

Boru İçerisindeki Bir Akış Problemine Ait Analitik ve Nümerik Çözümler

Emine Ceryan¹, Muhammet Yürüsoy²

¹ Kastamonu Üniversitesi, Abana Sabahat-Mesut Yılmaz Meslek Yüksekokulu, Doğalgaz, Isıtma ve Sıhhi Tesisat Teknolojisi, Kastamonu.

² Afyon Kocatepe Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Afyonkarahisar. e-posta:; eceryan@kastamonu.edu.tr yurusoy@aku.edu.tr

Geliş Tarihi: 17.Ekim.2012; Kabul Tarihi: 26 Kasım 2012

Özet

Anahtar kelimeler
Newtonyen Olmayan Akışkanlar; Sonlu Farklar; Pertürbasyon Tekniği.

Bu çalışmada, Newtonyen olmayan bir akışkan modelinin boru içerisindeki akışı incelenmiştir. Silindirik koordinatlarda üçüncü derece akışkanlara ait genel hareket denklemlerinden yararlanılarak boru içerisindeki tek boyutlu akış için momentum ve enerji denklemleri elde edilmiştir. Denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri yapılmıştır. Çözümlerde viskozite sabit kabul edilmiştir. Analitik çözümleri elde etmek için pertürbasyon tekniği, nümerik çözümlere ulaşmak için ise sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Çeşitli akışkan sabitlerinin hız ve sıcaklık profilleri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Sonuçlar MATLAB programından yararlanılarak grafiksel olarak ifade edilmiştir. Son olarak, analitik ve nümerik çözümlerden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Numerical Solutions for a Flow Problem of a Pipe

Abstract

Key words
Non-Newtonian Fluids; Finite Differentiations; Perturbation Techniques.

In this study, the flow of a kind of non-Newtonian fluid model in a pipe is investigated. Momentum and energy equations for one-dimensional flow in a pipe are determined by using the general equations of motion for cylindrical coordinates. Analytical and numerical solutions are done for these equations. The viscosity is assumed constant in solutions. The perturbation technique is used to obtain analytical solutions, the finite difference method is used to achieve numerical solutions. The effect of various fluid constants on velocity and temperature profiles is investigated. Results are presented graphically using MATLAB program. Finally, results from analytical and numerical solutions are compared.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

Tabiatta bulunan akışkanların büyük bir kısmı Newtonyen olmayan akışkan modeline uymaktadır. Newtonyen olmayan akışkanların çeşitliliği ve kullanım alanlarının genişliği sebebiyle özellikle son yıllarda bu akışkanlar üzerindeki çalışmalar artış göstermiştir. Newtonyen olmayan akışkanlara ve boru içerisindeki akışa ait yapılan bazı önemli çalışmalar şu şekilde özetlenebilir: Massoudi ve Christie (1995), boru içerisindeki üçüncü derece akışkanlar için hareket ve enerji denklemlerinin çözümlerini nümerik olarak elde etmişlerdir. Bu çalışmalarında akışkanın viskozitesinin sıcaklığa bağlı olarak değiştiğini göz önüne almışlardır. Gupta

(2001), power-law modelindeki Newtonyen olmayan akışkanın laminar akış için yaklaşık bir çözümünü dairesel bir boru ve düz kanal için ortaya koymuştur. Yürüsoy ve Pakdemirli (1999), kaymalı yatakların yağlanması üçüncü dereceden Newtonyen olmayan akış modelini kullanmışlardır. Bu çalışmada; üçüncü derece akışkan etkilerinin viskoz etkilerden daha küçük olduğunu kabul etmişlerdir. Malin (1997), power-law akışkanlarda pürüzsüz boru içindeki türbülanslı akışı sayısal olarak incelemiş ve deneysel sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Bu çalışmada, genelleştirilmiş üçüncü derece Newtonyen olmayan akışkan modelinin boru

içerisindeki akışı incelenmiştir. Genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemlerinin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılmıştır. Elde edilen momentum ve enerji denklemleri ile sınır şartları boyutlu parametrelerden oluşmaktadır. Çözümlerin daha genel olabilmesi amacıyla denklemler boyutsuzlaştırılmıştır. Elde edilen denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri yapılarak sonuçlar karşılaştırılmıştır.

