Afyon Kocatepe Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ DERGİSİ

5 (1-2)
115-130

Afyon Kocatepe University
JOURNAL OF SCIENCE

İLK BOZULMA SANSÜRLÜ ÖRNEKLEME PLANINA DAYALI BURR XII DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ VE BEKLENEN TEST SÜRESİ*

Coşkun KUŞ, Mehmet Fedai KAYA

Selçuk Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Konya

ÖZET

Bu çalışmada, ilk bozulma sansürlü örnekleme planı ele alınmıştır. Burr XII dağılımının parametrelerinin yeni nokta tahmin edicileri Menon'un [1] yöntemine benzer olarak elde edilmiş, özellikleri Monte Carlo simulasyon çalışması yapılarak incelenmiştir. Parametreler için güven aralıkları ve güven bölgeleri elde edilmiştir. Ayrıca ilk bozulma sansürlü örneklem planına dayalı beklenen test süresi hesaplanmış ve tam örnekleme planınki ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Beklenen Test Süresi, Burr XII Dağılımı, İlk Bozulma Sansürlü Örnekleme Planı, Güven Aralığı, Ortak Güven Bölgesi.

PARAMETER ESTIMATION OF THE BURR XII DISTRIBUTION AND EXPECTED TEST TIME BASED ON FIRST FAILURE-CENSORED SAMPLING PLAN

ABSTRACT

In this study, first failure-censored sampling plan is considered. Estimators of the parameters of Burr XII distribution are obtained paralel to Menon's [1] method and their properties are investigated via Monte Carlo simulation. Confidence interval and joint confidence region for the parameters are obtained. Also expected test time is calculated based on first failure-censored sampling plan and it is compared expected test time of complete sampling plan.

Keywords: Burr XII Distribution, Confidence Region, Expected Test Time, First Failure-Censored Sampling Plan, Joint Confidence Region.

---

1. GİRİŞ

İlk kez Burr [2] tarafından önerilen ve $BurrXII(\lambda,\beta)$ ile gösterilen iki parametreli Burr XII dağılımı, stokastik olayları modellemede çok kullanışlı olması bakımından son 20 yıl içerisinde özel bir ilgi görmüştür. Zimmer vd. [3] Burr XII dağılımının güvenilirlik analizinde kullanılması hakkında geniş bilgi vermiş ve stokastik olayları modellemede çok kullanışlı olduğuna dikkat çekmişlerdir. Burr XII dağılımının uygulama alanları ile ilgili yayımlanmış bazı makaleler; klinik denemeler Wingo [4], aktüerya bilimi Klugman [5] ve elektronik bileşenler Zimmer vd. [3] olarak sıralanabilir.

$BurrXII(\lambda,\beta)$ dağılımına sahip bir X rasgele değişkeninin, sırasıyla, olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonu,

$$f(x;c,k)=\lambda\beta x^{\beta-1}\left(1+x^{\beta}\right)^{-(\lambda+1)},\qquad x>0,\ \lambda>0,\ \beta>0$$

$$F(x;c,k)=1-\left(1+x^{\beta}\right)^{-\lambda}$$

şeklindedir.

Menon [1], Weibull dağılımının parametreleri için tam örnekleme dayalı yeni tahmin ediciler türetmiş ve bu tahmin edicilerin özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmada, Balasooriya [6] tarafından öne sürülen ilk bozulma sansürlü örnekleme planı ele alınmış, Burr XII dağılımının parametrelerinin yeni nokta tahmin edicileri Menon'un [1] yönteminden esinlenerek elde edilmiş ve özellikleri Monte Carlo simulasyon çalışması yapılarak incelenmiştir. Ayrıca parametrelerinin güven aralıkları ve güven bölgeleri elde edilmiş, ilk bozulma sansürlü örneklem planına dayalı beklenen test süresi hesaplanmış ve tam örneklem durumu ile karşılaştırılmıştır.

2. İLK BOZULMA SANSÜRLÜ ÖRNEKLEM

Balasooriya [6] tarafından geliştirilen ilk bozulma sansürleme modeli şu şekilde tanımlanmaktadır: n hacimli k tane (örneklem) grup olsun. Her bir grup ilk bozulma gerçekleşinceye kadar teste tabi tutulsun. Elde edilen k hacimli örnekleme, *ilk bozulma sansürlü örneklem(first-failure censored sample)* denir. Bu tanım şu şekilde de verilebilir: $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_n^i$, $i=1,2,\ldots,k$, sürekli F dağılım fonksiyonuna sahip n hacimli i. örneklem ve bu i. örneklemin sıra istatistikleri $X_{1:n}^i < X_{2:n}^i < \cdots < X_{n:n}^i$ olmak üzere, k örneklemin de birbirinden bağımsız olması koşulu altında, $X_{1:n}^{i}$, $i=1,2,\ldots,k$ örneklemine *ilk bozulma sansürlü örneklem* denir.

Balasooriya [6], iki parametreli üstel dağılım için n hacimli k örnekleme dayalı ilk bozulma sansürlü örnekleme planını incelemiş, harcanan test zamanı ve test maliyeti bakımından ilk bozulma sansürlü örnekleme planının $k\times n$ hacimli tam örnekleme planından daha avantajlı olduğunu göstermiştir.

