Afyon Kocatepe Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ DERGİSİ

7 (1)
447-458

Afyon Kocatepe University
JOURNAL OF SCIENCE

KONVEKS SIRALI AİLE ÜZERİNDE İKİ BOYUTLU ARTAN (AZALAN) BOZULMA ORANI KAVRAMLARI

Mehmet Yılmaz*, Birol Topçu**

* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü
06100 Tandoğan, Ankara.
** Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
İstatistik Bölümü, Afyonkarahisar.

ÖZET

İki boyutlu uzayda tanımı verilen konveks sıralama ve konveks sıralı aile kavramlarına dayalı olarak, yaşam fonksiyonları için de bu sıralamanın korunduğundan bahsedilmiştir. Bazı konveks dönüşümler yardımı ile güvenirlik teorisinde önemli yer tutan iki boyutlu artan (azalan)bozulma oranı özelliğinin belirlenmesinde önemli sonuçlar elde edilmiş, konuya ilişkin açıklayıcı iki örnek verilmiştir. İki boyuta geçildiğinde, bileşenlerin stokastik anlamda birbirleri ile olan ilişkileri, ortaklıklarını ne yönde etkileyecek sorusu ile karşı karşıya gelinmektedir. Böyle bir sıralı ailenin oluşturulması ile, güvenirlik teorisinde de önemli olan bazı bağımlılık yapılarının, örneğin pozitif (negatif) bozulma oranı bağımlılığı gibi bir bağımlılık yapısının türünü ve yönünü belirlemede faydalı olabileceği düşüncesi amaçlanmıştır. Buna bağlı olarak, stokastik bir sıralama olan bozulma oranı sıralamasının da konveks sıralı aile üzerinde geçerli olduğundan bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks sıralama, iki boyutlu bozulma oranı, bozulma oranı sıralaması, bozulma oranı bağımlılığı, bağımlılık yapıları

THE CONCEPTS OF BIVARIATE INCREASING (DECREASING) HAZARD RATE ON A CONVEX ORDERED FAMILY

ABSTRACT

The concept of convex ordering for bivariate distribution functions is given and it is also mentioned that corresponding survival functions preserve this ordering. On convex ordered family, important results in order to determine concepts of bivariate increasing (decreasing) hazard rate which are known in reliability theory are obtained, two illustrative examples related on the purpose of paper are given. In the bivariate case, it can be arised some problems that stochastic relations of components which are influenced on the whole system containing those components Constructed such an ordered family, it is proposed on the present work that detecting on direction and kind of some dependence structures which are also important such as pozitive (negative) hazard rate dependence. Based on this purpose, it is discussed that there exists hazard rate ordering being kind of stochastic ordering on this convex ordered family.

Key Words: Convex ordering, bivariate hazard rate, hazard rate ordering, hazard rate dependence, dependency structures.

1. GİRİŞ

Çok boyutlu uzayda rasgele vektörlerin stokastik anlamda bağımsız olması pek karşılaşılabilir bir durum değildir, genelde bağımlıdırlar ve bu bağımlılığın hem yönü hem de derecesi önem kazanmaya başlamaktadır. Kuşkusuz Güvenirlik Teorisinde de bir sistemin bozulma oranı o sistemi oluşturan bileşenlerin bağımlılık yapıları ile ilişkilidir. Bunu Güvenirlikte şöyle anlatmak mümkündür,