2. Materyal ve Metot

Boru içerisindeki akışı incelemek için öncelikle üçüncü dereceden Newtonyen olmayan akışkanlara ait bünye denklemi elde edilmiştir. Genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait bünye denklemi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathbf{T}^* = -p^* \mathbf{1} + \Pi^{m/2} \left[(\mu \mathbf{A}_1^* + \alpha_1 \mathbf{A}_2^* + \alpha_2 \mathbf{A}_1^{*2}) + \beta (\text{tr} \mathbf{A}_1^{*2}) \mathbf{A}_1^* \right] \quad (1)$$

Burada p basınç, μ viskozite, α_1 , α_2 ve β akışkan sabitleri, \mathbf{A}_1 ve \mathbf{A}_2 Rivlin-Ericksen tensörleridir. Bu tensörler şu şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^* &= \mathbf{L}^* + \mathbf{L}^{*T} \\ \mathbf{A}_2^* &= \frac{d\mathbf{A}_1^*}{dt^*} + \mathbf{A}_1^* \mathbf{L}^* + \mathbf{L}^{*T} \mathbf{A}_1^* \\ \Pi &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}_1^{*2}) \\ \mathbf{L}^* &= \nabla^* \mathbf{v}^* \end{aligned} \quad (2)$$

Lineer momentum denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\text{div} \mathbf{T} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (3)$$

Denklem (1) ve (2)'de verilen ifadeler denklem (3)'e yerleştirilip gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 + \omega \times \mathbf{v} \right) &= -\text{grad} p + \text{grad} \left[\left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right)^{m/2} \right] \\ &\quad \times \left[\mu \nabla^{*2} \mathbf{v} + \beta \mathbf{A}_1^* \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1^*|^2 + \beta |\mathbf{A}_1^*|^2 \cdot \nabla^{*2} \mathbf{v} \right] \end{aligned}$$

(4) genelleştirilmiş üçüncü dereceden akışkanlara ait en genel hareket denklemi, denklem (4)'teki gibi elde edilmiş olur.

Genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait enerji denkleminin en genel hali ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \text{grad} \left[\left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right)^{m/2} \right] \left(\frac{1}{2} \mu |\mathbf{A}_1^*|^2 + \frac{\beta}{2} |\mathbf{A}_1^*|^4 + k \nabla^{*2} \mathbf{v} \right) \quad (5)$$

Burada ε akışkanın iç enerjisini, k ısı iletim katsayısını, β üçüncü derece akışkan terimini ifade etmektedir.

2.1. Analitik Çözümler

Bu çalışmada akış tek boyutlu olarak ele alınmıştır. Buna göre, denklem (4) ve (5)'teki gibi elde edilmiş olan hareket ve enerji denklemleri düzenlenirse;

$$\left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right)^m \left[\left((m+1) \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right) \bar{\mu} + 2\beta \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right)^2 \left((m+3) \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right) \right] = \frac{d\bar{P}}{d\bar{z}} \quad (6)$$

$$k \frac{d^2 \bar{\theta}}{d\bar{r}^2} + \frac{k}{\bar{r}} \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{r}} + \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right)^{m+2} \left[\bar{\mu} + \beta \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right)^2 \right] = 0 \quad (7)$$

şeklini alır. Sınır şartları aşağıdaki şekilde tespit edilmiştir.

$$\bar{v}(\bar{r}) = 0, \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}}(0) = 0, \quad \bar{\theta}(\bar{r}) = 0, \quad \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{r}}(0) = 0 \quad (8)$$

Çözümlerin genelleştirilebilmesi için denklemlerin boyutsuz olarak ifade edilmeleri gerekmektedir. Boyutsuzlaştırma için kullanılan dönüşümler şu şekildedir:

$$r = \frac{\bar{r}}{R} \quad v = \frac{\bar{v}}{v_0} \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} \quad \theta = \frac{\bar{\theta} - \theta_w}{\bar{\theta}_m - \theta_w} \quad (9)$$

Burada v_0 referans hızını, μ_0 referans viskoziteyi, θ_m ortalama akışkan sıcaklığını ve θ_w cidar sıcaklığını ifade etmektedir.

Boyutsuz forma getirilmiş hareket ve enerji denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)^m \left[\left((m+1) \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) \mu + \Lambda \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 \left((m+3) \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) \right] = C \quad (10)$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \Gamma \left(\frac{dv}{dr} \right)^{m+2} \left[\mu + \Lambda \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 \right] = 0 \quad (11)$$

Boyutsuz hale getirilmiş denklem için sınır şartları aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir.

$$v(1) = \theta(1) = 0 \quad \frac{dv}{dr}(0) = \frac{d\theta}{dr}(0) = 0 \quad (12)$$

Denklemlerde v boyutsuz akışkan hızını, θ boyutsuz sıcaklığı ifade etmektedir. Denklem (13)'te C_1 eksenel yöndeki basınç değişimini, Λ boyutsuz Newtonyen olmayan akışkan katsayısını, β boyutlu üçüncü derece akışkan katsayısını, Γ Brinkman sayısını ve k ısı iletim katsayısını ifade etmekte ve bunların matematiksel açılımları denklem (14)'de verilmiştir.