3. BURR XII DAĞILIMI PARAMETRELERİ İÇİN YENİ TAHMİN EDİCİLERİ

$X_{1:n}^{1}, X_{1:n}^{2},\ldots, X_{1:n}^{k}$, $BurrXII(\lambda,\beta)$ dağılımına sahip bir kitleden alınmış n hacimli k örneklemin birinci sıra istatistikleri olsun (Birinci bozulma sansürlü örneklem). Aşağıdaki dönüşümü göz önüne alalım.

$$Z_{1:n}^{i}=\lambda\log\left\{1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right\} \quad ,i=1,2,\ldots,k$$

Kolayca görülebilir ki $Z_{1:n}^{i}$, n^{-1} ortalamalı üstel dağılıma sahip bir rasgele değişkendir. Böylece

$$E\left(Z_{1:n}^{i}\right)=n^{-1}$$

ve

$$Var\left(Z_{1:n}^{i}\right)=n^{-2}$$

şeklinde elde edilir. O zaman

$$Z_{1:n}^{i}=\lambda\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\Rightarrow E\left(Z_{1:n}^{i}\right)=\lambda E\left\{\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}$$

ifadesi kullanılarak β parametresi bilindiğinde λ parametresinin ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı bir tahmin edicisi

$$\hat{\lambda}_{1}=\frac{E\left(Z_{1:n}^{i}\right)}{\hat{E}\left\{\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}}=k\left\{n\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}^{-1} \tag{1}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\hat{E}\left\{\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}=k^{-1}\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]$$

biçimindedir. Alternatif olarak

$$Z_{1:n}^{i}=\lambda\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\Rightarrow Var\left(Z_{1:n}^{i}\right)=\lambda^{2}Var\left\{\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}$$

ifadesi kullanılarak β parametresi bilindiğinde λ parametresinin ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı bir tahmin edicisi

$$\hat{\lambda}_2 = \left\{ \frac{Var\left(Z_{1:n}^{i}\right)}{\hat{V}ar\left\{\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}} \right\}^{1/2}$$

$$= n^{-1}(k-1)^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left\{\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}^{2} - k^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}^{2}\right\}^{-1/2} \quad (2)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\hat{V}ar\left\{\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}$$

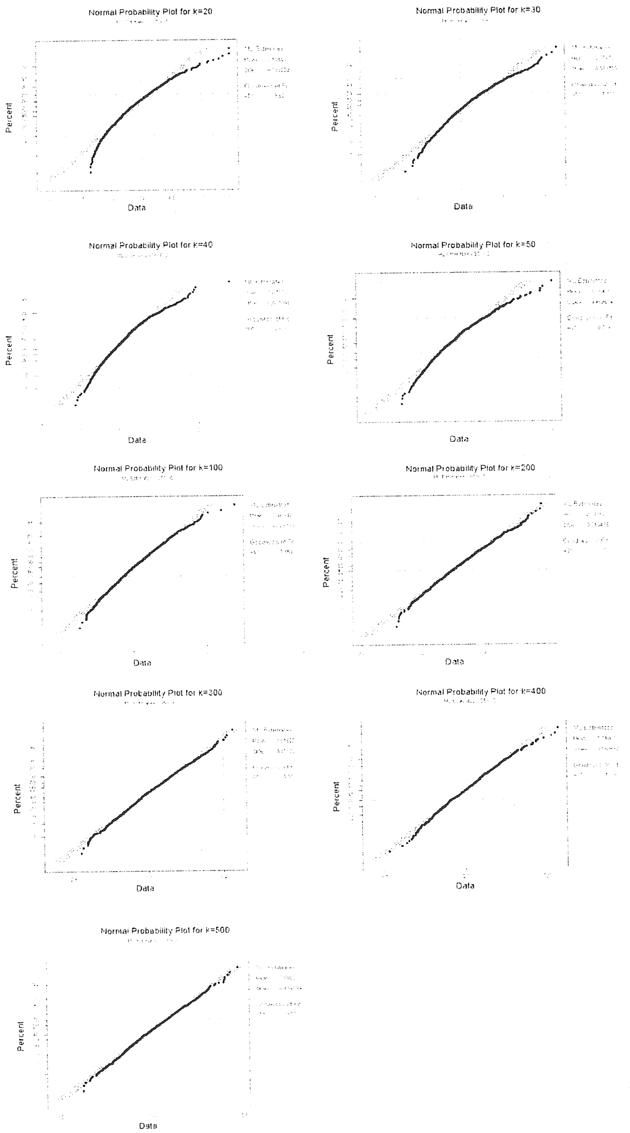
$$= (k-1)^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left\{\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}^{2} - k^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{i}\right)^{\beta}\right]\right\}^{2}\right\}$$

şeklindedir.

