Afyon Kocatepe Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ DERGİSİ

7 (1)
145-153

Afyon Kocatepe University
JOURNAL OF SCIENCE

R_1^3 VE R_1^4 UZAYLARINDA MİNİMAL HOMOTETİK HİPERYÜZEYLERİN CAUSAL KARAKTERLERİ

Derya SAĞLAM

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 06100
Tandoğan Ankara

ÖZET

1995 yılında Ignace Van de Woestyne, R_v^{n+1} yarı Öklidiyen uzayda $\varphi=(x_1,x_2,...,x_n,f)$, $f:R^n \to R$ dönüşümüyle verilen n boyutlu minimal homotetik hiperyüzeylerin denklemlerini belirlemiştir [1]. Bu çalışmada, R_1^3 ve R_1^4 uzaylarındaki daha önce belirlenmiş olan minimal homotetik hiperyüzeylerin causal karakterleri bulunmuş ve genel olarak bu yüzeylerin zamansı olduğu gösterilmiştir. Daha açık olarak yüzeylerin normal vektör alanının uzaysı olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca R_1^3 uzayında $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=-1$, $\varepsilon_3=1$ olmak üzere

$\varphi=(x_1,x_2,x_3), x_3=(x_1+p_1)tan(p_2x_2+q)$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyinin ve R_1^4 uzayında $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=-1$, $\varepsilon_3=1$, $\varepsilon_4=1$ olmak üzere

$\varphi=(x_1,x_2,x_3,x_4), x_4=(x_1+p_1)tan(p_2x_2+q)$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyinin zamansı olması için gerek ve yeter koşul

$(x_1+p_1)^2p_2^2sec^2(p_2x_2+q)<1$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Aksi takdirde bu yüzeyler uzaysı olur.

Anahtar Kelimeler: Causal Karakter, Lorentz Uzayı, Minimal Homotetik Hiperyüzeyler.

CAUSAL CHARACTERS OF MINIMAL HOMOTHETICAL HYPERSURFACES IN R_1^3 AND R_1^4

ABSTRACT

In 1995, Ignace Van de Woestyne determined the equations of the n-dimensional minimal homothetical hypersurfaces given by the transformation $\varphi=(x_1,x_2,...,x_n,f), f:R^n \to R$ in semi-Euclidean space R_v^{n+1} [1]. In this paper, the causal characters of the minimal homothetical hypersurfaces earlier determined in R_1^3 and R_1^4 were found and in general, this surfaces were showed to be timelike. In other words, it is proved that the normal vector field of the surfaces is spacelike. Moreover, the minimal homothetical hypersurface given by

$\varphi=(x_1,x_2,x_3), x_3=(x_1+p_1)tan(p_2x_2+q)$

for $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=-1$, $\varepsilon_3=1$ in R_1^3 and the minimal homothetical hypersurface given by

$\varphi=(x_1,x_2,x_3,x_4), x_4=(x_1+p_1)tan(p_2x_2+q)$

for $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=-1$, $\varepsilon_3=1$, $\varepsilon_4=1$ in R_1^4 are timelike if and only if

$(x_1+p_1)^2 p_2^2 sec^2(p_2x_2+q)<1$.

Otherwise, these surfaces are spacelike.

Keywords: Causal Character, Lorentz Space, Minimal Homothetical Hypersurfaces.

1.GİRİŞ

R_v^{n+1} yarı Öklidiyen uzayda $\varphi=(x_1,x_2,...,x_n,f)$, $f:R^n \to R$ dönüşümüyle verilen n boyutlu bir hiperyüzeyi göz önüne alalım. Yukarıdaki f fonksiyonu, bir değişkenli n tane fonksiyonun çarpımı ise, yani $f(p_1,...,p_n)=f_1(p_1)...f_n(p_n)$ biçiminde ise hiperyüzeye homotetiktir denir [1].

M, R_s^3 nin minimal homotetik hiperyüzeyi olsun. Öyleyse M, bir düzlem veya aşağıdaki hiperyüzeylerden biridir.

1) $x_k=(x_i+p_i)tan(p_jx_j+q)$, $\varepsilon_i\varepsilon_k=1$.

2) $x_k=(x_i+p_i)tanh(p_jx_j+q)$, $\varepsilon_i\varepsilon_k=-1$.