$$\Lambda = \frac{2\beta v_0^2}{\mu_0 R^2} \quad C_1 = \frac{d\bar{P}}{dz} \quad C = \frac{C_1 R^2}{\mu_0 v_0} \left(\frac{R}{v_0} \right)^m \quad (13)$$

$$\Gamma = \frac{\mu_0 v_0^{m+2}}{R^m (\bar{\theta}_m - \theta_w) k} \quad (14)$$

Bundan sonraki aşamada elde edilen boyutsuz

denklemlerin perturbatif çözümleri yapılmıştır. Çözümlerde viskozite sabit olarak kabul edilmiş ve viskozite değeri 1 olarak alınmıştır. Momentum ve enerji denklemlerindeki hız ve sıcaklığın yaya açılımları aşağıdaki gibidir:

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 \quad (15)$$

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 \quad (16)$$

Burada ε perturbasyon parametresidir. Ayrıca çözümlerde Newtonyen olmayan akışkan katsayısı Λ , aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$\Lambda = \varepsilon \lambda \quad (17)$$

Elde edilen denklemlerdeki ifadelerden 1 ve ε mertebeleri dikkate alınacaktır. Bu mertebeler açık şekilde yazılır ise;

1. Mertebesi

$$(v_0')^m \left[v_0''(m+1) + \frac{v_0'}{r} \right] = Cr \quad (18)$$

$$\theta_0'' + \frac{\theta_0'}{r} + \Gamma (v_0')^{m+2} = 0 \quad (19)$$

Bu durumda sınır şartları aşağıdaki gibi olur.

$$v_0(1) = \theta_0(1) = 0 \quad v_0'(0) = \theta_0'(0) = 0 \quad (20)$$

ε Mertebesi

$$v_1''(m+1)(v_0')^m + \frac{v_1'}{r}((v_0')^m) + m r (m+1) v_0'^{(m-1)} v_0'' + m (v_0')^m = -\lambda (v_0')^{(m+2)} \left(v_0''(m+3) + \frac{v_0'}{r} \right) \quad (21)$$

$$\theta_1'' + \frac{\theta_1'}{r} + \Gamma (m+2) (v_0')^{m+1} v_1' + \Gamma \lambda (v_0')^{m+4} = 0$$

(22) **2.2. Nümerik Çözümler**

ε mertebesine göre sınır şartları ise aşağıda verilmiştir.

$$v_1(1) = \theta_1(1) = 0 \quad v_1'(0) = \theta_1'(0) = 0 \quad (23)$$

Oluşturulan yaya açılımları elde edilen denklemlerde yerine yazılıp gerekli işlemler yapılarak çözüme ulaşılmıştır. Buna göre, ana denklemlerin lineer kısma yani 1 mertebesine ait sonuçları:

$$v_0 = \frac{2^{-\frac{1}{m+1}} C^{m+1} (m+1)^{\frac{m+2}{m+1}}}{m+2} (r^{\frac{m+2}{m+1}} - 1) \quad (24)$$

$$\theta_0 = \Gamma \frac{m+1 \sqrt{C^{m+2}}}{m+1 \sqrt{2^{m+2}}} \left(\frac{m+1}{3m+4} \right)^2 (1 - r^{\frac{3m+4}{m+1}}) \quad (25)$$

ε mertebesindeki sonuçlar ise:

$$v_1 = \frac{\lambda 2^{-\frac{3}{m+1}} C^{\frac{3}{m+1}} (m+4)^{\frac{m+4}{m+1}}}{m+4} (r^{\frac{m+4}{m+1}} - 1) \quad (26)$$

$$\theta_1 = \frac{\Gamma \lambda \frac{m+1 \sqrt{C^{m+4}}}{m+1 \sqrt{2^{m+4}}}}{(3m+6)^2} \left(r^{\frac{3m+6}{m+1}} - 1 \right) \quad (27)$$

Elde edilen bu sonuçlar denklemlerde yerine yerleştirildiğinde;

$$v = \frac{(m+1)^{\frac{m+1}{m+1}} \sqrt{C}}{(m+2)^{\frac{m+1}{m+1}} \sqrt{2}} (r^{\frac{m+2}{m+1}} - 1) - \Lambda \frac{m+1 \sqrt{C^3}}{(m+4)^{\frac{m+1}{m+1}} \sqrt{8}} (r^{\frac{m+4}{m+1}} - 1) \quad (28)$$

$$\theta = \frac{\Gamma \frac{m+1 \sqrt{C^{m+2}}}{m+1 \sqrt{2^{m+2}}}}{(3m+4)^2} (1 - r^4) + \frac{\Gamma \Lambda \frac{m+1 \sqrt{C^{m+4}}}{m+1 \sqrt{2^{m+4}}}}{(3m+6)^2} \left(r^{\frac{3m+6}{m+1}} - 1 \right) \quad (29)$$

şeklinde hız ve sıcaklık profilleri elde edilmiş olur.