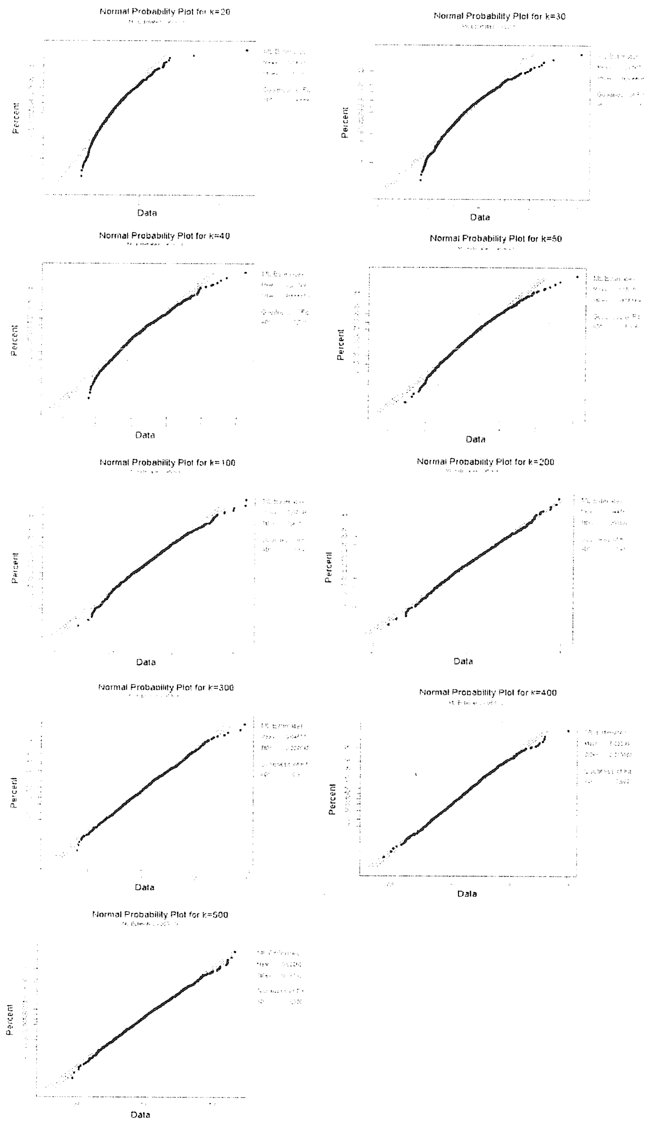
3.1. Simulasyon Çalışması

Delphi 5 programlama dili kullanılarak, $n = 20$, $k = 20, 30, 40, 50, 100, 200$, 300, 400 ve 500 durumları için 1000'er kez $BurrXII(3,2)$ dağılımdan örneklemler üretildi ve bu örneklemlere dayalı olarak $\hat{\lambda}_1$ ve $\hat{\lambda}_2$ tahmin edicilerinin aldığı değerlerin Normal P-P çizitleri Minitab 13.1 paket programı vasıtasıyla çizdirildi.

Şekil 1 ve Şekil 2'de görüldüğü gibi k değeri arttıkça $\hat{\lambda}_1$ ve $\hat{\lambda}_2$ tahmin edicilerin aldığı değerlerin ortalaması $\lambda = 3$'e yaklaşmakta, standart sapması ve Anderson-Darling (AD) istatistiği küçülmektedir. Ayrıca AD istatistiklerinin aldığı değerlere dikkatli bakılırsa k büyüdükçe $\hat{\lambda}_2$'nin dağılımın $\hat{\lambda}_1$'in dağılımına nazaran daha hızlı normal dağılıma yaklaştığı görülebilir. Simulasyon sonucu olarak $\hat{\lambda}_1$ ve $\hat{\lambda}_2$ tahmin edicilerin asimptotik yansızlık, tutarlık ve asimptotik normallik özelliklerine sahip olduğu söylenebilir. Bu özelliklerin teorik olarak gösterilmesi problemi halen açıktır.



Şekil 1. Burr XII dağılımının λ parametresinin ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı $\hat{\lambda}_1$ tahmin edicisinin $n = 20$ durumunda 1000 deneme sonucu aldığı değerlerin Normal P-P çizit gösterimi



Şekil 2. Burr XII dağılımının λ parametresinin ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı $\hat{\lambda}_2$ tahmin edicisinin $n = 20$ durumunda 1000 deneme sonucu aldığı değerlerin Normal P-P çizit gösterimi

4. YENİ GÜVEN ARALIĞI VE GÜVEN BÖLGESİ

$X_{1:n}^{1}, X_{1:n}^{2}, \ldots, X_{1:n}^{k}$ bağımsız ve aynı $BurrXII(\lambda, \beta)$ dağılımından alınmış ilk bozulma sansürlü örneklem ve $X_{1:n}^{(1)} < X_{1:n}^{(2)} < \cdots < X_{1:n}^{(k)}$, bu örneklemin sıra istatistikleri olsun. $X_{1:n}^{1}, X_{1:n}^{2}, \ldots, X_{1:n}^{k}$ bağımsız ve aynı $BurrXII(n\lambda, \beta)$ dağılımından alınmış k birimlik tam örneklem gibi görülebileceğinden Burr XII dağılımının parametrelerinin ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı güven aralıkları ve güven bölgeleri aşağıdaki gibi elde edilebilir. Aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım.

$$Y_{1:n}^{(i)} = n\lambda \log\{1 + [X_{1:n}^{(i)}]^{\beta}\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

Görülebilir ki $Y_{1:n}^{(1)} < Y_{1:n}^{(2)} < \cdots < Y_{1:n}^{(k)}$, 1 ortalamalı üstel dağılımı sahip bir kitleden alınmış sıra istatistikleri olur. Şimdi de aşağıdaki dönüşüm göz önüne alınsın:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= kY_{1:n}^{(1)} \\ \Delta_2 &= (k-1)\left(Y_{1:n}^{(2)} - Y_{1:n}^{(1)}\right) \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \left(Y_{1:n}^{(k)} - Y_{1:n}^{(k-1)}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ bağımsız ve 1 ortalamalı üstel dağılıma sahiptir. Böylece

$$\kappa = 2\Delta_1 = 2kY_{1:n}^{(1)}, \quad \chi_{(2)}^{2} \text{ dağılımına,}$$

$$\varepsilon = 2\sum_{i=2}^{k} \Delta_i = 2\sum_{i=1}^{k}\left(Y_{1:n}^{(i)} - Y_{1:n}^{(1)}\right), \quad \chi_{(2k-2)}^{2} \text{ dağılımına sahiptir.}$$