3) $x_k=(x_i+p_i)coth(p_jx_j+q)$, $\varepsilon_i\varepsilon_k=-1$.

4) $x_k = Ce^{\beta(x_i \pm x_j)}$, $\varepsilon_i \varepsilon_j = -1$.

Burada $(i\ j\ k)$, 1, 2 ve 3 ün bir permütasyonu, C, p_i, p_j, q ve β da sabitlerdir [1].

M, R_s^4 nin minimal homotetik hiperyüzeyi olsun. Öyleyse M, bir düzlem veya aşağıdaki hiperyüzeylerden biridir.

1) $x_l = Ce^{L_i x_i + L_j x_j + L_k x_k}$, $\varepsilon_i L_i^2 + \varepsilon_j L_j^2 + \varepsilon_k L_k^2 = 0$.

2) $x_l = (x_i + p_i) tan(p_j x_j + q)$, $\varepsilon_i \varepsilon_l = 1$.

3) $x_l = (x_i + p_i) tanh(p_j x_j + q)$, $\varepsilon_i \varepsilon_l = -1$.

4) $x_l = (x_i + p_i) coth(p_j x_j + q)$, $\varepsilon_i \varepsilon_l = -1$.

5) $x_l = (Cx_i + p_i)e^{\beta(x_j \pm x_k)}$, $\varepsilon_j \varepsilon_k = -1$.

6) $x_l = \pm \dfrac{(x_i + p_i)(x_j + p_j)}{x_k + p_k}$, $\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_l = 1$.

Burada $(i\ j\ k\ l)$, 1, 2, 3 ve 4 ün bir permütasyonu, C, L_i, L_j, L_k, p_i, p_j, p_k, q ve β da sabitlerdir [1].

2.TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 V vektör uzayı üstünde, $b: V \times V \rightarrow R$ iki-lineer fonksiyonuna iki-lineer form, eğer bu iki-lineer form simetrik ise b ye simetrik iki-lineer form denir [2].

Tanım 2.2 b, V üstünde simetrik iki-lineer form olsun.

1) $\forall v \in V$, $v \neq 0 \Rightarrow b(v,v) > 0$

önermesi doğruysa b ye pozitif tanımlı,

2) $\forall v \in V$, $v \neq 0 \Rightarrow b(v,v) < 0$

önermesi doğruysa b ye negatif tanımlı,

3) $\forall v \in V$, $b(v,v) \geq 0$ ise b ye yarı pozitif tanımlı,

4) $\forall v \in V$, $b(v,v) \leq 0$ ise b ye yarı negatif tanımlı,

5) $[\forall w \in V,\ b(v,w) = 0] \Rightarrow v = 0$

oluyorsa b ye yoz olmayan (non-dejenere) bir form denir [2].

b, V üstünde simetrik iki-lineer form ve W, V nin bir alt vektör uzayı olsun. b nin $W \times W$ ye kısıtlanmışı olan $b/W \times W$ fonksiyonu kısaca b/W ile gösterilir. b/W fonksiyonu W üstünde simetrik iki-lineer form olur. b

pozitif tanımlı ise b/W da pozitif tanımlıdır. Diğer önermeler için de aynı şeyleri söylemek mümkündür [2].

Tanım 2.3 b, V üstünde simetrik iki-lineer form olsun. b/W negatif tanımlı olacak biçimdeki W alt uzaylarının boyutlarının en büyüğüne b nin indeksi denir ve v ile gösterilir. $0 \leq v \leq dim V$ olduğu açıktır [2].

Tanım 2.4 V üstünde simetrik, yoz olmayan bir g iki-lineer formuna V üstünde bir skalar çarpım denir. g, V üstünde pozitif tanımlı bir skalar çarpım ise g ye V üstünde bir iç çarpım denir. V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere V üstünde bir skalar çarpım varsa V ye skalar çarpımlı vektör uzayı denir [2].

Teorem 2.5 $V \neq \{0\}$ olmak üzere, V skalar çarpımlı vektör uzayı ise V nin bir ortonormal tabanı vardır [2].