$$P(Y > y | X > x) \neq P(Y > y)$$

ise X ve Y stokastik olarak bağımlıdır denilir. Daha açık bir ifade ile, iki bileşenden oluşan basit bir sistem düşünülsün. X ve Y bu iki bileşenin yaşam zamanlarını göstermek üzere, yukarıdaki ifade, birinci bileşenin x'den çok yaşadığı bilindiğinde ikincinin y'den çok yaşaması olasılığının ikinci bileşenin kendi başına y'den çok yaşaması olasılığından farklı olduğunu söylemektedir. Bu ise X ve Y nin bir birliktelik içinde olduğunu söylemektedir. Kuşkusuz bu birliktelik bir bağımlılık yapısı içindedir ve bu bağımlılığın yönü ve derecesi önemli olmaktadır. Bağımlılığın yönünü ve derecesini belirlemek amacı ile konveks bir dönüşüm tanımlanmıştır. Buna göre, dağılım fonksiyonunu stokastik anlamda karşılaştırmak, bunları $\leq(\geq)$ ilişkisine göre sıraya koymakla mümkündür. Konvekslik ise ağırlığını uç noktalara verdiğinden dolayı, iki fonksiyonu ayırt etmede kullanışlı olmaktadır.

İki boyutlu istatistiki teoride, dağılım fonksiyonlarından birisi marjinalleri çarpımı olarak verildiğinde stokastik anlamda sıralamak, pozitif ya da negatif bağımlılık yapısının ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Konveksliğin ayırt edici özelliğini kullanabilme düşüncesi ile iki boyutlu dağılım fonksiyonları için tanımlanmış konveks sıralamanın ilgili yaşam fonksiyonlarının da bu sıralamayı koruduğundan bahsedilmiştir. Yaşam dağılımlarını karakterize eden artan (azalan) bozulma oranı IHR (DHR) özelliği konveksliğe dayalı olduğundan, konveks sıralı aile üzerinde bu özelliğin belirlenmesinin faydalı olabileceği düşüncesinde önemli sonuçlar elde edilmiştir.

2. GÜVENİRLİK FONKSİYONU VE BOZULMA ORANI FONKSİYONU

Güvenirlik teorisinin önemli uygulamalarından biri, bir parçanın yaşam zamanının modellenmesi üzerinedir. Burada ilgilenilen parça çok bileşenli bir sistemi belirttiği gibi, bileşenlerin kendisini de gösterebilir. Bu yaşam zamanlarının olasılık modellemesi literatürde güvenirlik teorisi olarak bilinir. Yaşam zamanının dağılımını belirlemede güvenirlik ve bozulma oranı kavramları önemli olmaktadır.

Güvenirlik fonksiyonu: T, $P(T > 0) = 1$ olmak üzere bir nesnenin yaşam süresini göstersin. Bu durumda nesnenin t anındaki güvenirlik fonksiyonu, $S(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$ biçiminde tanımlıdır. Burada $S(t)$, nesnenin $(0,t]$ zaman aralığı içinde hata vermeme olasılığıdır. Yani nesnenin halen çalışır durumda olması olasılığıdır.

Bozulma oranı fonksiyonu: Yaşam zamanının dağılımını belirlemede diğer bir fonksiyon bozulma oranı $h(t)$ olmaktadır: Bir nesnenin t anına kadar yaşamını sürdürdüğü kabul edilsin. $h(t)$, $(t, t+\Delta t]$ kısa zaman aralığı içinde o nesnenin bozulma oranı olacaktır. t anında nesnenin halen çalışıyor olduğu bilindiğinde Δt gibi bir zaman aralığı sonunda bozulması olasılığı $P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)$ biçiminde olup, bu koşullu olasılık Δt zaman aralığına bölündüğünde ve $\Delta t \to 0$ için limit alındığında t anındaki bozulma oranı $h(t) = -\frac{d}{dt} \ln S(t)$ elde edilir. Buradan görülüyor ki $S(t)$, $h(t)$ aracılığı ile elde edilebilir, yani, bozulma oranı fonksiyonunun yaşam zamanı dağılımını karakterize ettiği söylenebilir. Bozulma oranı fonksiyonunun artan (*IHR*) ya da azalan (*DHR*) olmasına göre yaşam dağılımlarını sınıflandırmak mümkün olmaktadır. Bu ise $-\ln S(t)$'nin konveks (konkav) olmasına dayalı olarak ilgili yaşam dağılımının *IHR* (*DHR*) özelliğine sahip olmasını gerektirmektedir. Bu bağlamda konvekslik güvenirlik teorisinde önem kazanmaktadır.