Aynı zamanda açıktır ki ε ve κ bağımsız rasgele değişkenlerdir. ξ ve η rasgele değişkenlerini aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\xi = \frac{\varepsilon}{(k-1)\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(Y_{1:n}^{(i)} - Y_{1:n}^{(1)}\right)}{k(k-1)Y_{1:n}^{(1)}}$$

$$\eta = \varepsilon + \kappa = 2\sum_{i=1}^{k} Y_{1:n}^{(i)}$$

Lemma 1. *ξ, $F_{2k-2,2}$ dağılımına, η, $\chi^2_{(2k)}$ dağılımına sahiptir. Aynı zamanda ξ ve η bağımsızdır. (Johnson ve ark.[7]).*

Aşağıdaki lemma, β ve λ parametrelerinin güven aralığı ve güven bölgesi oluşturmada yardımcı olacaktır.

Lemma 2. *Varsayalım ki $0 < a_1 < \cdots < a_k$ ve*

$$\xi(\beta) = \frac{\left[\sum_{i=1}^{k} \log\left(1 + a_i^{\beta}\right)\right] - k\log\left(1 + a_1^{\beta}\right)}{k(k-1)\log\left(1 + a_1^{\beta}\right)}$$

olsun. $\beta > 0$ olmak üzere

- *$0 < a_1 < 1$ ise $\forall t > 0$ için $\xi(\beta) = t$ denkleminin çözümü tektir.*
- *$a_1 > 0$ ve $\forall t < [k(k-1)]^{-1} \sum_{i=1}^{k} \log(a_i)\log^{-1}(a_1) - (k-1)^{-1}$ için $\xi(\beta) = t$ denkleminin çözümü tektir.*

İspat. $\xi(\beta)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\xi(\beta) = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{\log\left(1 + a_i^{\beta}\right)}{\log\left(1 + a_1^{\beta}\right)} - \frac{1}{k-1}$$

Eğer $f(\beta) = \dfrac{\log\left(1 + a_i^{\beta}\right)}{\log\left(1 + a_1^{\beta}\right)}$ fonksiyonu β'ya göre kesin artansa, $\xi(\beta)$ fonksiyonu da β'ya göre kesin artandır.

Durum 1. $1 < a_1 < a_i$, $\quad i = 2,3,\ldots,k$

$\log\left(1 + a_i^{\beta}\right) > \log\left(1 + a_1^{\beta}\right) > 0$ ve $\log\left(1 + a_i^{\beta}\right)$, $\log\left(1 + a_1^{\beta}\right)$'den β'ya göre daha hızlı kesin artan olduğundan $f(\beta)$, β'ya göre kesin artan ve dolayısıyla $\xi(\beta)$ fonksiyonu da, β'ya göre kesin artandır.

Durum 2. $0 < a_1 < 1 < a_i$, $\quad i = 2,3,\ldots,k$

$\log(1+a_i^{\beta}) > \log(1+a_1^{\beta}) > 0$ ve $\log(1+a_i^{\beta})$, β'ya göre kesin artan ve $\log(1+a_1^{\beta})$, β'ya göre kesin azalan olduğundan $f(\beta)$, β'ya göre kesin artan ve dolayısıyla $\xi(\beta)$ fonksiyonu da, β'ya göre kesin artandır.

Durum 3. $0 < a_1 < a_i < 1$, $\quad i = 2,3,\ldots,k$

$\log(1+a_i^{\beta}) > \log(1+a_1^{\beta}) > 0$ ve $\log(1+a_i^{\beta})$, $\log(1+a_1^{\beta})$'den β'ya göre daha yavaş kesin azalan olduğundan $f(\beta)$, β'ya göre kesin artan ve dolayısıyla $\xi(\beta)$ fonksiyonu da, β'ya göre kesin artandır.

Durum 1,2 ve 3'den $\xi(\beta)$ fonksiyonu β'ya göre kesin artandır. Ayrıca $\lim_{\beta\to 0}\xi(\beta)=0$ ve

- $0 < a_1 < 1$ *durumunda*

$\lim_{\beta\to\infty}\xi(\beta)=\infty$ olduğundan $\forall t > 0$ *için* $\xi(\beta)=t$ *denkleminin çözümü tektir.*

- $a_1 > 1$ durumunda

$$\lim_{\beta\to\infty}\xi(\beta)=[k(k-1)]^{-1}\sum_{i=1}^{k}\log(a_i)\log^{-1}(a_1)-(k-1)^{-1} \quad \text{olduğundan}$$

$\forall t < [k(k-1)]^{-1}\sum_{i=1}^{k}\log(a_i)\log^{-1}(a_1)-(k-1)^{-1}$ için $\xi(\beta)=t$ denkleminin çözümü tektir.

$F_{\alpha}(\delta_1,\delta_2)$, α sağ-kuyruk (right-tail) olasılıklı ve δ_1 ve δ_2 serbestlik dereceli F dağılımının yüzdeliği ve $\mathbf{X}_{1:n} = \left(X_{1:n}^{(1)}, X_{1:n}^{(2)}, \ldots, X_{1:n}^{(k)}\right)$ olsun.