V skalar çarpımlı vektör uzayının bir $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal tabanına göre g nin matrisi köşegensel bir matris olur. Çünkü, $\varepsilon_j = g(e_j, e_j)$ olmak üzere $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j$ dir. $\varepsilon_j = 1$ veya $\varepsilon_j = -1$ dir. $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ sıralı n-lisine g nin işareti denir. İşareti negatif sayıların sayısı g nin indeksine eşittir. g nin indeksine V nin indeksi denir [2].

Tanım 2.6 M manifoldu üstünde indeksi sabit, simetrik (0,2) tipinde, yoz olmayan, düzgün bir g tensör alanına M üstünde metrik tensör denir. M diferensiyellenebilir manifoldu üstünde bir g metrik tensörü varsa M ye bir yarı Riemann manifoldu denir. g nin indeksine, M yarı Riemann manifoldunun da indeksi denir. M yarı Riemann manifoldunun boyutu 1 den büyük ve indeksi 1 ise Lorentz manifoldu olarak adlandırılır. Bir Lorentz manifoldunun herhangi bir teğet uzayının da indeksi 1 dir ve Lorentz uzayı olarak adlandırılır [2].

Tanım 2.7 W bir V Lorentz uzayının alt uzayı ve g, V üstünde bir skalar çarpım olmak üzere

1) g/W pozitif tanımlı yani W bir iç çarpım uzayı ise W ya uzaysı (spacelike),

2) g/W non-dejenere ve indeksi 1 ise W ya zamansı (timelike),

3) g/W dejenere ise W ya ışıksı (lightlike) denir.

Yukarıda tanımlanan tiplere W nın causal karakteri denir [2].

Teorem 2.8 W bir V Lorentz uzayının alt uzayı olsun. Bir W alt uzayının zamansı olması için gerek ve yeter koşul dik tümleyeni olan $W^{\perp}$ uzayının uzaysı olmasıdır. $(W^{\perp})^{\perp}=W$ olduğundan W alt uzayının uzaysı olması için gerek ve yeter koşul dik tümleyeni olan $W^{\perp}$ uzayının zamansı olmasıdır. W alt uzayının ışıksı olması için gerek ve yeter koşul dik tümleyeni olan $W^{\perp}$ uzayının ışıksı olmasıdır [2].

3. R_1^3 UZAYINDA MİNİMAL HOMOTETİK HİPERYÜZEYLERİN CAUSAL KARAKTERLERİ

R_1^3 uzayı 3 boyutlu bir Lorentz uzayıdır. Bir hiperyüzeyin causal karakteri teğet uzayının causal karakteridir.

Lemma 3.1 R_1^3 uzayında, $\varepsilon_1 \varepsilon_3=1$, $(\varepsilon_1=\varepsilon_3=1,\ \varepsilon_2=-1)$ olmak üzere

$$\varphi=(x_1,x_2,x_3),\ x_3=(x_1+p_1)tan(p_2x_2+q) \qquad (3.1)$$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyinin birim normali U olsun. Buna göre

U uzaysı $\Leftrightarrow (x_1+p_1)^2p_2^2sec^2(p_2x_2+q)<1$,

U zamansı $\Leftrightarrow (x_1+p_1)^2p_2^2sec^2(p_2x_2+q)>1$

olur.

İspat. Hiperyüzeyin teğet uzayının baz vektörlerini belirten vektör alanları

$\varphi_1=(1,0,tan(p_2x_2+q))$, $\varphi_2=(0,1,(x_1+p_1)p_2sec^2(p_2x_2+q))$,

olur. Yüzeyin normali

$N=(-tan(p_2x_2+q),\ (x_1+p_1)p_2sec^2(p_2x_2+q),1)$

dir. Ayrıca

$<\varphi_1,\varphi_1>=sec^2(p_2x_2+q)>0$,

$<\varphi_2,\varphi_2>=-1+(x_1+p_1)^2p_2^2sec^4(p_2x_2+q)$,

$<N,N>=sec^2(p_2x_2+q)(1-(x_1+p_1)^2p_2^2\ sec^2(p_2x_2+q))$

olduğu kolayca görülebilir. Öyleyse

$1-(x_1+p_1)^2p_2^2\ sec^2(p_2x_2+q)<0 \Leftrightarrow \varphi_2$ uzaysı,

$1-(x_1+p_1)^2p_2^2\ sec^2(p_2x_2+q)<0 \Leftrightarrow N$ zamansı

ve

$1-(x_1+p_1)^2p_2^2\ sec^2(p_2x_2+q)>0 \Leftrightarrow \varphi_2$ zamansı,

$1-(x_1+p_1)^2p_2^2\ sec^2(p_2x_2+q)>0 \Leftrightarrow N$ uzaysı olur.

