# y\ \Rightarrow\ \# y = \# t$$

teoremini kanıtladı. 1897’de Cantor Küme Teorisi ile ilgili ilk paradoks Casere Burali–Forti (1861-1931) tarafından “Tüm ordinallerin kümesi de ordinaldir.” şeklinde yayınlandı. Gerçekte Cantor da, 1885 ‘de tüm kümelerin kümesini varsaymanın, kendi ispatladığı “Her kardinalden daha büyüğü vardır” teoremi ile çeliştiğini görmüştür. 1902'de, birbirlerinden bağımsız olarak, Bernard Arthur William Russell (1872-1970) ve Zermelo’nun, bulduğu “Russel Paradoksu” son nokta olmuştur (Crilly ve Johnson, 1998). Gerçekten 2. aksiyomda F(y) açık önermesi olarak $y \notin y$ alınır ve sonra y yerine x yazılırsa

$$\exists x \forall y\ [y \in x \Leftrightarrow y \notin y] \Rightarrow \exists x\ [x \in x \Leftrightarrow x \notin x]$$

çelişkisi ortaya çıkar. Russel, bulduğu bu paradoksu o sıralarda matematiği biçimselleştirme çabalarının son aşamasında olan Frege’ye gönderdiğinde, Frege, Matematiğin Temelleri’ne dair ünlü eserinde, “Matematik sendeliyor… Bir bilim adamı için tamamladığı çalışmasının dayandığı temelin birden çökmesinden daha tatsız bir şey olamaz. Yapıtım tam basımevinden çıkmak üzereyken Bernard Russell’den aldığım bir mektup benim için işte böyle bir tatsızlık yarattı.” diye yazmıştır.

Russell ve A.N. Whitehead (1861-1947), paradoksların çıkardığı karmaşayı ortadan kaldırmak ve matematiği sağlam bir temele oturtmak için ünlü “Principia Mathematica” yı yazmışlardır. Zermelo, Fraenkel, Von Neumann, Bernays ve Gödel, matematiğin biçimselleştirilme çalışmalarına önemli katkılar yapmışlardır. Hilbert’in 23 probleminden 2. si “Aritmetik aksiyomlarının tutarlılığı” problemidir. Hilbert bunun kanıtlanması için önce matematiğin temelden tam biçimselleşmesi gerektiğini savunmuş ve bunu gerçekleştirebilmek için de, sonradan bir ekol haline gelen ünlü Hilbert programını başlatmıştır. Ancak yapılan çalışmalar, Gödel’in bunun kanıtlanamayacağını kanıtlamasıyla büyük darbe almıştır ,(Penrose, 1998; Crilly ve Johnson, 1998; Sesil, 1971).

Cantor’un çalışmaları, Matematiğin gelişmesinde büyük önem taşır. Hurwitz ve Hadamard, 1897 Zürih kongresinde Cantor’un çalışmalarından övgüyle söz ettiler. Lebesque, Cantor teorisini temel alarak 1901’de “ölçüm teorisi”ni, 1902’de integral teorisini oluşturdu. Kronecker gibi birçok matematikçide hakim olan “sezgiselci” anlayış yerini biçimselcilik (formalizm) anlayışına bıraktı (Taşkesen, 2001; Crilly ve Johnson, 1998) Cantor, devrim niteliğinde buluşları olan gelmiş geçmiş 16 bilim adamı arasında yer almıştır (Gleick, 1995). Bu yüzyılın en büyük matematikçisi ödülü için tek aday olan David Hilbert (1862-1943)’ “İnsan aktivitesinin en güzel ve en şaşırtıcı ürünleri” yorumunu yapmış ve “Hiç kimse bizi Cantor’un bizim için yarattığı cennetten kovamayacaktır.” demiştir (Taşkesen, 2001; Crilly ve Johnson, 1998). Ancak Cantor’da çoğu ünlü bilim adamı gibi, bir aziz mertebesine çıkarılmadan önce haksız yere hayli hırpalanmıştı. Leopold Kronocker (1823-1891), Cantor’un çalışmasını “şarlatanlık” olarak nitelemiş ve yayınlanmasını engellemeye çalışmıştır. Jules Henri Poincare ise, “Gelecek kuşaklar Cantor’un kümeler teorisini insanin atlatmış olduğu bir hastalık olarak görecektir.” demiştir (Jerry, 1999).