Teorem 1. $X_{1:n}^{(1)} < X_{1:n}^{(2)} < \cdots < X_{1:n}^{(k)}$, $BurrXII(\lambda,\beta)$ dağılımına sahip bir kitleden alınmış ilk bozulma sansürlü örneklemin sıra istatistikleri olsun. O zaman verilen $0<\alpha<1$ için β parametresinin $100(1-\alpha)\%$ lık güven aralığı aşağıdaki gibidir.

$$\left(\varphi\left(\mathbf{X}_{1:n}, F_{1-\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right), \varphi\left(\mathbf{X}_{1:n}, F_{\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right)\right)$$

burada $\varphi(\mathbf{X}_{1:n},t)$,

$$\frac{\left\{\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(x_{1:n}^{(i)}\right)^{\beta}\right]\right\}-k\log\left[1+\left(x_{1:n}^{(1)}\right)^{\beta}\right]}{k(k-1)\log\left[1+\left(x_{1:n}^{(1)}\right)^{\beta}\right]}=t$$

lineer olmayan denklemde β 'nın çözümüdür.

İspat. Lemma 1'den biliyoruz ki pivot

$$\xi=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(Y_{1:n}^{(i)}-Y_{1:n}^{(1)}\right)}{k(k-1)Y_{1:n}^{(1)}}$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(i)}\right)^{\beta}\right]-k\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(1)}\right)^{\beta}\right]}{k(k-1)\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(1)}\right)^{\beta}\right]}$$

$F_{2k-2,2}$ dağılımına sahiptir. $0<\alpha<1$ için

$$\left\{\beta:F_{1-\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}<\frac{\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(i)}\right)^{\beta}\right]-k\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(1)}\right)^{\beta}\right]}{k(k-1)\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(1)}\right)^{\beta}\right]}<F_{\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right\}$$

olayı

$$\left\{\beta:\varphi\left(\mathbf{X}_{1:n},F_{1-\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right)<\beta<\varphi\left(\mathbf{X}_{1:n},F_{\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right)\right\}$$

olayına denktir. Bu da ispatı tamamlar.

Bir başka seçenekte, β 'nın üst $100(1-\alpha)\%$ lık güven limiti ul bulunabilir. O zaman β 'nın üst $100(1-\alpha)\%$ lık güven aralığı $(0,ul)$ olur.

Sonuç 1. $X_{1:n}^{(1)}<X_{1:n}^{(2)}<\cdots<X_{1:n}^{(k)}$, *$BurrXII(\lambda,\beta)$ dağılımına sahip bir kitleden alınmış ilk bozulma sansürlü örneklemin sıra istatistikleri olsun. O zaman verilen $0<\alpha<1$ için β parametresinin $100(1-\alpha)\%$ lık üst güven limiti*

$$\varphi\left(\mathbf{X}_{1:n}, F_{\alpha(2k-2,2)}\right)$$

şeklindedir. Burada, $\varphi(\mathbf{X}_{1:n}, t)$ *Teorem 1'deki gibi tanımlıdır.*

$\chi^2_{\alpha(\delta)}$, α sağ-kuyruk (right-tail) olasılıklı ve δ serbestlik dereceli Ki-kare dağılımının yüzdeliği olsun. β ve λ parametrelerinin $100(1-\alpha)\%$ lık güven bölgesi aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2. $X^{(1)}_{1:n} < X^{(2)}_{1:n} < \cdots < X^{(k)}_{1:n}$, *BurrXII*$(\lambda, \beta)$ *dağılımına sahip bir kitleden alınmış ilk bozulma sansürlü örneklemin sıra istatistikleri olsun. O zaman verilen* $0 < \alpha < 1$ *için* β *ve* λ *parametrelerinin* $100(1-\alpha)\%$ *lık ortak güven bölgesi aşağıdaki gibidir.*

$$\begin{cases} \varphi\left(\mathbf{X}_{1:n}, F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)}\right) < \beta < \varphi\left(\mathbf{X}_{1:n}, F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)}\right) \\ \dfrac{\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X^{(i)}_{1:n}\right)^{\beta}\right]} < \lambda < \dfrac{\chi^2_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X^{(i)}_{1:n}\right)^{\beta}\right]} \end{cases}$$

Burada, $\varphi(\mathbf{X}_{1:n}, t)$ *Teorem 1'deki gibi tanımlıdır.*

İspat. Lemma 1'den biliyoruz ki pivot

$$\eta = 2\sum_{i=1}^{k} Y^{(i)}_{1:n} = 2n\lambda\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X^{(i)}_{1:n}\right)^{\beta}\right],$$ $\chi^2_{(2k)}$ dağılımına sahiptir ve ξ den bağımsızdır. $0 < \alpha < 1$ için

$$P\left(F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)} < \xi < F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)}\right) = \sqrt{1-\alpha}$$

$$P\left(\chi_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)} < \eta < \chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}\right) = \sqrt{1-\alpha}$$

şeklindedir. Buradan

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)} < \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(i)}\right)^{\beta}\right]\right]-k\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(1)}\right)^{\beta}\right]}{k(k-1)\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(1)}\right)^{\beta}\right]} < F_{\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right.$$

B

$$\left.,\ \chi_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)} < 2n\lambda\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(i)}\right)^{\beta}\right] < \chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}\right\} = 1-\alpha$$

u ise aşağıdaki ifadeye denktir.