Denklemlerin nümerik çözümleri için sonlu farklar yönteminden yararlanılmıştır. Çözümlerin elde edilmesinde hata oranının daha az olmasından dolayı merkezi fark denklemleri kullanılmıştır. 100 düğüm için h değeri 0.01 olarak alınmıştır.

İlk olarak denklem (6)'daki hız denklemi için merkezi farkları uygulanırsa;

$$\left(\frac{dv}{dr} \right) = \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \right) \quad (30)$$

$$\left(\frac{d^2v}{dr^2} \right) = \left(\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \right) \quad (31)$$

İfadeleri elde edilir. Denklem (30) ve (31)'deki ifadeler denklem (10)'da yerine yerleştirilerek hız denkleminin merkezi fark genel denklemini aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \right)^m \left[\left((m+1) \frac{r_i}{h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + \frac{1}{2h} (f_{i+1} - f_{i-1}) \right) + \Lambda \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \right)^2 \left((m+3) \frac{r_i}{h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + \frac{1}{2h} (f_{i+1} - f_{i-1}) \right) \right] = Cr_i \quad (32)$$

Denklem (7) için merkezi farkları uygulamak için denklemin türevleri için merkezi farklar uygulanırsa;

$$\left(\frac{d\theta}{dr} \right) = \left(\frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h} \right) \quad (33)$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dr^2} \right) = \left(\frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2} \right) \quad (34)$$

elde edilir. Denklem (34) ve (34)'deki veriler denklem (8)'de yerine yerleştirilerek enerji denkleminin merkezi fark genel denklemini elde edilmiş olur.

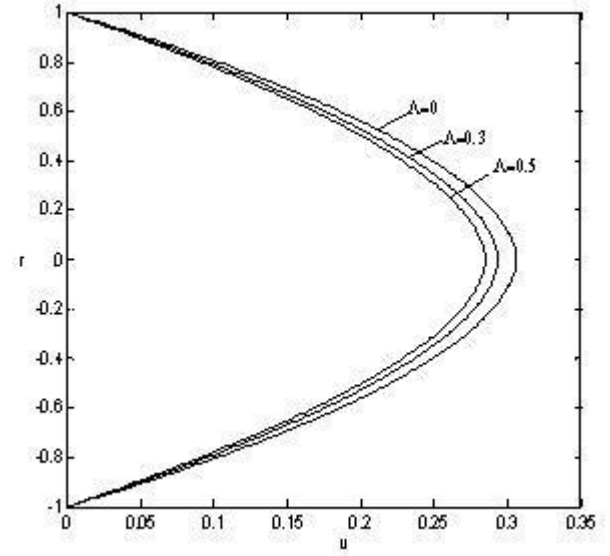
$$\frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2} + \left(\frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2hr_i} \right) + \Gamma \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \right)^{m+2} \left[1 + \Lambda \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \right)^2 \right] = 0 \quad (35)$$

Sonlu farklar yöntemi kullanılarak genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemlerinin nümerik çözümleri elde edilmiştir.

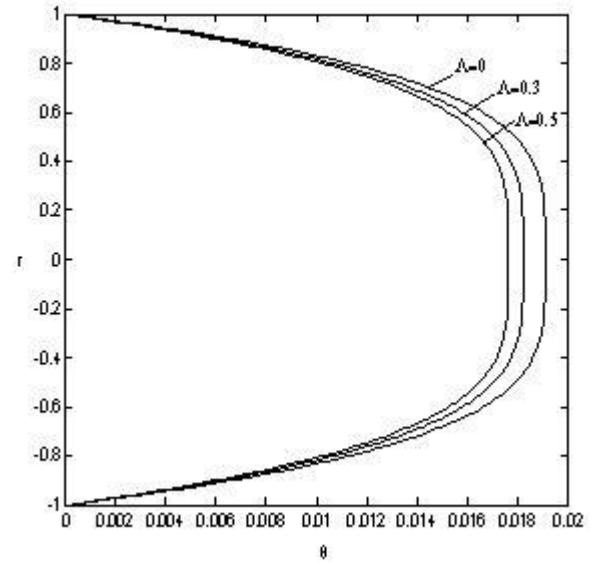
3. Bulgular

Bu kısımda, ilk olarak hız ve sıcaklığa ait elde edilen analitik çözümlerin grafiksel olarak ifadesi yer alacaktır. Analitik çözümlerin grafikleri Matlab paket programı kullanılarak elde edilmiştir. Grafikler denklemdeki sabitlerin farklı değerleri için çizilmiştir. Farklı değerlerde hız ve sıcaklık değişimi incelenmiştir. Daha sonra yine Matlab paket programı yardımıyla ve Sonlu Farklar yönteminden yararlanılarak hız ve sıcaklığa ait nümerik çözümler de elde edilmiş ve analitik ve nümerik çözümden elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır.