Ernst Zermelo (1871-1953), Cantor’un küme teorisine ve topolojiye olan katkılarını yayınlamıştır. Cantor’un çalışmalarında temel aldığı, yığılma noktası, türev kümesi, yoğun küme, ayrılmış küme, gibi birçok topolojik kavram, ilk önce, Giuseppe Peano (1858-1932) ve Camille Jordan (1838-1921) tarafından geometride kullanılmış ve birçok sezgisel geometrik düşüncenin formüle edilmesinde ya da ortadan kalkmasında işe yaramıştır (Crilly ve Johnson, 1998).

Cantor, çok basit bir varsayımdan hareketle, salt akıl yoluyla ortaya çıkardığı sonsuzlukların, bir aritmetiğini de oluşturmuştur. Burada onun teorisini son derecede özetleyerek açıklamaya çalıştık. Cantor'un, buluşlarını çağdaşı matematikçilere kabul ettirebilmek için sarfettiği eforun, buluşları için sarfettiğinden fazla olduğu söylenir. Özellikle Kronecker (1823-1891) ile sert tartışmaları olmuştur. Bu tartışmalar sinirlerini bozmuş ve Cantor 1918'de bir akıl hastanesinde vefat etmiştir.

Aşağıda Cantor Kardinalite Teorisi'nin pür simgesel bir özeti verilmiştir (Güney 1993; Güney, 2003; Güney, 2004a; Güney, 2004b; Güney, 2004c; Güney ve Özkoç, 2010):

Kümelerin Denkliği:

$$\begin{gathered} A\sim B \\ :\Leftrightarrow \\ \exists f \in B^{A},\ \ f[A] = B \\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \end{gathered}$$

Teorem.

$$\begin{gathered} \mathcal{A} = \{A \mid A \notin A\}, \\ \sim\, = \{(A,B) \mid\ A\sim B\ \} \subset \mathcal{A}^2 \\ \Rightarrow \\ \forall A,B,C \in \mathcal{A} \\ A\sim A \\ A\sim B \Rightarrow B\sim A \\ A\sim B,\ B\sim C \Rightarrow A\sim C \end{gathered}$$

Sonlu (s), Sonsuz (ss), Sayılabilir Sonsuz (syss), Sayılabilir (sy), Sayılamaz (syz) :

$$\begin{aligned} &A\ (s) &&:\Leftrightarrow\ \ \forall B \subsetneq A,\ B \nsim A \\ &A\ ss &&:\Leftrightarrow\ \exists\, B \subsetneq A\ ,\ B \sim A \\ &A\ syss &&:\Leftrightarrow\ \ A \sim \mathbb{N} \\ &A\ sy &&:\Leftrightarrow\ \ A\sim\mathbb{N} \vee\ (\forall B \subsetneq A,\ B \nsim A) \\ &A\ syz &&:\Leftrightarrow\ \ A \nsim \mathbb{N} \vee (\ \exists\, B \subsetneq A\ ,\ B \sim A\ ) \end{aligned}$$

**Kardinal Sayı:**

$$[\ A\ ] = \{\ B \mid\ A \sim B\ \}$$

**Kardinal Sayılar Kümesi**:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{/\sim} := &\ \{\ [\ A\ ] \mid\ A \in \mathcal{A}\ \} \\ = &\ \{\ \ [\phi],\ \ [\{\phi\}],\ \ [\{\ \phi,\{\phi\}\}],\ [\ \{\phi,\{\phi\},\ \{\ \phi,\{\phi\}\}\}\ ], \\ &\qquad \ldots\quad [\mathbb{N}],\ \ldots,\ [\mathbb{R}],\ [\mathcal{F}]\ ,\ \ldots,\ [\ 2^{\mathcal{F}}\ ]\ ,\ \ldots,[\ (2^{\mathcal{F}})^{\mathcal{F}}\ ]\ ,\ldots\ \} \\ = &\ \{\ \ \{\phi\},\ \ \{\ \{\phi\},\ \{\ \text{Ali}\},\ \{\text{Veli}\},\ \ldots\ \},\ \{\ \{\ \phi,\{\phi\}\},\ \{\ \text{Ali, Veli}\},\ \ldots\ \}, \\ &\qquad \{\ \ \{\phi,\{\phi\},\ \{\ \phi,\{\phi\}\}\},\ \{\ \text{Ali, Veli, Can}\},\ \ldots\ \}, \\ &\qquad\quad \ldots,\ \{\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ K,\ A,\ Ç,\ \mathbb{Q},\ N^2,\ \mathbb{Q}^{999},\ \ldots\}, \end{aligned}$$