$$P\left\{\varphi\left(\mathbf{X}_{1:n}, F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)}\right) < \beta < \varphi\left(\mathbf{X}_{1:n}, F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)}\right)\right.$$

$$\left.,\ \frac{\chi^{2}_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(i)}\right)^{\beta}\right]} < \lambda < \frac{\chi^{2}_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(i)}\right)^{\beta}\right]}\right\} = 1-\alpha$$

Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 2. $X_{1:n}^{(1)} < X_{1:n}^{(2)} < \cdots < X_{1:n}^{(k)}$, *$BurrXII(\lambda,\beta)$ dağılımına sahip bir kitleden alınmış ilk bozulma sansürlü örneklem olsun. O zaman verilen $0<\alpha<1$ için β ve λ parametrelerinin $100(1-\alpha)\%$ lık ortak güven bölgesi aşağıdaki gibidir.*

$$\left\{\begin{array}{l} 0<\beta<\varphi\left(\mathbf{X}_{1:n}, F_{1-\sqrt{1-\alpha}(2k-2,2)}\right) \\ \dfrac{\chi^{2}_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(i)}\right)^{\beta}\right]} < \lambda < \dfrac{\chi^{2}_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(i)}\right)^{\beta}\right]} \end{array}\right.$$

Burada $\varphi\left(\mathbf{X}^{\mathrm{R}},t\right)$, Teorem 1'deki gibi tanımlıdır.

5. BEKLENEN TEST SÜRESİ

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, $BurrXII(\lambda, \beta)$ dağılımından n birimlik tam örneklem olsun. Bu durumda beklenen test zamanı $E(X_{n:n})$'dir. $X_{n:n}$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_n(x) = n\left\{1 - \left(1 + x^{\beta}\right)^{-\lambda}\right\}^{n-1} \beta\lambda x^{\beta-1}\left(1 + x^{\beta}\right)^{-(\lambda+1)}$$

şeklindedir. Böylece n birimlik tam örneklemin beklenen test zamanı aşağıdaki gibidir.

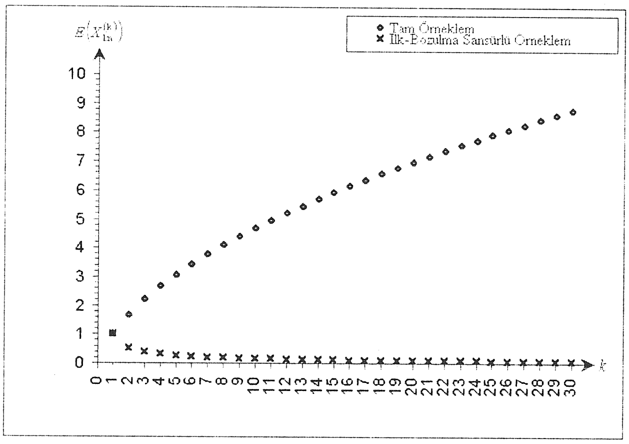
$$\begin{aligned}
E(X_{n:n}) &= \int_0^{\infty} xn\left\{1 - \left(1 + x^{\beta}\right)^{-\lambda}\right\}^{n-1} \beta\lambda x^{\beta-1}\left(1 + x^{\beta}\right)^{-(\lambda+1)} dx \\
&= \beta\lambda n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \int_0^{\infty} x^{\beta}\left(1 + x^{\beta}\right)^{-\lambda(j+1)-1} dx \\
&= \lambda n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \frac{\Gamma\{\lambda(j+1) - \beta^{-1}\}\Gamma(1 + \beta^{-1})}{\{\Gamma\{\lambda(j+1)\} + 1\}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Burada $\Gamma(\cdot)$, gamma fonksiyonudur

$X_{1:n}^{1}, X_{1:n}^{2}, \ldots, X_{1:n}^{k}$, $BurrXII(\lambda, \beta)$ dağılımından alınmış k birimlik birinci bozulma sansürlü örneklem ve $X_{1:n}^{(1)} < X_{1:n}^{(2)} < \cdots < X_{1:n}^{(k)}$, bu örneklemin sıra istatistikleri olsun. Bu durumda beklenen test zamanı $E\left(X_{1:n}^{(k)}\right)$'dir. $X_{1:n}^{1}, X_{1:n}^{2}, \ldots, X_{1:n}^{m}$ bağımsız ve aynı $BurrXII(n\lambda, \beta)$ dağılımından alınmış k birimlik tam örneklem gibi görülebileceğinden (4)'den birinci bozulma sansürlü örneklem planı durumunda beklenen test zamanı

$$E\left(X_{1:n}^{(k)}\right) = \lambda kn \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \frac{\Gamma\{n\lambda(j+1) - \beta^{-1}\}\Gamma(1 + \beta^{-1})}{\{\Gamma\{n\lambda(j+1)\} + 1\}} \qquad (5)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 3. İlk bozulma sansürlü ve tam örneklem durumunda beklenen test süresi

$n = k = 1,2,\ldots,30$, $\lambda = 2$ ve $\beta = 1$ için ilk bozulma sansürlü örneklem planın ve tam örneklem planın beklenen test süresinin grafiği Şekil 3'de verilmiştir. Şekil 3'de görüldüğü gibi k arttıkça tam örnekleme dayalı test süresi artarken, ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı test süresi azalmaktadır. Bu da ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı test planının süre bakımında ne kadar avantajlı olduğunu göstermektedir.

