Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **13** (2013) 011302 (9-14) AKU J. Sci. Eng. **13** (2013) 011302 (9-14)

DOI: 10.5578/fmbd.5435 ***Araştırma Makalesi / Research Article***

Küme Dizilerinin İstatistiksel Lacunary Toplanabilirliği

Uğur ULUSU[1], Fatih NURAY[2]

[1] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matemetik Bölümü, Afyonkarahisar.*

[2] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matemetik Bölümü, Afyonkarahisar.*

e-posta: ulusu@aku.edu.tr, fnuray@aku.edu.tr

Geliş Tarihi:27.03.2013; Kabul Tarihi:07.05.2013

Anahtar kelimeler
İstatistiksel yakınsaklık; Lacunary istatistiksel yakınsaklık; İstatistiksel lacunary toplanabilme; küme dizisi; Wijsman yakınsaklık.

Özet

Bu çalışmada, küme dizileri için Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilme kavramı tanımlandı ve bu kavramın daha önceden Ulusu ve Nuray (2012) tarafından verilen küme dizilerinin Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilişkisinden bahsedildi. Ayrıca, bir küme dizisinin Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilmesi ve Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verildi.

Statistical Lacunary Summability of Sequences of Sets

Key words
Statistical convergence; Lacunary statistical convergence; Statistical lacunary summability; Sequence of sets; Wijsman convergence.

Abstract

In this paper, we define Wijsman statistical lacunary summability for sequences of sets and establish the relationship between Wijsman lacunary statistical convergence which was previously given by Ulusu and Nuray (2012). Also, necessary and sufficient conditions for Wijsman statistical lacunary summability and Wijsman lacunary statistical convergence of a sequence of sets is given.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

Sayı dizilerinin yakınsaklığı kavramı pek çok yazar tarafından küme dizilerinin yakınsaklığı kavramına genişletilmiştir. Bu genişlemelerden biri de Wijsman yakınsaklık kavramıdır. Bu çalışmada Wijsman yakınsaklık kavramı dikkate alınarak Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilme kavramı tanımlanmış ve yeni tanımladığımız bu kavram ile daha önceden Ulusu ve Nuray (2012) tarafından tanımlanan Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişki gösterilmiştir. Ayrıca, bir küme dizisinin Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilmesi ve Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

2. Materyal ve Metot

Çalışmamızın daha iyi anlaşılması için, ilk olarak bazı temel tanımları verelim:

$x=(x_k)$ bir reel sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon>0$ için,

$$K=K(\varepsilon)=\{k\in\mathbb{N}:|x_k-L|\geq\varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu $\delta(K)$ sıfır yani,

$$\delta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n:|x_k-L|\geq\varepsilon\}|=0$$

ise, $x=(x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st-\lim x_k=L$$

biçiminde gösterilir (Fast, 1951).

İstatistiksel yakınsaklık alışılmış yakınsaklığın doğal bir genişlemesidir. Eğer $lim\ x_k=L$ ise o zaman

$st - lim\ x_k = L$ dir. Fakat bunun tersi doğru olmayabilir.

$\theta = \{k_r\}$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken

$$h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$$

olacak biçimde negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizisi denir. Ayrıca, $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için,

$$I_r = (k_{r-1}, k_r]$$

olarak belirtilir (Fridy and Orhan, 1993).

Fridy ve Orhan (1993), lacunary dizisi kavramını kullanarak, istatistiksel yakınsaklık ile aralarında önemli ilişkiler bulunan Lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır:

Her $\varepsilon > 0$ için,

$$K = K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N}: |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin θ-yoğunluğu $\delta_\theta(K)$ sıfır yani,

$$\delta_\theta(K) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$S_\theta - \lim x_k = L$$

ile gösterilir (Fridy and Orhan, 1993).

(X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve boş kümeden farklı herhangi bir $A \subset X$ kümesi için, x noktası ile A kümesi arasındaki uzaklık

$$d(x, A) = inf_{x\in A}\, \rho(x, A)$$

ile tanımlanır.

Küme dizileri için Wijsman yakınsaklık kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Baronti and Papini, 1986):

(X, ρ) bir metrik uzay , A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için,

$$\lim_k d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman yakınsaktır denir ve

$$W - \lim A_k = A$$

ile gösterilir.