$$\ldots,\ \{\ (0,1), \mathbb{R}, \mathbb{R}^{9999},\ I, \mathbb{C}, T, \mathbb{C}^{99999}, \ldots \},\ \{\ \mathbb{R}^{(0,1)}, \mathcal{F}, \mathcal{F}^2, \ldots\}, \ldots \}$$

$$\#(\phi) = [\phi] = 0$$
$$\#(\{\phi\}) = [\{\phi\}] = 1$$
$$\#(\{\phi,\{\phi\}\}) = [\{\phi,\{\phi\}\}] = 2$$
$$\#(\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}) = [\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}] = 3$$
$$\ldots$$
$$\#(\mathbb{N}) = [\mathbb{N}] = \aleph_o$$
$$\#(\mathbb{R}) = [\mathbb{R}] = \aleph_1$$
$$\#(\mathcal{F}) = [\mathcal{F}] = \aleph_2$$
$$\ldots$$

$$\mathcal{K} = \{\#(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$
$$= \{0, 1, 2, 3, \ldots, \aleph_o, \aleph_1, \aleph_2, \ldots\}$$

**Kardinal Sayılarda Eşitlik:**

$$\#(A) = \#(B)$$
$$:\Leftrightarrow$$
$$A \sim B$$

**Kardinal Sayılarda Sıralama:**

$$\mathcal{K} = \{\#(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$
$$\leq = \{\ (\#(A), \#(B)) \mid \exists f: A \to B \text{ 1-1 } \} \subset \mathcal{K}^2$$

A'nın kardinal sayısı, B'nin kardinal sayısından küçük

$$:\Leftrightarrow$$
$$\#(A) \leq \#(B)$$

A'nın kardinal sayısı, B'nin kardinal sayısından kesin olarak küçük

$$:\Leftrightarrow$$
$$\#(A) < \#(B)$$
$$:\Leftrightarrow$$
$$\#(A) \leq \#(B) \wedge \#(A) \neq \#(B)$$

$$\#(A) \leq \#(B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\#(A) < \#(B) \vee \#(A) = \#(B)$$

$$\#(A) \not< \#(B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\#(A) \not\leq \#(B) \vee \#(A) = \#(B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\#(B) \leq \#(A)$$

$$\#(A) \not\leq \#(B)$$

$$\Leftrightarrow$$
$$\#(A) \not< \#(B) \wedge \#(A) \neq \#(B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\#(B) < \#(A)$$

**Kontinyum ( Continium-Süreklilik) Problemi**:

$$\{ k \mid \aleph_o < k < c \} = \phi \,?$$

**Cantor Varsayımı ( Cantor Hipotezi, Süreklilik Hipotezi):**

$$\{ k \mid \aleph_o < k < c \} = \phi$$

**Notasyon:**

$$\text{A'nın cardinal sayısı} := \# A$$
$$\#(2^A) := 2^{\#(A)}$$
$$\#(\mathbb{N}) = \aleph_0$$
$$\#(2^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph 0} = \#(\mathbb{N}) = \aleph_1 = c$$
$$\#(2^{2\mathbb{N}}) = \#(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = 2^{\aleph 1} = f = 2^{2\aleph 0}$$

**Hausdorff Hipotezi (Aleph Hipotezi ):**

$$\aleph_0 < 2^{\aleph 0} < 2^{2\aleph 0} < 2^{2\,2\aleph 0} < \ldots$$
$$\{ k \mid \aleph_o < k < 2^{\aleph 0} \} = \{ k \mid \{ k \mid 2^{\aleph 0} < k < 2^{2\aleph 0} \} = \ldots = \phi$$

**Kardinal Sayılarda Toplama:**

$$+:\ \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K},\ \ A \cap B = \phi,\ \ \#(A) + \#(B) = \#(A \cup B)$$