Şekil 1 ve Şekil 2’de farklı boyutsuz Newtonyen olmayan akışkan katsayısını değerleri için hız ve sıcaklık profilleri incelenmiştir. $\Lambda=0$ olması akışkanın Newtonyen akışkan olduğunu göstermektedir. Şekil 1 ve 2’de boyutsuz Newtonyen olmayan akışkan katsayısının değeri arttığında hız ve sıcaklığın azaldığını görülmekle beraber hız ve sıcaklık profillerinin şeklinde herhangi bir değişiklik görülmemektedir.

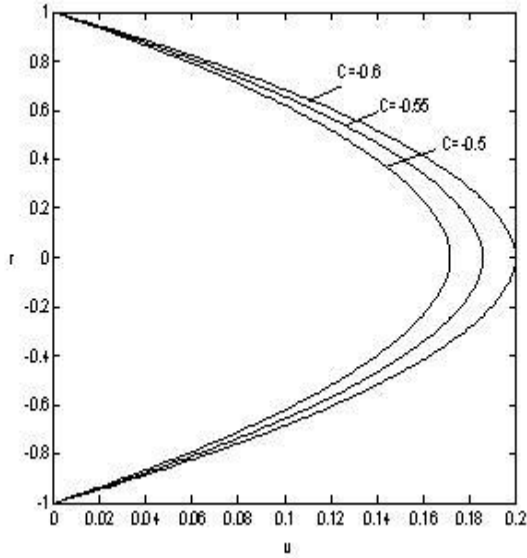


Şekil 1. Çeşitli Λ değerleri için hız profilleri ($m=0.2$, $\Gamma=1$, $C=-1$)

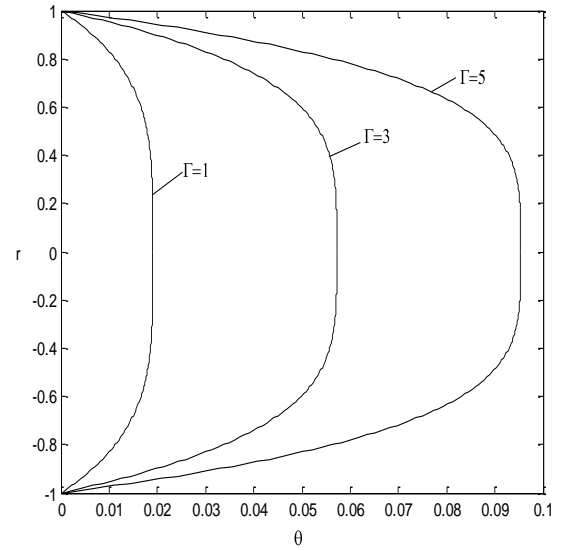


Şekil 2. Çeşitli Λ değerleri için sıcaklık profilleri ($m=0.2$, $\Gamma=1$, $C=-1$)

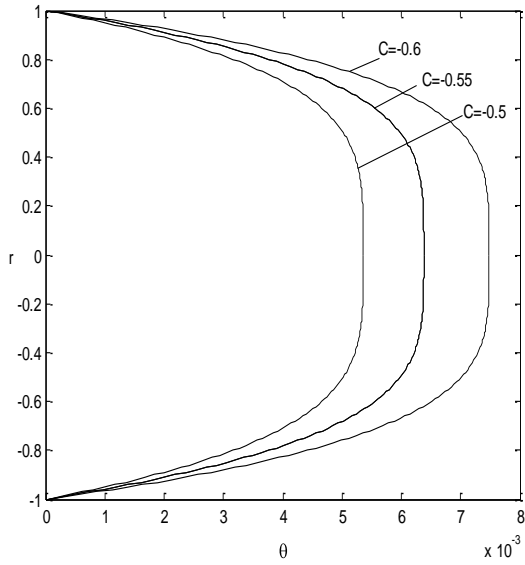
Şekil 3 ve Şekil 4’te farklı değerlerdeki Basınç farkı (C) parametresi için hız ve sıcaklık profillerinin değişimi sırasıyla gösterilmiştir. Şekil 3’te C değerinin mutlak olarak artmasıyla hızın arttığı görülmektedir. Şekil 4’te ise basınç farkının mutlak değerce artışının sıcaklığı da arttırdığı gözlemlenmektedir.