Wijsman yakınsak küme dizisine aşağıdaki $\{A_k\}$ dizisini örnek verebiliriz;

$$A_k = \{(x, y): x^2 + y^2 + 2kx = 0\}$$

Bu dizi $k \to \infty$ iken $A = \{(x, y): x = 0\}$ kümesine Wijsman yakınsaktır.

Wijsman yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Nuray ve Rhoades (2012) tarafından verilmiştir.

(X, ρ) bir metrik uzay , A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya hemen hemen her k için,

$$|d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st - lim_W\, A_k = A$$

ile gösterilir (Nuray and Rhoades, 2012).

(X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş kümeden farklı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için,

$$sup_k\, d(x, A_k) < \infty$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi sınırlıdır denir (Nuray and Rhoades, 2012).

Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramına benzer olarak Ulusu ve Nuray (2012) tarafından Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

(X, ρ) bir metrik uzay , A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r: |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$S_\theta - lim_W A_k = A$$

ile gösterilir (Ulusu and Nuray, 2012).

Ayrıca Ulusu ve Nuray (2012) yaptıkları bu çalışmada küme dizileri için Lacunary toplanabilme kavramını da aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır:

(X,ρ) bir metrik uzay , A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer her bir $x \in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d(x,A_k) = d(x,A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary toplanabilirdir denir ve

$$A_k \to A(WN_\theta)$$

biçiminde gösterilir (Ulusu and Nuray, 2012).

3. Bulgular

İlk olarak

$$T_r(x,A_k) := \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d(x,A_k)$$

olmak üzere aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1. (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{n} |\{r \le n : |T_r(x,A_k) - d(x,A)| \ge \varepsilon\}| = 0$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilirdir denir ve

$$WS_\theta - \lim A_k = A$$

ile gösterilir.

Başka bir deyişle, $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilir olması demek, her bir $x \in X$ için $T_r(x,A_k)$ dizisinin $d(x,A)$ sayısına istatistiksel yakınsak olması demektir.

Şimdi, Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilme ve Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi belirten aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1. (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer bir $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve bir A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak ise o zaman $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilirdir.

İspat: $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve bir A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olsun. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı olduğundan, her bir $x \in X$ için

$$sup_k\{|d(x,A_k) - d(x,A)|\} \le M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Her $\varepsilon > 0$ için

$$K_\theta^W(\varepsilon) := \{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \ge \varepsilon\}$$

ile belirtelim. O zaman,

$$|T_r(x,A_k) - d(x,A)|$$

$$= \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d(x,A_k) - d(x,A) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \big(d(x,A_k) - d(x,A)\big) \right|$$

$$\le \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x,A_k) - d(x,A)|$$

$$= \frac{1}{h_r} \left(\sum_{\substack{k\in I_r \\ k\in K_\theta^W(\varepsilon)}} |d(x,A_k) - d(x,A)| \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k\in I_r \\ k\notin K_\theta^W(\varepsilon)}} |d(x,A_k) - d(x,A)| \right)$$

$$\le \frac{1}{h_r} \left(M \cdot \left| K_\theta^W(\varepsilon) \right| + \varepsilon h_r \right)$$

olur. Yani,

$$|T_r(x,A_k) - d(x,A)| \le \frac{1}{h_r} \left(M \cdot \left| K_\theta^W(\varepsilon) \right| + \varepsilon h_r \right) \quad (2.1)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olduğundan, (2.1) eşitsizliğinin sağ tarafı $r \to \infty$

iken ε a eşit olur. Yani, $r \to \infty$ iken

$$|T_r(x, A_k) - d(x, A)| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Burada, Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilmenin tanımı da dikkate alındığında; $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilir olduğu ortaya çıkar.