İki boyutlu bozulma oranı: İki bileşenli bir sistem göz önüne alınsın. X ve Y bu bileşenlerin yaşam zamanlarını, F ortak dağılım fonksiyonunu ve

$S(x,y) = P(X > x, Y > y)$ ise ortak yaşam fonksiyonunu temsil etsin. $h_1(x,y) = h(x|Y > y) = -\frac{\partial}{\partial x}\ln S(x,y)$ ile $\{Y > y\}$ verilmişken X'in bozulma oranını, benzer olarak $h_2(x,y) = h(y|X > x) = -\frac{\partial}{\partial y}\ln S(x,y)$ ile $\{X > x\}$ verilmişken Y'nin bozulma oranını göstersin. Bu durumda, $h_1(x,y)$ x'in artan (azalan) ve $h_2(x,y)$ y'nin artan (azalan) fonksiyonu ise F iki boyutlu artan (azalan) bozulma oranı *BIHR (BDHR)* özelliğine sahiptir denir [1].

Öte yandan Basu [2] iki boyutlu bozulma oranını aşağıdaki gibi tanımlamıştır: $f(x,y)$ yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere (x,y)'deki bozulma oranı $h(x,y) = f(x,y)/S(x,y)$ dir.

Bir boyutlu uzayda Shaked ve Shanthikumar [3] bozulma oranı sıralaması tanımını, iki boyutlu bozulma oranı kavramlarına dayalı olarak Oluyede [4] pozitif (negatif) bozulma oranı bağımlılığı *HPD (HND)* tanımını vermişlerdir. Bu kavramlar ilerideki tartışmalar için yararlı olacaktır.

Bozulma oranı sıralaması: X ve Y negatif olmayan rasgele değişkenler ve h_X, h_Y ilgili bozulma oranı fonksiyonları olmak üzere $h_X(t) \geq h_Y(t)$ ise X bozulma oranına göre Y' den daha küçüktür denir ve $X \leq_{hr} Y$ ile gösterilir.

Pozitif (Negatif) bozulma oranı bağımlılığı: $h(x,y)$ ³ (£) $h_1(x,y)h_2(x,y)$ ise X ve Y pozitif (negatif) bozulma oranı bağımlılığına sahiptir denir.

3. KONVEKS SIRALAMA VE KONVEKS SIRALI AİLE KAVRAMLARI

$\Gamma_c(F_X, F_Y)$ marjinalleri F_X ve F_Y olan sürekli, artan dağılım fonksiyonları ailesini temsil etsin. (X,Y) çiftinin Γ_c'deki ortak dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ ile gösterilsin. $F \in \Gamma_c$ olmak üzere, $D = \{y: F_Y(y) > 0\}$ biçiminde tanımlanan küme ile $K = \{D \cap \Re_2\}$ üzerinde, $Y \leq y$ iken X rasgele değişkeninin Y rasgele değişkenine göre koşullu dağılımı $F(x,y)/F_Y(y) = F_{X|y}(x)$ biçiminde tanımlansın. Öte yandan, $G \in \Gamma_c$ dağılımı için de $G_{X|y}(x)$ tanımlı olacaktır. Verilmiş bir $y \in D$ için $G_{X|y}^{-1}(t) = \inf\{x : G_{X|y}(x) \geq t\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre, her bir $y \in D$ için,

$$\phi_y(t) = F_{X|y} G_{X|y}^{-1}(t) : [0,1] \to [0,1]$$

biçiminde tanımlı ϕ_y fonksiyonu, eğer her bir $y \in D$ için $(0,1)$ üzerinde konveks ise F dağılımı G dağılımına göre daha konveks sıralıdır denir ve $F \underset{\sim}{\succ} G$ ile gösterilir [5].