6. UYGULAMA

Teorem 1 ve Teorem 2'deki sonuçları örneklendirmek için $n = 5$ ve $k = 10$ durumu için $BurrXII(1,3)$ dağılımından ilk bozulma sansürlü örneklem üretildi. Üretilen örneklem aşağıdaki çizelgededir.

Tablo 1. Üretilen ilk bozulma sansürlü örneklem

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{1:5}^{i}$	0.1275	0.3557	0.4887	0.5001	0.5270	0.6959	0.8172	0.8307	0.8921	0.9546

(1) ve (2) eşitlikleri kullanılarak, λ parametresinin tahminleri $\hat{\lambda}_1 = 0.5744$ ve $\hat{\lambda}_2 = 0.9336$ olarak bulunur. β *ve* λ parametrelerinin 95% 'lik güven aralığını ve ortak güven bölgesini elde etmek için gerekli olan yüzdelikler Minitab 13.1 paket programı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$F_{0.025(18,2)} = 39.4424$, $F_{0.975(18,2)} = 0.2193$ ve $F_{0.05(18,2)} = 19.4402$

$F_{0.0127(18,2)} = 78.1835$, $F_{0.9873(18,2)} = 0.1780$ ve $F_{0.0253(18,2)} = 38.9680$

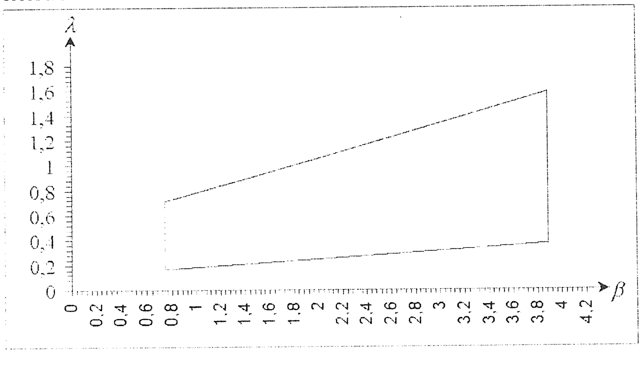
$\chi^2_{0.0127(20)} = 36.7027$ ve $\chi^2_{0.9873(20)} = 8.5780$

Teorem 1 ve Sonuç 1 kullanılarak β parametresinin 95% 'lik güven aralıkları $(0.8262, 3.5303)$ veya $(0, 3.1516)$ şeklinde bulunur. Teorem 2 ve Sonuç 2 kullanılarak β *ve* λ parametrelerinin 95% 'lik ortak güven bölgeleri, sırasıyla,

$$\begin{cases} 0.7385 < \beta < 3.8946 \\ \dfrac{8.5780}{2\times 5\times \sum_{i=1}^{k} \log\left[1+\left(X_{1:5}^{(i)}\right)^{\beta}\right]} < \lambda < \dfrac{36.7027}{2\times 5\times \sum_{i=1}^{k} \log\left[1+\left(X_{1:5}^{(i)}\right)^{\beta}\right]} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} 0 < \beta < 3.5242 \\ \dfrac{8.5780}{2\times 5\times \sum_{i=1}^{k} \log\left[1+\left(X_{1:5}^{(i)}\right)^{\beta}\right]} < \lambda < \dfrac{36.7027}{2\times 5\times \sum_{i=1}^{k} \log\left[1+\left(X_{1:5}^{(i)}\right)^{\beta}\right]} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 4. β ve λ parametrelerinin (6)'deki 95% 'lik ortak güven bölgesi

Şekil 4'de β ve λ parametrelerinin (6)'daki 95% 'lik ortak güven bölgesi görülmektedir. β büyüdükçe güven bölgesi genişlemektedir.

KAYNAKLAR

1. Menon M.V., Estimation of the shape and scale parameters of the Weibull distribution, Technometrics, 5, 175-182, (1963).
2. Burr I. W., Cumulative frequency function, Annals Math. Stat., 13, 215-232, (1942).
3. Zimmer W.J., Keats, J.B., Wang F.K., The Burr XII distribution in reliability analysis, J. Qual. Tech., 30, 386-394, (1998).
4. Wingo D.R., Maximum likelihood methods for fitting the Burr Type XII distribution to life test data, Biometrical J., 25, 77-84, (1983).
5. Klugman S.A., Loss distributions, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Actuarial Mathematics, 35, 31-55, (1986).
6. Balasooriya U., Failure-censored reliability sampling palns for the exponential distribution, Journal of Statistical Computations and Simulation, 52, 337-349, (1995).
7. Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N., Continuous Univariate Distributions, 2, second ed., John Wiley and Sons, New York, (1995).
8. Kuş, C., Bazı Yaşam Zamanı Dağılımlarının Parametrelerinin Tam ve Sansürlü Verilere Dayalı Tahmini, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, (2004)

YAYIN KURALLLARI

1. Dergi "Hakemli Dergi" statüsüne uygun olarak yayınlanmaktadır.

2. Dergide yayınlanacak yazılar, Fen ve Mühendislik Bilimleri alanındaki konuları kapsar.

3. Gönderilen çalışmalar, alanında bir boşluğu dolduracak araştırmaya dayalı özgün çalışma veya daha önce yayınlanmış bir yazıyı değerlendiren, bu konuda yeni ve dikkate değer görüşleri ortaya koyan araştırma veya inceleme olmalıdır.