**Kardinal Sayılarda Çarpma:**

$$\times:\ \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K},\ \ \#(A) \times \#(B) := \#(A)\,\#(B) = \#(A \times B)$$

**Kardinal Sayılarda Üs Alma:**

$$\#(A)^{\#(B)} := \#(A^B)$$

**Teoremler:**

i.

$$\mathcal{K} = \{ \#(A) \mid A \in \mathcal{A} \}$$
$$\leq\ = \{ (\#(A), \#(B)) \mid \exists f: A \rightarrow B \text{ 1-1} \} \subset \mathcal{K}^2$$
$$\Rightarrow$$
$$(\mathcal{K}, \leq) \text{ p.-k- i.s-z.}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\#(A) \in \mathcal{K} \Rightarrow \#(A) \leq \#(A)$$
$$\#(A) \leq \#(B),\ \#(B) \leq \#(A) \ \Rightarrow\ \#(A) = \#(B)$$
$$\#(A) \leq \#(B),\ \#(B) \leq \#(C) \ \Rightarrow\ \#(A) \leq \#(C)$$

$$\forall A\ (\neq\phi) \subset \mathcal{K},\ \min A \in \mathcal{K}$$
$$\#(A),\ \#(B) \in \mathcal{K} \Rightarrow\ \#(A) \leq \#(B)\ \vee\ \#(B) \leq \#(A)$$

ii. $A \subset B \Rightarrow \#(A) \leq \#(B)$

iii.

$$f: (\mathcal{A}, \subset) \to (\mathcal{K}, \leq),\ f(A) = \#(A)$$
$$\Rightarrow$$
$$A \subset B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$$

iv. $0<1<2<\ldots<n$

v. A sonlu $\Leftrightarrow\ \#(A) < \aleph_o$

vi. A sayılabilir $\Leftrightarrow\ \#(A) \leq \aleph_o$

vii. A sonsuz $\Leftrightarrow\ \aleph_o \leq \#(A)$

viii. A sayılamaz $\Leftrightarrow\ \aleph_o < \#(A)$

ix. A sayılabilir, B sonsuz $\Leftrightarrow\ \#(A) \leq \aleph_o \leq \#(B)$

x. $0 < 1 < 2 < \ldots < \aleph_o < \ldots < c < \ldots < f < \ldots < 2^{f}\ \ldots$

xi. $k \in \mathcal{K} \Rightarrow \exists\, p \in \mathcal{K},\ k < p$

xii. $\#(2^{\mathbb{N}}) = c$

xiii. $\#(\,_2 2^{\mathbb{N}}) = \#(\mathcal{F})$

xiv. $\aleph_0 < {}_2\aleph_0 < {}_2 2^{\aleph_0} < {}_2 2^{\,2^{\aleph_0}} < \ldots$

xv. $a,b,c \in \mathcal{K}$

1. $a = a$ (yansıma)
   $a = b \Rightarrow b = a$ (simetri)
   $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$ (geçişme)
2. $a \leq a$ (yansıma)
   $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$ ( ters simetri)
   $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (geçişme)
   $a \leq b \vee\ b \leq a$ ( kıyaslanabilirlik)
   $(\mathcal{K}, \leq)$ zincir
3. $a = b,\ c = d \Rightarrow a + c = b + d,\ \ a.c = b.d,\ \ a^c = b^d$
4. $a \leq b,\ c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d,\ a\,c \leq b\,d$
5. $a < b,\ c < d \Rightarrow a + c < b + d,\ a\,c < b\,d$
6. $a \leq b,\ c < d \Rightarrow a + c < b + d,\ a\,c < b\,d$
7. $0 + a = a$
8. $a + b = b + a$
9. $a + (b + c) = (a+b) + c$
10. $1.a = a$
11. $a.b = b.a$
12. $a\,(b\,c) = (ab)c$
13. $a\,(b+c) = a\,b + b\,c$
14. $a^b a^c = a^{b+c}$
15. $a^b c^b = (a\,c)^b$
16. $(a^b)^c = a^{b\,c}$
17. $a \leq \aleph_o \Rightarrow a + \aleph_o = \aleph_o + a = \aleph_o,\ \ a + \aleph_1 = \aleph_1 + a = \aleph_1, \ldots$
18. $\aleph_o + \aleph_1 = \aleph_1,\ \aleph_1 + \aleph_2 = \aleph_2, \ldots$
19. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c,\ a\,c \leq b\,c,\ a^c \leq b^c,\ c^a \leq c^b$

xvi.