Şekil 3. Çeşitli C değerleri için hız profilleri ($\Lambda=0.01$, $\Gamma=1$, $m=0.2$)



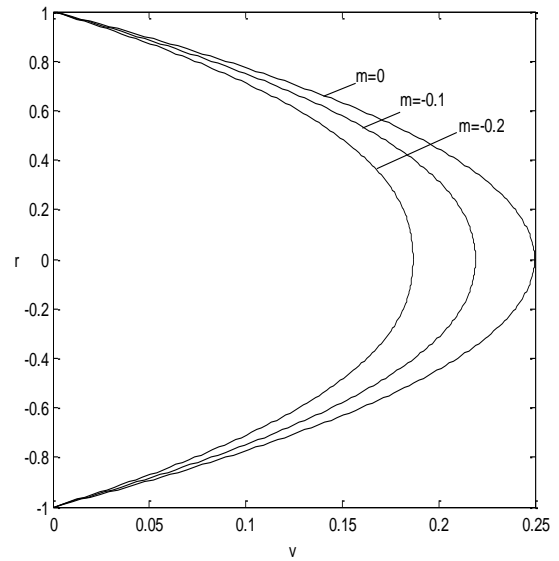
Şekil 5. Çeşitli Γ değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01$, $C=-1$, $m=0.2$)



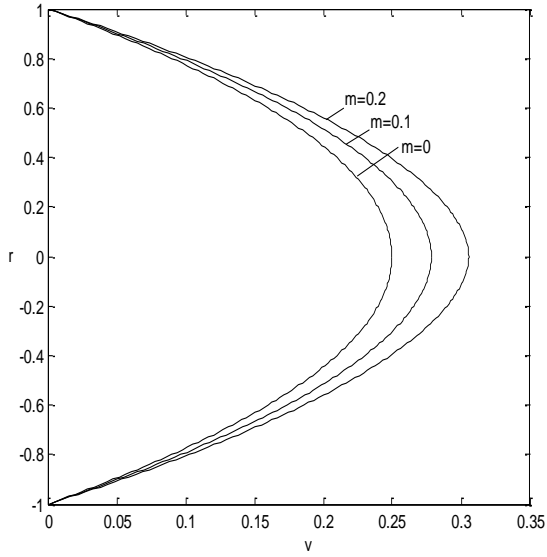
Şekil 4. Çeşitli C değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01$, $\Gamma=1$, $m=0.2$)

Şekil 5'te değişik Brinkman sayısının sıcaklığın değişimine etkisini göstermektedir. Şekil 5 incelediğinde Γ değerinin artmasının sıcaklık değerini arttırdığı anlaşılmaktadır.

Şekil 6(a)'da farklı m değerlerinin negatif olmasının hız üzerindeki etkisi verilmiştir. Buna göre; Şekil 6(a)'da negatif m değerleri azaldıkça hız da azalmaktadır. Şekil 6(b)'de ise farklı m değerlerinin pozitif olmasının hız üzerindeki etkisi verilmiştir. Buna göre; Şekil 6(b)'de pozitif m değerleri arttıkça hızın da arttığı görülmektedir.

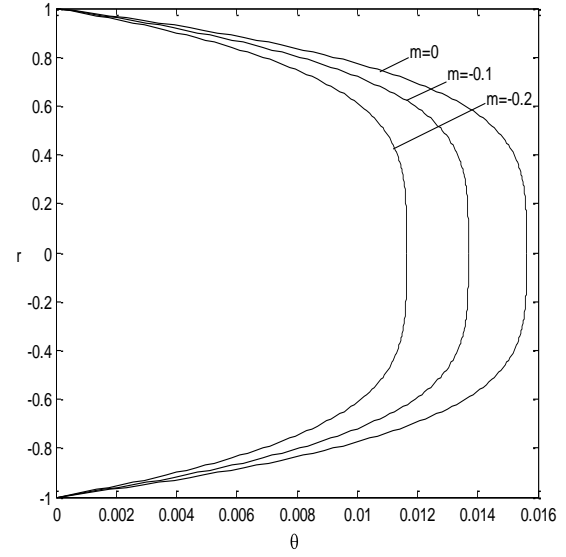


(a)



(b)