Yukarıdaki tanımlamaya göre $G = F_X F_Y = F_0$ olarak alındığında, $F, F_0 \in \Gamma_c$ olmak üzere, $F_{X|D} \underset{\sim}{\succ} F_X$ veya $F_X \underset{\sim}{\succ} F_{X|D}$ biçiminde sıralamayı sağlayan bütün dağılım fonksiyonlarının oluşturduğu aile $(\Gamma, \underset{\sim}{\succ}, \phi^0)$ ile gösterilsin. Bu aileye "marjinallerine göre konveks sıralı aile" denir. Aşağıdaki lemma, konveks sıralamanın $(\Gamma, \underset{\sim}{\succ}, \phi^0)$ ailesi için bir karakterizasyonunu vermektedir. Burada $S_{X|y}(x) = S(x,y)/S_Y(y)$ $y \in \overline{D} = \{y : S_Y(y) > 0\}$ biçiminde tanımlıdır.

Lemma 3.1 Her bir $y \in D \cap \overline{D}$ için $F_{X|y} \underset{\sim}{\succ} F_X \Leftrightarrow S_{X|y} \underset{\sim}{\succ} S_X$ dir.

İspat $S(x,y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x,y)$ eşitliği gözönüne alınırsa, $S_{X|y}(x) = 1 - \dfrac{F_X(x)}{S_Y(y)} + \dfrac{F_{X|y}(x) F_Y(y)}{S_Y(y)}$ biçiminde yazılabileceği açıktır. $u = S_X(x)$ alınırsa ve $\psi_y^0(u)$ $S_{X|y} S_X^{-1}(u)$'yu göstermek üzere $\psi_y^0(u) = u - [(1-u) - \phi_y^0(1-u)]\frac{F_Y(y)}{S_Y(y)}$ dir. Buradan kolaylıkla görülebilir ki ϕ_y^0 konveks ise $\frac{\partial^2}{\partial u^2}\psi_y^0(u) \geq 0$ olup ψ_y^0 konveks bir fonksiyondur.

Yukarıda verilen konveks sıralama tanımına göre, iki boyutlu uzayda Johnson-Kotz [1] tarafından verilmiş $IHR(DHR)$ kavramına yeni bir yaklaşım önerilmiştir:

Lemma 3.2 $F \in \Gamma_C$ olmak üzere, $-\ln u \underset{\sim}{\succ} S_{X|y}^{-1}(u)$ ve $-\ln v \underset{\sim}{\succ} S_{Y|x}^{-1}(v)$ $\forall\ 0 < u, v < 1$ için geçerli ise F iki boyutlu artan bozulma oranı $BIHR$ özelliğine sahiptir. Benzer olarak $S_{X|y}^{-1}(u) \underset{\sim}{\succ} -\ln u$ ve $S_{Y|x}^{-1}(v) \underset{\sim}{\succ} -\ln v$ ise F iki boyutlu azalan bozulma oranı $BDHR$ özelliğine sahiptir.

İspat $-\ln u \underset{\sim}{\succ} S_{X|y}^{-1}(u) \Rightarrow -\ln S_{X|y}(x)$, $(0,\infty)$ üzerinde konveks bir fonksiyondur. $-\frac{\partial}{\partial x}\ln S_{X|y}(x)$ x' in azalmayan bir fonksiyonu olmaktadır. Aynı düşünce ile $-\frac{\partial}{\partial y}\ln S_{Y|x}(y)$ y' nin azalmayan bir fonksiyonudur. $-\ln S(x,y) = -\ln(S_{X|y}(x)S_Y(y)) = -\ln S_{X|y}(x) - \ln S_Y(y)$ veya $-\ln S(x,y) = -\ln(S_{Y|x}(y)S_X(x)) = -\ln S_{Y|x}(y) - \ln S_X(x)$ eşitliklerini yazmak mümkündür. Uygun olarak her iki tarafın türevinin alınması durumunda $h_1(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\ln S_{X|y}(x)$ ve $h_2(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\ln S_{Y|x}(y)$ sırası ile x' in ve y' nin artan fonksiyonları olup F, $BIHR$' dir. İkinci kısmın gösterimi için, herhangi bir f fonksiyonu konvekstir ancak ve ancak f^{-1} konkav, olduğunu söylemek yeterlidir. Dolayısı ile $-\ln S_{X|y}(x)$ ve $-\ln S_{Y|x}(y)$ fonksiyonları konkav olup ilgili türevleri azalandır.