Teorem 3.2 (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Bir $\{A_k\}$ dizisinin bir A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\delta(K) = 1 \text{ ve } A_{r_n} \to A(WN_\theta)$$

olacak şekilde bir $K = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots\}$ kümesinin var olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ $\delta(K) = 1$ ve $A_{r_n} \to A(WN_\theta)$ olacak şekilde bir $K = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots\}$ kümesinin var olduğunu kabul edelim. O zaman $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $n > N$ için,

$$\left|T_{r_n}(x, A_k) - d(x, A)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır.

$$K_\varepsilon^W(\theta) := \left\{n \in \mathbb{N}: \left|T_{r_n}(x, A_k) - d(x, A)\right| \geq \varepsilon\right\}$$

ve

$$K' = \{r_{N+1}, r_{N+2}, \dots\}$$

ile belirtelim. O zaman,

$$\delta(K') = 1 \text{ ve } K_\varepsilon^W(\theta) \subseteq \mathbb{N} - K'$$

olması

$$\delta\big(K_\varepsilon^W(\theta)\big) = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilir olur.

$(\Rightarrow)$ Tersine, $\{A_k\}$ dizisi bir A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilir olsun. $p = 1,2,3, \dots$ için,

$$K_p^W(\theta) := \left\{j \in \mathbb{N}: \left|T_{r_j}(x, A_k) - d(x, A)\right| \geq \frac{1}{p}\right\}$$

ve

$$M_p^W(\theta) := \left\{j \in \mathbb{N}: \left|T_{r_j}(x, A_k) - d(x, A)\right| < \frac{1}{p}\right\}$$

ile belirtelim. O zaman,

$$\delta\left(K_p^W(\theta)\right) = 0,$$

$$M_1^W(\theta) \supset M_2^W(\theta) \supset \cdots \supset M_i^W(\theta) \supset M_{i+1}^W(\theta) \supset \cdots \quad (2.2)$$

ve

$$\delta\left(M_p^W(\theta)\right) = 1, \quad p = 1,2,3, \dots \quad (2.3)$$

olur.

Şimdi $j \in M_p^W(\theta)$ için $\left\{A_{k_j}\right\}$ dizisinin A kümesine Wijsman lacunary toplanabilir olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki, $\left\{A_{k_j}\right\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary toplanabilir olmasın. O halde, sonsuz sayıda terim için

$$\left|T_{r_j}(x, A_k) - d(x, A)\right| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı vardır.

$$M_\varepsilon^W(\theta) := \left\{j \in \mathbb{N}: \left|T_{r_j}(x, A_k) - d(x, A)\right| < \varepsilon\right\}$$

ile belirtilirse,

$$\varepsilon > \frac{1}{p}$$

olacak şekilde bir p sayısı bulunabilir. O zaman,

$$\delta\big(M_\varepsilon^W(\theta)\big) = 0$$

olur. Ayrıca, (2.2) ifadesinden dolayı,

$$M_p^W(\theta) \subset M_\varepsilon^W(\theta)$$

yazılabilir. Bu ise

$$\delta\left(M_p^W(\theta)\right) = 0$$

anlamına gelir. Bu durum (2.3) ifadesi ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece, $\left\{A_{k_j}\right\}$ dizisinin A kümesine lacunary toplanabilir olduğu ortaya çıkar. Bu ise istenen sonuçtur.

Önceki teoreme benzer olarak aşağıdaki teoremi de verebiliriz:

Teorem 3.3 (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Bir $\{A_k\}$ dizisinin bir A kümesine

Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\delta_\theta(K) = 1 \text{ ve } W - lim\, A_{k_n} = A$$

olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots\}$

kümesinin var olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\delta_\theta(K) = 1$ ve $W - lim\, A_{k_n} = A$ olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots\}$ kümesinin var olduğunu kabul edelim. O zaman $\varepsilon > 0$ olmak üzere, her bir $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$\left|d\left(x, A_{k_n}\right) - d(x, A)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır.

$$K_\varepsilon^W := \left\{n \in \mathbb{N}: \left|d\left(x, A_{k_n}\right) - d(x, A)\right| \geq \varepsilon\right\}$$

ve

$$K' = \{k_{N+1}, k_{N+2}, \dots\}$$

ile belirtelim. O zaman

$$\delta_\theta(K') = 1 \text{ ve } K_\varepsilon^W \subseteq \mathbb{N} - K'$$

olması,

$$\delta_\theta(K_\varepsilon^W) = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olur.