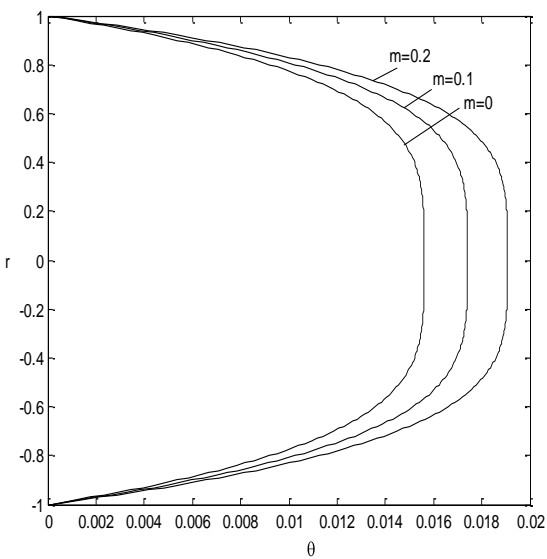
Şekil 6. (a) negatif m (b) pozitif m değerleri için hız profilleri ($\Lambda=0.01, \Gamma=1, C=-1$)



(b)

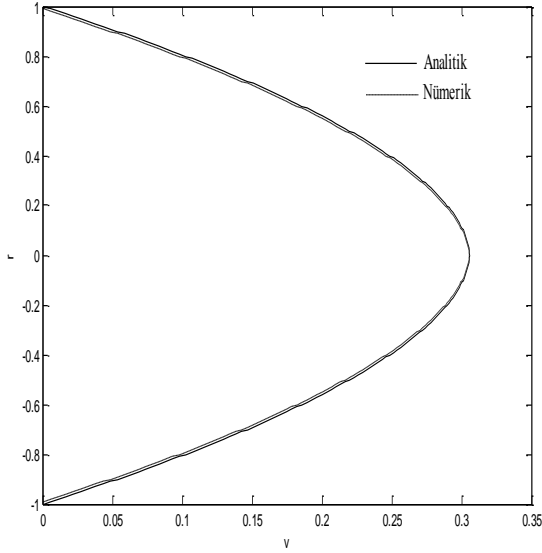
Şekil 7. (a) pozitif m (b) negatif m değerleri için sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01, \Gamma=1, C=-1$)

Şekil 7(a)'da pozitif m değerlerinin sıcaklık üzerindeki etkisi incelenmiştir. Şekil 7(a)'ya göre sıcaklığın pozitif m değerleriyle doğru orantılı bir biçimde değişimi söz konusudur. Şekil 7(b)'de ise negatif m değerlerinin sıcaklık değişimine etkisi incelenmiş ve negatif m değerlerinin azalmasıyla sıcaklığın da azaldığı görülmektedir.

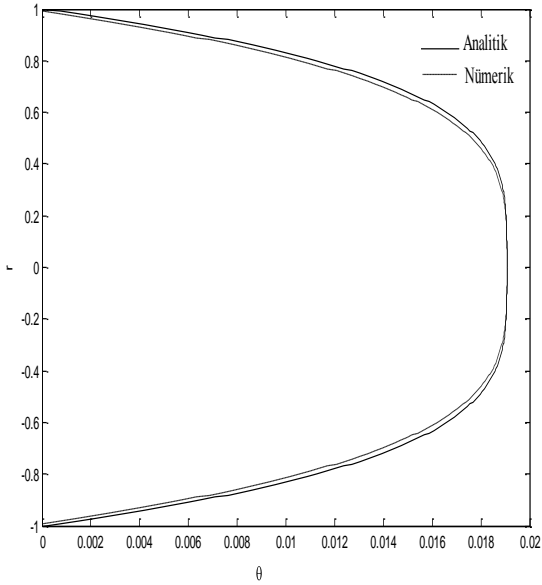


(a)

Şekil 8 ve Şekil 9 analitik ve nümerik çözümlerin karşılaştırma grafiklerini vermektedir. Nümerik çözümlerin elde edilmesinde Sonlu Farklar yöntemi ve Matlab paket programından yararlanılmıştır. Katsayı ve parametrelerin belirtilen değerleri için nümerik ve analitik çözümler grafiksel olarak belirtilmiştir. Kesik çizgilerle verilen grafik nümerik sonuçları, düz çizgilerle verilen grafik ise analitik sonuçları ifade etmektedir. Şekil 8 analitik ve nümerik çözümlerin hız açısından karşılaştırılması verilmiştir. Şekil 9'da ise sıcaklık analitik ve nümerik çözümler bakımından kıyaslanmıştır. Buna göre; her iki şekilde de sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu da yapılan analitik çözümlerin doğru bir yaklaşım olduğunu göstermektedir.



Şekil 8. Analitik ve nümerik hız profilleri ($\Lambda=0.01$, $C=-1$, $m=0.2$, $\Gamma=1$)



Şekil 9. Analitik ve nümerik sıcaklık profilleri ($\Lambda=0.01$, $C=-1$, $m=0.2$, $\Gamma=1$)

4. Tartışma ve Sonuç

Yapılan çalışmada boru içerisindeki genelleştirilmiş üçüncü dereceden Newtonyen olmayan akışkan akışında hareket ve enerji değişimi incelenmiştir. İlk olarak silindirik koordinatlarda genelleştirilmiş üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemleri elde edilmiştir. Denklemlerin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılmıştır.