Aşağıda verilen lemmaların konveks sıralı aile üzerinde $BIHR(BDHR)$ dağılım fonksiyonları sınıfını belirlemede yararlı olacağı düşünülmektedir.

Lemma 3.3 $F \in \Gamma_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere, $F_X \underset{\sim}{\succ} F_{X|y}$ ve $F_Y \underset{\sim}{\succ} F_{Y|x}$ ise F $BDHR$ özelliğine sahiptir.

İspat $F_X \underset{\sim}{\succ} F_{X|y}$ ise, Lemma 3.1' den $\psi_y^0(u) = S_{X|y}S_X^{-1}(u)$ konkav bir fonksiyon olup, $-\ln(\psi_y^0(u))$ konveks bir fonksiyondur. $-\dfrac{\partial}{\partial u}\ln(\psi_y^0(u))$ u nun artan bir fonksiyonudur, eğer $u = S_X(x)$ alınırsa $-\dfrac{\partial}{\partial u}\ln(\psi_y^0(u)) \uparrow u$

olması $-\frac{\partial}{\partial x}S_{X|y'}(x)\downarrow x$ ifadesine denk olacaktır. Bu ise $h_1(x,y)$ nin x in azalan bir fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Benzer olarak $h_2(x,y)$ nin de y nin azalan bir fonksiyonu olduğu gösterilir ve ispat tamamlanır.
Lemmanın ispatını tamamlarken burada şu noktaya dikkat çekmek gerekir. g gibi pozitif değerli sürekli ve ikinci dereceden türevlenebilen bir fonksiyon için $-\frac{d^2}{dx^2}\ln(g(x))=\frac{-g^{(2)}g+\left(g^{(1)}\right)^2}{(g)^2}$ ifadesinin işaretinin pozitif olması $g^{(2)}$ nin işaretinin negatif olmasına bağlıdır. Eğer g konkav bir fonksiyon ise $-\frac{d^2}{dx^2}\ln(g(x))\geq 0$ sağlanır. Ancak işaretin ters yönde olması için g nin konveks bir fonksiyon olması gereklidir. Dolayısı ile *BIHR* özelliği varsa $F_{X|y}\underset{\sim}{\succ}F_X$ ve $F_{Y|x}\underset{\sim}{\succ}F_Y$ sıralamalarının geçerli olması gereklidir.

Lemma 3.4 $F\in\Gamma_c(F_X,F_Y)$ olmak üzere, $\forall y<y'$ için $S_{X|y}\underset{\sim}{\succ}S_{X|y'}$ $\left(S_{X|y'}\underset{\sim}{\succ}S_{X|y}\right)$ ve $\frac{\partial}{\partial y}\ln S(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}\ln S(x,y)$ x' de ve y' de azalan (artan) ise F *BIHR(BDHR)* özelliğine sahiptir.