$$U=\frac{1}{\sqrt{\left|\langle N,N\rangle\right|}}N$$

olduğundan $<U,U>$ ile $<N,N>$ nin işareti aynıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2 R_1^3 uzayında, $\varepsilon_1\varepsilon_3=-1$, ($\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$) olmak üzere

$\varphi=(x_1,x_2,x_3)$, $x_3=(x_1+p_1)tanh(p_2x_2+q)$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyinin birim normali uzaysıdır.

İspat. Hiperyüzeyin teğet uzayının baz vektörlerini belirten vektör alanları

$\varphi_1=(1,0,tanh(p_2x_2+q))$, $\varphi_2=(0,1,(x_1+p_1)p_2sech^2(p_2x_2+q))$,

olur. Yüzeyin normali

$N=(\tanh(p_2x_2+q),-(x_1+p_1)p_2\,\text{sech}^2(p_2x_2+q),1)$

dir. Ayrıca

$<\varphi_1,\varphi_1>=-sech^2(p_2x_2+q)<0$,

$<\varphi_2,\varphi_2>=1+(x_1+p_1)^2p_2^2sech^4(p_2x_2+q)>0$,

$<N,N>=sech^2(p_2x_2+q)(1+(x_1+p_1)^2p_2^2\ sech^2(p_2x_2+q))>0$

olduğu kolayca görülebilir. Yüzeyin birim normali

$$U=\frac{1}{\sqrt{\left|\langle N,N\rangle\right|}}N$$

olduğundan U uzaysı olur.

Lemma 3.3 R_1^3 uzayında, $\varepsilon_1\varepsilon_3=-1$, ($\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$) olmak üzere

$\varphi=(x_1,x_2,x_3)$, $x_3=(x_1+p_1)coth(p_2x_2+q)$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyinin birim normali uzaysıdır.

İspat. Lemma 3.2 nin ispatına benzer biçimde gösterilebilir.

Lemma 3.4 R_1^3 uzayında, $\varepsilon_1\varepsilon_2=-1$, ($\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$) olmak üzere

$\varphi=(x_1,x_2,x_3)$, $x_3=Ce^{\beta(x_1+x_2)}$
dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyinin birim normali uzaysıdır.

İspat. Lemma 3.2 nin ispatına benzer biçimde gösterilebilir.

Lemma 3.5 R_1^3 uzayında, $\varepsilon_1\varepsilon_2=-1$, $(\varepsilon_1=-1,\ \varepsilon_2=\varepsilon_3=1)$ olmak üzere
$\varphi=(x_1,x_2,x_3)$, $x_3=Ce^{\beta(x_1-x_2)}$
dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyinin birim normali uzaysıdır.

İspat. Lemma 3.2 nin ispatına benzer biçimde gösterilebilir.

TEOREM 3.6 R_1^3 UZAYINDA (3.1) İN DIŞINDAKİ BÜTÜN MİNİMAL HOMOTETİK HİPERYÜZEYLER ZAMANSIDIR. (3.1) İN BELİRTTİĞİ
$\varphi=(x_1,x_2,x_3)$, $x_3=(x_1+p_1)tan(p_2x_2+q)$
minimal homotetik hiperyüzeyinin zamansı olması için gerek ve yeter koşul
$(x_1+p_1)^2p_2^2sec^2(p_2x_2+q)<1$
eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Aksi takdirde yüzey uzaysı olur.

İspat. Teorem 2.8 e göre hiperüzeyin birim normali uzaysı ise teğet uzay zamansı ve birim normali zamansı ise teğet uzay uzaysı olmak zorundadır. Öyleyse Lemma 3.1, Lemma 3.2, Lemma 3.3, Lemma 3.4 ve Lemma 3.5 e göre ispat tamamlanmış olur.

4. R_1^4 UZAYINDA MİNİMAL HOMOTETİK HİPERYÜZEYLERİN CAUSAL KARAKTERLERİ

R_1^4 uzayı 4 boyutlu bir Lorentz uzayıdır. Bir hiperyüzeyin causal karakteri teğet uzayının causal karakteridir.