Bu denklem için boru içerisindeki akışı ifade eden sınır şartları belirlenerek çözümlerin daha genel olabilmesi için denklemler boyutsuz hale getirilmiştir. Sonuçta, silindirik koordinatlar için tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklem sistemleri elde edilmiştir. Bu denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri yapılmıştır. Denklemlerin analitik çözümü için bir perturbasyon metodu olan yaya açılımı kullanılmıştır. Yaya açılımı yapılarak hız ve sıcaklık profillerine ait denklemler Newtonyen ve Newtonyen olmayan kısımlara ayrılmıştır. Öncelikle Newtonyen kısmın, daha sonra Newtonyen olmayan kısmın çözümleri yapılmıştır. Çözümlerde viskozite değeri sabit olarak kabul edilmiştir.

Analitik çözümlerin yanı sıra nümerik çözümler de yapılmıştır. Nümerik çözümlerin elde edilmesinde sonlu farklar metodu kullanılmıştır. Hata oranının az olması sebebiyle sonlu fark yaklaşımlarından merkezi farklardan yararlanılmıştır. Nümerik çözümler, 100 düğüm için h değeri 0.01 alınarak elde edilmiştir. Elde edilen denklemler Matlab paket programı yardımıyla çözülmüştür. Son olarak elde edilen analitik çözümler grafiksel olarak açıklanmıştır. Denklemlerdeki katsayıların değişiminin hız ve sıcaklık üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Ayrıca, analitik ve nümerik çözümler grafiksel olarak karşılaştırılmıştır.

Elde edilen bilgiler neticesinde Newtonyen olmayan parametre (Λ) arttığında hız ve sıcaklık değerinin azaldığı gözlemlenmiştir. m sabitinin pozitif değerinin arttırılmasını ile hız ve sıcaklığın da doğru orantılı olarak arttığı görülmektedir. m sabitinin negatif olması durumu incelenmiştir. Negatif m değerlerinin azalması hız ve sıcaklık değerlerini düşürmektedir. Basınç farkı (C) değerindeki artışın hızı ve sıcaklığı arttırdığı görülmektedir. Brinkman sayısı'nın (Γ) artması hızın değerini değiştirmemektedir. Sıcaklık ise Γ arttığı müddetçe artmaktadır.

Kaynaklar

Akgül, M.B., 2008. Elektroosmotik Kuvvetin Etkisi Altındaki Mikrokanallarda Üçüncü Derece

- Akışkanların İncelenmesi. Doktora Tezi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa, 200.
- Çengel, Y.A., Cimbala, J.M., 2008. Akışkanlar Mekaniği Temelleri ve Uygulamaları. Güven Bilimsel Kitabevi.
- Gupta, R.C., 2001. On Developing Laminar non-Newtonian Flow in Pipes and Channel, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*.
- Kurt, B.B., 2009. Zaman Ortamında Sonlu Farklar Yöntemi ile İki Boyutlu Yer Radarı Modellemesi. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 100.
- Malin, M.R., 1997. Turbulent Pipe Flow of Power-law Fluids. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **24**, 977-988.
- Massoudi, M., Christie, I., 1995. Effects of Variable Viscosity and Viscous Dissipation on the Flow of a Third Grade Fluid in a Pipe.
- Soğukoğlu, M., 1995. Akışkanlar Mekaniği. Fatih Oset Yayınevi.
- Türker, E.S., Can, E., Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz, Değişim Yayınları.
- Wang, Y., Chuckwu, G.A., 1997. Application of Unsteady Couette Flow of non-Newtonian Power-law Fluids in Concentric Annular Wellbore. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **17**, 229-235.
- White, F.M., Fluid Mechanics, McGraw-Hill Book Company.
- Yılmaz, S., 2008. Non-Newtonyen Akışkanlarda Paralel İki Levha Arasındaki Akışın İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar, 65.
- Kapucu, M., 2008. İki Boru Arasındaki Non-Newtonyen Akışkan Akışında Değişik Viskozite Modelleri İçin Entropi Üretiminin İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar, 66.
- Yürüsoy, M., Pakdemirli M., 1999. Lubrication of a Slider Bearing with a Special Third-Grade Fluid. *Applied Mechanics and Engineering*, **4**, 759-772.
- Yürüsoy, M., Pakdemirli, M., 2002. Approximate Analytical Solutions for the Flow of a Third-Grade Fluid in a Pipe. *International Journal of non-Linear Mechanics*, **37**, 187-195.