İspat $S_{X|y}S^{-1}_{X|y'}(u)$ konveks bir fonksiyon olduğundan, $\forall 0<u_1<u_2<1$ için

$$\frac{S_{X|y}S^{-1}_{X|y'}(u_1)}{u_1}\leq\frac{S_{X|y}S^{-1}_{X|y'}(u_2)}{u_2} \tag{1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Uygun olarak, $x<x'$ için $S_{X|y'}(x')=u_1$ ve $S_{X|y'}(x)=u_2$, alınıp (1) ifadesinde yerine konulursa,

$$\frac{S_{X|y}(x')}{S_{X|y'}(x')}\leq\frac{S_{X|y}(x)}{S_{X|y'}(x)} \tag{2}$$

biçiminde yazılabilir. (2) ifadesinin her iki tarafının logaritması alınırsa,

$$\ln S_{X|y}(x')-\ln S_{X|y'}(x')\leq\ln S_{X|y}(x)-\ln S_{X|y'}(x) \tag{3}$$

ifadesi elde edilir. Eğer (3) ifadesini açacak olursak,

$$0 \leq \ln S(x',y') + \ln S(x,y) - \ln S(x,y') - \ln S(x',y) \qquad (4)$$

biçimine dönüşür. Bu son ifade, türev tanımı gereğince, $\dfrac{\partial^2 \ln S(x,y)}{\partial x \partial y} \geq 0$ olmasına denktir. Diğer taraftan $\dfrac{\partial}{\partial y}\ln S(x,y) + \dfrac{\partial}{\partial x}\ln S(x,y)$ x' in azalan bir fonksiyonu ise,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\ln S(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}\ln S(x,y)\right] = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln S(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln S(x,y) \leq 0 \qquad (5)$$

olduğu açıktır. (5) ifadesi ile (4) ün sonucu birleştirilirse $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\ln S(x,y) \leq 0$ olacağı açıktır. Bu ise $-\dfrac{\partial}{\partial x}\log S(x,y)$ nin x' de artan olması anlamındadır∴.

Bundan sonra verilen iki lemma, ikinci bölümde verilen bozulma oranı sıralaması ve bozulma oranına ilişkin bağımlılık kavramı ile ilişkilidir.

Lemma 3.5 $F \in \Gamma_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere, $F_X \underset{\sim}{\succ} F_{X|y}$ ise $[X|Y > y] \geq_{hr} X$ dir. Bunun yanı sıra $F_{X|y} \underset{\sim}{\succ} F_X$ ise $X \geq_{hr} [X|Y > y]$ dir.

İspat $F_X \underset{\sim}{\succ} F_{X|y}$ ise, Lemma 3.1' den $\psi_y^0(u) = S_{X|y}S_X^{-1}(u)$ konkav bir fonksiyon olup,

$$\frac{\psi_y^0(t) - \psi_y^0(u)}{t-u} \geq \frac{\psi_y^0(v) - \psi_y^0(t)}{v-t} \qquad (6)$$

eşitsizliği $\forall u < t < v$ için sağlanır. $u = 0$ ve $v = t + \varepsilon$ alınıp $\varepsilon \to 0$ iken (6) ifadesi $\frac{\partial}{\partial t}\ln \psi_y^0(t)t \leq 1$ olacaktır. Eğer $t = S_X(x)$ alınırsa,

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\ln\psi_y^0(t)t = \frac{\tfrac{\partial}{\partial x}\ln\psi_y^0(S(x))}{\tfrac{d}{dx}\ln S(x)}S(x) = \frac{\tfrac{-\partial}{\partial x}\ln S_{X|y}(x)}{f(x)}S(x) = \frac{h_1(x,y)}{h_X(x)}$$ olur.

Buna göre, son eşitsizlik $h_1(x,y)/h_X(x) \leq 1$ olduğunu gösterir. Bozulma oranı sıralamasına göre $[X|Y > y] \geq_{hr} X$ dir. İspatın ikinci kısmında ise $\psi_y^0(u)$ konveks olup (6) ifadesi tersine eşitsizliği sağlar. Buradan sonuca ulaşılır.

Lemma 3.6 $y < y' \in \overline{D}$ olmak üzere, $S_{X|y} \succsim S_{X|y'}$ ise X ve Y pozitif bozulma oranı bağımlılığına sahiptir *(HPD)*. Benzer olarak, $S_{X|y'} \succsim S_{X|y}$ ise X ve Y negatif bozulma oranı bağımlılığına sahiptir (*HND*).