Lemma 4.1 R_1^4 uzayında, $\varepsilon_1L_1^2+\varepsilon_2L_2^2+\varepsilon_3L_3^2=0$ $(\varepsilon_1=-1,$ $\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1)$ olmak üzere
$\varphi=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $x_4=Ce^{L_1x_1+L_2x_2+L_3x_3}$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyin birim normali uzaysıdır.

İspat. Lemma 3.2 nin ispatına benzer biçimde gösterilebilir.

Lemma 4.2 R_1^4 uzayında, $\varepsilon_1 \varepsilon_4=1$, $(\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1,\ \varepsilon_2=-1)$ olmak üzere

$$\varphi=(x_1,x_2,x_3,x_4),\ x_4=(x_1+p_1)tan(p_2x_2+q) \qquad (4.1)$$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyin birim normali U olsun. Buna göre

U uzaysı $\Leftrightarrow (x_1+p_1)^2 p_2^2 sec^2(p_2x_2+q)<1$,

U zamansı $\Leftrightarrow (x_1+p_1)^2 p_2^2 sec^2(p_2x_2+q)>1$

olur.

İspat. Lemma 3.1 nin ispatına benzer biçimde gösterilebilir.

Lemma 4.3 R_1^4 uzayında, $\varepsilon_1 \varepsilon_4=-1$,$(\varepsilon_1=-1, \varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1)$ olmak üzere

$\varphi=(x_1,x_2,x_3,x_4),\ x_4=(x_1+p_1)tanh(p_2x_2+q)$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyin birim normali uzaysıdır.

İspat. Lemma 3.2 nin ispatına benzer biçimde gösterilebilir.

Lemma 4.4 R_1^4 uzayında, $\varepsilon_1 \varepsilon_4=-1$,$(\varepsilon_1=-1, \varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1)$ olmak üzere

$\varphi=(x_1,x_2,x_3,x_4),\ x_4=(x_1+p_1)coth(p_2x_2+q)$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyin birim normali uzaysıdır.

İspat. Lemma 3.2 nin ispatına benzer biçimde gösterilebilir.

Lemma 4.5 R_1^4 uzayında, $\varepsilon_2 \varepsilon_3=-1$,$(\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1, \varepsilon_2=-1)$ olmak üzere

$\varphi=(x_1,x_2,x_3,x_4),\ x_4=(Cx_1+p_1)e^{\beta(x_2+x_3)}$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyin birim normali uzaysıdır.

İspat. Lemma 3.2 nin ispatına benzer biçimde gösterilebilir.

Lemma 4.6 R_1^4 uzayında, $\varepsilon_2 \varepsilon_3=-1,(\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1,\varepsilon_2=-1)$ olmak üzere

$\varphi=(x_1,x_2,x_3,x_4), x_4=(Cx_1+p_1)e^{\beta(x_2-x_3)}$

dönüşümüyle verilen minimal homotetik hiperyüzeyin birim normali uzaysıdır.

İspat. Lemma 3.2 nin ispatına benzer biçimde gösterilebilir.

TEOREM 4.7 R_1^4 UZAYINDA (4.1) İN DIŞINDAKİ BÜTÜN MİNİMAL HOMOTETİK HİPERYÜZEYLER ZAMANSIDIR. (4.1) İN BELİRTTİĞİ

$\varphi=(x_1,x_2,x_3,x_4), x_4=(x_1+p_1)tan(p_2x_2+q)$

minimal homotetik hiperyüzeyinin zamansı olması için gerek ve yeter koşul

$(x_1+p_1)^2p_2^2sec^2(p_2x_2+q)<1$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Aksi takdirde yüzey uzaysı olur.

İspat. Teorem 2.8 e göre hiperüzeyin birim normali uzaysı ise teğet uzay zamansı ve birim normali zamansı ise teğet uzay uzaysı olmak zorundadır. Öyleyse Lemma 4.1, Lemma 4.2, Lemma 4.3, Lemma 4.4, Lemma 4.5 ve Lemma 4.6 e göre ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

1. Van de Woestyne I., Minimal Homothetical Hypersurfaces of a Semi-Euclidean Space, Results in Mathematics, Vol:27, 333-342 (1995).
2. O'Neill B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, (1983).