$$\#(A) = \#(B),\ \#(C) = \#(D),\ \#(A \cap C) = \#(B \cap D)$$
$$\Rightarrow$$
$$\#(A \cup C) = \#(B \cup D)$$

xvii.

$$\#(A) = \#(B)\ ,\ \#(C) = \#(D) \Rightarrow \#(A\times C) = \#(B \times D)$$

xviii.

$$\#(C) \leq \#(A),\ \#(D) \leq \#(B),\ \#(A) = \#(D),\ \#(C) = \#(B) \Rightarrow \#(A) = \#(B)$$

xix.

$$\#(B \cap C) = 0 \Rightarrow \#(A^B \times A^C) = \#(A^{B\cup C})$$

xx.

$$\#(A^B)^C = 0 \Rightarrow \#(A^{B\times C})$$

xxi.

$$\#(\{a,b\}^A) = \#(2^A)$$

xxii.

$$\#(A) = \#(B) \Rightarrow \#(2^A) = \#(2^B)$$

xxiii.

$$\mathcal{A} = \{ A_i | i\in I \},\ \mathcal{B} = \{ B_i | i\in I \},\ \forall i \neq j\in I,\ \#(A_i \cap A_j) = \#(B_i \cap B_j) = 0$$
$$\#(A_i) = \#(B_i) \Rightarrow \#(\cup\mathcal{A}) = \#(\cup\mathcal{B})$$

xxiv.

$$\mathcal{A} = \{ A_i | i\in I \},\ \mathcal{B} = \{ B_i | i\in I \},\ \forall i \in I,\ \#(A_i) = \#(B_i) \Rightarrow \#(\Pi\mathcal{A}) = \#(\Pi\mathcal{B})$$

xxv.

$$\#(A) < \aleph_o,\quad \#(B) \leq \#(A) \Rightarrow \#(B) < \aleph_o$$

xxvi.

$$\#(A) < \aleph_o,\quad B \subsetneq A \Rightarrow \#(B) < \#(A)$$

xxvii.

$$\#(\mathcal{A}) < \aleph_o,\ \forall A\in \mathcal{A},\ \#(A) < \aleph_o \Rightarrow \#(\cup\mathcal{A}) < \aleph_o,\ \#(\Pi\mathcal{A}) < \aleph_o$$

xxviii.

$$\aleph_o \leq \#(A) \Rightarrow \exists B \subset A,\ \#(B) \leq \aleph_o$$

xxix.

$$\#(A) \leq \aleph_o,\ B \subset A,\ \#(B) \leq \aleph_o$$

xxx.

$$\#(A) \leq \aleph_o,\ \#(B) = \aleph_o \Rightarrow \#(A\cup B) = \aleph_o$$

xxxi.

$$\#(A) \leq \aleph_o,\ \#(B) \leq \aleph_o \Rightarrow \#(A\cup B) \leq \aleph_o,\ \#(A\times B) \leq \aleph_o$$

xxxii.

$$\aleph_o \leq \#(A),\ \#(B) \leq \aleph_o \Rightarrow \#(A) = \#(A\cup B)$$

xxxiii.

$$\aleph_o \leq \#(A) \Rightarrow \exists B \subsetneq A,\ \#(B) = \#(A)$$

xxxiv.

$$\#(A) < \#(2^A)$$

## 3. Tartışma ve Sonuç

Cantor'un, basit kavram ve varsayımlardan hareketle, salt akıl yürütme yoluyla bulduğu inanılmaz(!) sonuçlar, biçimsel pür matematiğin güçlenmesinde devrimsel nitelikte rol oynamıştır. Ayrıca, Cantor Kuramı' nın pür matematiksel karakteri, matematiğe ve matematik eğitimine yeni bir bakış açısı getirmiş ve matematiğin asıl eğitimsel öneminin, bir zihin jimnastiği olmasından geldiği daha iyi anlaşılır olmuştur. Matematiğin, herhangi bir ulus diline bağlı olmayan biçimsel sembolik dili ise, onun evrensel ve dakik bir iletişim aracı olmasının en önemli göstergesidir.