İspat $S_{X|y} \succsim S_{X|y'}$ geçerli ise (4) eşitsizliğinin sonucu olarak $\tfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln S(x,y) \geq 0$ olmasını gerektirir. Bu ise türev tanımı gereği,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln S(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}S(x,y)}{S(x,y)}\right) = \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}S(x,y)\right)S(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}S(x,y)\frac{\partial}{\partial x}S(x,y)}{S(x,y)^2} \geq 0 \quad (7)$$

yazılabilir. Buradan, $\frac{\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}S(x,y)}{S(x,y)} \geq \left(\frac{-\frac{\partial}{\partial y}S(x,y)}{S(x,y)}\right)\left(\frac{-\frac{\partial}{\partial x}S(x,y)}{S(x,y)}\right)$ olur ki *HPD* tanımı kolayca çıkar. Benzer yolla $S_{X|y'} \succsim S_{X|y}$ ise $\tfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln S(x,y) \leq 0$ olduğundan (7) eşitsizliği tersine geçerli olup X ve Y nin *HND* olduğu gösterilir.

4. UYGULAMALAR

Örnek 1 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)[1 + \alpha(1 - F_X(x))(1 - F_Y(y))]$, $\alpha \in [-1,1]$ Farlie-Gumbel-Morgenstern dağılım fonksiyonları ailesi göz önüne alınsın. Bu durumda (X,Y) çiftinin yaşam fonksiyonu $S(x,y) = S_X(x)S_Y(y)[1 + \alpha F_X(x)F_Y(y)]$ dir. Hemen görüleceği üzere $\psi_y^0(u) = u[1 + \alpha(1-u)F_Y(y))]$ olup $\alpha > 0$ için konkav $\alpha < 0$ için konveks olacaktır (Benzer olarak $\psi_x^0(v)$ için de geçerlidir). Lemma 3.5 den görüleceği üzere, eğer ψ_y^0 ve ψ_x^0 konkav (konveks) ise $h_1(x,y)/h_X(x) \leq (\geq)1$ ve $h_2(x,y)/h_Y(y) \leq (\geq)1$ olacaktır. Çizelge 4.1 den görüleceği gibi konkav kısımda yukarıdaki oran artarak, konveks kısımda ise azalarak 1' e yaklaşmaktadır. Bu durumda, F_X ve F_Y $IHR(DHR)$ ise konkav (konveks) kısımda F $BIHR$ $(BDHR)$ dir.

Örnek 2 $F(x,y) = \frac{(x^2y^2)}{x^2+y^2-x^2y^2}$, $0 \leq x,y \leq 1$ marjinalleri $F_X(x) = x^2$ ve $F_Y(y) = y^2$ olan dağılım fonksiyonu göz önüne alınsın. Hemen görüleceği gibi F_X ve F_Y IHR dir $S(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)(1-x^2)(1-y^2)}{x^2+y^2-x^2y^2}$ olmak üzere

$f_y^0(t) = \dfrac{u}{u+y^2-uy^2}$ konkav bir fonksiyon olup, Lemma 3.1 den

$\psi_y^0(u) = \dfrac{(1-u+y^2)u}{(1-u)(1-y^2)+y^2}$ fonksiyonu da konkavdır (ψ_x^0 için de geçerlidir). Bu durumda F BIHR dir. $(\frac{\partial}{\partial u}\ln \psi_y^0(u))u =$