4. Yayınlanmak üzere gönderilen yazılar, özet dahil 15 sayfayı geçmemeli ve daha önce yayınlanmamış olmalıdır.

5. Dergi Yayın Kurulu, biçim açısından uygun bulduğu yazıları seçilmiş hakemlere (üç hakeme) gönderir, makaleler üç hakemin en az ikisinin oluruyla yayın alır. Yayınlanması için düzeltilmesine karar verilen yazıların yazarları tarafından en geç (posta süresi dahil) 10 gün içerisinde teslim edilmesi gereklidir. Bu süreyi aşan yazılar daha sonraki sayılarda değerlendirilecektir.

6. Dergide yayınlanan yazıların, telif hakkı dergiye aittir. Fen Bilimleri Dergisi telif hakkı karşılığında yazarlarına bir adet dergi ve 1. yazara 1 adet dergi ve 20 adet ayrı baskı gönderilecektir.

7. Yazım dili Türkçe ve İngilizce'dir. Makalenin başında Türkçe ve İngilizce olmak üzere en az 100, en fazla 200 kelimeden oluşan özet ile Türkçe ve İngilizce anahtar sözcükler (en az 3 en fazla 5 kelime) verilmelidir.

8. Hazırlanan yazı şu bölümlerden oluşmalıdır: Başlık, Yazarlar, Adres, Özet, Anahtar Kelimeler, Yabancı Dilde Başlık, Abstract, Key words, Giriş, Materyal ve Yöntem, Bulgular, Tartışma ve Sonuç, Kaynaklar. Türkçe hazırlanan yazıda Abstract'tan önce Y.dilde başlık; Y.dildeki yazıda ise özetten önce Türkçe başlık bulunmalıdır. Yazarların ünvanı yazılmamalıdır.

9. Dergiye gönderilen yazılar dört nüsha (yazar isimleri bulunan bir ve yazar isimleri bulunmayan üç nüsha) olmalıdır. Ayrıca WINDOWS ortamında ve MS WORD 7.0 ve daha sonraki sürümlerinde yazılmalıdır. Yazı içinde kullanılan grafikler WINDOWS ortamında açılabilecek bir grafik formatında, fotoğraflar scannerda 300 dpi çözünürlüğünde taranmış olarak JPG veya GIF formatında gönderilmelidir. Dergiye gönderilen yazı, şekil ve fotoğrafların dijital kayıtları bir disketle gönderilmelidir. Şekil ve tablolar numaralandırılmalıdır. Şekil adı, şekil altında; tablo adı tablonun üzerinde yer almalıdır.

10. Yazı karakteri Times New Roman, 11 punto, satırlar tek aralıklı yazılacaktır.

11. Paragraflar satır başından başlamalı, iki paragraf arasında bir satır boşluk bırakılmalıdır.

12. Sayfa düzeni normal, sayfa yapısı üstten 5 cm, alttan 5.5 cm, soldan 4.5 cm, sağdan 4.5 cm, cilt payı 0 olmalı, herhangi bir özel format bulunmamalıdır.

13. Başlıklar ardışık olarak numaralanmalı ve satır başından başlamalıdır. Ana başlıklar büyük harflerle ve koyu, alt başlıklarda her kelimenin ilk harfi büyük ve başlık koyu olmalıdır.

14. Makalelerde dipnot kullanılmayacaktır.

15. Kaynaklar metin içinde ilk verilenden başlanarak numaralandırılmalı ve köşeli parantez içinde verilmelidir. Metin sonunda "kaynaklar" başlığı altında numara sırasına göre listelenmelidir. Listede kaynaklar aşağıdaki şekilde belirtilmelidir: Periyodikler: Yazar soyadı, Adının ilk harfi, (varsa diğer yazarlar aynı şekilde), Makale adı, Dergi adı, Cilt no (sayı), Sayfa aralığı, (yayın yılı). Kitaplar: Yazar soyadı, Adının ilk harfi (varsa diğer yazarlar aynı şekilde), Kitap adı, varsa editörün adı, Basım sayısı, Cilt no, Yayınevi adı, Basıldığı yer, Sayfa sayısı, (Yayın yılı) Tezler: Yazar soyadı, Adının ilk harfi, Tez adı, Tez türü, Çalışmanın yapıldığı enstitü adı ve adresi, Sayfa sayısı, Çalışmanın yapıldığı yıl. Kaynaklar kısmı için örnekler aşağıda verilmiştir. -Konuk M., Brown E., Biosynthesis of Nebularine Involves Enzymic Release of Hdroxylamine From Adenosine, Phytochemistry, 38:(1), 61-71, (1995). -Konuk M., Babaoğlu M., Bitki Biyoteknolojisi II, Editörler; Özcan S., Gürel E., Babaoğlu M., 1. Basım, Vol:2, Selçuk Üniversitesi Basım Evi, Konya, 1-45sf (1991). -Konuk M., Studies of The Biosynthesis and Properties of Nebularine, Doktora Tezi, Department of Biochemistry, University College of Swansea, 200, (1993)

16. Sayfa numarası çıktı üzerinde sağ üst köşeye verilmelidir.

17. Dergideki yazıların bilimsel ve idari sorumluluğu yazarına aittir.

18. Yazılar "Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, Fen-Edebiyat Fakültesi, ANS Kampüsü, AFYON" adresine gönderilecektir. Yazılara yazışma yapılacak yazarla ilgili ayrı bir sayfada ad, soyad, unvan, posta, telefon, faks ve e-posta bilgileri eklenmelidir.