## Kaynakça

Boyer, C. B., Mcrzbach, C.C. (1989). *A History of Mathematics*. New York.

Crilly, T., Johnson, D. (1998), The Emergence of Topological Dimension Theory . *History of Topology*, (Ed.:I.M. James), 1-24. Elsevıer Science B.V.

Dalen, V.D. (1999). Luitzen Egbertus Jan Brauwer. *History of Topology*. 947-964. Elsevıer Science.

Gleick, J.J. (1995). Kaos (F. Üçcan, Çev.). *TÜBİTAK*.

Güney, Z. (1993). *Soyut Matematiğe Giriş*. İzmir: DEÜ.

Güney, Z. (2003). *Metrik ve Topolojik Formüller*. Muğla: Muğla Üniversitesi.

Güney, Z. (2004a). *Boşluk, Sonsuzluk ve Biçimcilik Üzerine*. I. Ulusal Mantık, Felsefe ve Matematik Sempozyumu Bildirileri.İstanbul: İstanbul Kültür Üniversitesi

Güney, Z. (2004b, Eylül). *Matematiksel Boyut Karmaşası*. Mantık, Matematik ve Felsefe II. Ulusal Sempozyumu (KAOS), Assos-Çanakkale

Güney, Z. (2004c, Eylül). *Uzamsal Sonsuzluk ve Matematiksel Sonsuzluk*. Mantık, Matematik ve Felsefe II. Ulusal Sempozyumu (Sonsuzluk ve Görelilik), Foça- İzmir

Güney, Z, Özkoç. M. (2010). Peano Uzayları ve Hahn-Mazurkıewicz Teoremi Üzerine, Fen Edebiyat Dergisi Sakarya Üniv.

Hacısalıhoğlu, H., Hacıyev, H.A., Kalantarov,V., Sabuncuoğlu, A. Brown, L., İbikli, E., Brown,S. (2000). *Matematik Terimleri Sözlüğü*. Türk Dil Kurumu.

Halmos,P. (1987). *Naive Set Theory*. New York .

http//ww.shu.edu/project/reals/ history/ cantor.html

Jerry P.K. (1999). Matematik Sanatı (N. Arık, Çev.). *TÜBİTAK*.

Koetsier,T., Mill, J.V. (1999). Some Remarks on the Interaction of General Topology with Other Areas of Mathematics. *History of Topology*, (Ed.:I.M. James), 199-239. Elsevıer Science B.V.

Kutuzov, B.V. (1964) *Geometri Cilt III* (H. Demir, Çev.). İstanbul.

Penrose, R.(1998). Bilgisayar ve Zeka I ( Dereli, T., Çev.). *TÜBİTAK*.

Rademacher,H., Toeplitz, O. (1964). Sayılar ve Şekiller (O. İçen, Çev.). İstanbul.

Rucker, R. (1983). Matematik Sonsuz (Dr Selçuk Alsan, Çev.).*Bilim ve Teknik*, 190, 10-15.

Saban, G. (1972). *Analiz Dersleri*, İstanbul.

Scholz, E. (1999). The Concept of Manifold,1850-1950. *History of Topology* (Ed.:I.M. James), 25-64 Elsevıer Science B.V.

Sesil, B.V. (1971). Foundations of the Logic of Change and Devolopment, [*International Logic Review*].

Simmons, G.F. (1963). *Introduction to Topolgy and Modern Analysis*. Tokyo.

Taşkesen, T. (2001). *Gödel'in Aksiyomatik Sistemlerin Tam Olmamasına Dair Teoremi ve Paradokslar* (Yüksek Lisans Tezi). Muğla Üniversitesi, Muğla.

Verriest, G. (1964). *Matematiksel Sonsuz* (A. Nazmi İlker, Çev.). *TMD*. İstanbul.

Yıldırım, C. (1985). *Bilim Felsefesi*. İstanbul.


| | |
|---|---|
| ***Zekeriya GÜNEY*** | Prof.Dr., Muğla Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen/Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi ABD<br>E-mail: zguney@mu.edu.tr |
| ***Nebiye KORKMAZ*** | Arş. Gör. Dr., Muğla Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen/Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi ABD<br>E-mail: nkorkmaz@mu.edu.tr |