($\Leftarrow$) Tersine, $\{A_k\}$ dizisi bir A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olsun. $q = 1,2,3, \dots$ için,

$$K_q^W := \left\{j \in \mathbb{N}: \left|d\left(x, A_{k_j}\right) - d(x, A)\right| \geq \frac{1}{q}\right\}$$

ve

$$M_q^W := \left\{j \in \mathbb{N}: \left|d\left(x, A_{k_j}\right) - d(x, A)\right| < \frac{1}{q}\right\}$$

ile belirtelim. O zaman,

$$\delta_\theta\left(K_q^W\right) = 0,$$

$$M_1^W \supset M_2^W \supset \cdots \supset M_i^W \supset M_{i+1}^W \supset \cdots \quad (2.4)$$

ve

$$\delta_\theta\left(M_q^W\right) = 1, \quad q = 1,2,3, \dots \quad (2.5)$$

olur.

Şimdi $j \in M_q^W(\theta)$ için $\left\{A_{k_j}\right\}$ dizisinin A kümesine Wijsman yakınsak olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki, $\left\{A_{k_j}\right\}$ dizisi A kümesine Wijsman yakınsak olmasın. O halde, sonsuz sayıda terim için,

$$\left|d\left(x, A_{k_j}\right) - d(x, A)\right| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı vardır.

$$M_\varepsilon^W := \left\{j \in \mathbb{N}: \left|d\left(x, A_{k_j}\right) - d(x, A)\right| < \varepsilon\right\}$$

ile belirtilirse,

$$\varepsilon > \frac{1}{q}$$

olacak şekilde bir q sayısı bulunabilir. O zaman,

$$\delta_\theta(M_\varepsilon^W) = 0$$

olur. Ayrıca, (2.4) ifadesinden dolayı,

$$M_q^W \subset M_\varepsilon^W$$

yazılabilir. Bu ise,

$$\delta_\theta\left(M_q^W\right) = 0$$

olması anlamına gelir. Bu durum (2.5) ifadesi ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece, $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman yakınsak olduğu ortaya çıkar. Bu ise istenilen sonuçtur.

Kaynaklar

Aubin, J.-P. and Frankowska, H., 1990. Set-valued analysis. Birkhauser, Boston.

Baronti, M. and Papini, P., 1986. Convergence of sequences of sets. In: Micchelli, C.A., Pai, D.V., Methods of functional analysis in approximation theory. ISNM 76, Birkhauser-Verlag, Basel, 133-155.

Beer, G., 1985. On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society,* **31**, 421-432.

Beer, G., 1994. Wijsman convergence: A survey. *Set-Valued and Variational Analysis,* **2**, 77-94.

Buck, R. C., 1953. Generalized asymptotic density. *American Journal of Mathematics*, **75**, 335-346.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum,* **2**, 241-244.

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence. *Analysis*, **5**, 301-313.

Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics,* **160**, 43-51.

Maddox, I. J., 1978. A new type of convergence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **83**, 61-64.

Mursaleen, M. and Alotaibi, A., 2011. Statistical lacunary summability and a Korovkin type approximation theorem. *Annali dell'Universitadi Ferrara,* **57**, 373-381.

Nuray, F. and Rhoades, B.E., 2012. Statistical convergence of sequences of sets. *Fasciculi Mathematici,* **49**, 87-99.

Powel, R. E. and Shah, S. M., 1972. Summability theory and its applications. Van Nostrand-Rheinhold, London.

Salat, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*, **30**, 139-150.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C., 1993. Set convergences. An attempt of classification. *Transactions of the American Mathematical Society,* **340**, 199-226.

Ulusu, U. and Nuray, F., 2012. Lacunary statistical convergence of sequences of sets, *Progress in Applied Mathematics,* **4**(2), 99-109.

Ulusu, U., 2013. Küme dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı, Doktora tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar, 75 sayfa.

Wijsman, R.A., 1964. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *American Mathematical Society. B*ulletin, **70**, 186-188.

Wijsman, R. A., 1966. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **123**(1), 32-45.