$1 - \dfrac{uy^2}{(1-u)^2+(1-u)(1+u)y^2+uy^4}$ ifadesinin azalan olması

$\dfrac{uy^2}{(1-u)^2+(1-u)(1+u)y^2+uy^4}$ artan olmasına denktir. $u < u'$ olmak üzere

$$\frac{uy^2}{(1-u)^2+(1-u)(1+u)y^2+uy^4} \leq \frac{u'y^2}{(1-u')^2+(1-u')(1+u')y^2+u'y^4}$$

eşitsizliğini diğer bir formda aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$u(1-u')^2 + u(1-(u')^2)y^2 + uu'y^4 \leq u'(1-u)^2 + u'(1-(u)^2)y^2 + u'uy^4$

bu eşitsizlikte gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra $0 \leq 2(u'-u)$ eşitsizliğine ulaşılır ki artanlık koşulu sağlanmış olur. Lemma 3.5' den görüleceği gibi, $(\frac{\partial}{\partial u}\ln \psi_y^0(u))u$ ifadesinin azalan olması $h_1(x,y)/h_X(x)$ ifadesinin artan olmasına denktir ($(\frac{\partial}{\partial v}\ln \psi_x^0(v))v$ için de geçerlidir).

Çizelge 4.1. Örnek 1'e ilişkin tablo

	$\alpha = 0.25$				$\alpha = 0.5$				$\alpha = 0.75$			
x	y=0.1	y=0.4	y=0.7	y=0.9	y=0.1	y=0.4	y=0.7	y=0.9	y=0.1	y=0.4	y=0.7	y=0.9
.1	0,977556	0,910891	0,845209	0,801956	0,955224	0,823529	0,695652	0,61244	0,933002	0,737864	0,551069	0,430913
.2	0,9801	0,921569	0,864734	0,827751	0,960396	0,846154	0,738318	0,669725	0,940887	0,773585	0,61991	0,524229
.3	0,98263	0,932039	0,88361	0,852459	0,965517	0,867925	0,778281	0,722467	0,948655	0,807339	0,682505	0,607069
.4	0,985149	0,942308	0,901869	0,876147	0,970588	0,888889	0,815789	0,771186	0,956311	0,839286	0,739669	0,681102
.5	0,987654	0,952381	0,91954	0,898876	0,97561	0,909091	0,851064	0,816327	0,963855	0,869565	0,792079	0,747664
.6	0,990148	0,962264	0,936652	0,920705	0,980583	0,928571	0,884298	0,858268	0,971292	0,898305	0,840304	0,807829
.7	0,992629	0,971963	0,953229	0,941685	0,985507	0,947368	0,915663	0,897338	0,978622	0,92562	0,884826	0,862479
.8	0,995098	0,981481	0,969298	0,961864	0,990385	0,965517	0,945313	0,933824	0,985849	0,951613	0,926056	0,912338
.9	0,997555	0,990826	0,984881	0,981289	0,995215	0,983051	0,973384	0,967972	0,992974	0,976378	0,964346	0,958009
	$\alpha = -0.25$				$\alpha = -0.5$				$\alpha = -0.75$			
x	y=0.1	y=0.4	y=0.7	y=0.9	y=0.1	y=0.4	y=0.7	y=0.9	y=0.1	y=0.4	y=0.7	y=0.9
.1	1,022556	1,090909	1,160305	1,207161	1,045226	1,183673	1,326425	1,424084	1,06801	1,278351	1,498681	1,651475
.2	1,020101	1,081633	1,145078	1,188482	1,040404	1,166667	1,301075	1,395604	1,060914	1,255319	1,469274	1,624277
.3	1,017632	1,072165	1,129288	1,168901	1,035533	1,148936	1,273743	1,364162	1,053708	1,230769	1,436202	1,592476
.4	1,015152	1,0625	1,112903	1,148352	1,030612	1,130435	1,244186	1,329268	1,046392	1,204545	1,398734	1,554795
.5	1,012658	1,052632	1,09589	1,126761	1,025641	1,111111	1,212121	1,290323	1,038961	1,176471	1,355932	1,509434
.6	1,010152	1,042553	1,078212	1,104046	1,020619	1,090909	1,177215	1,246575	1,031414	1,146341	1,306569	1,453782
.7	1,007634	1,032258	1,059829	1,080119	1,015544	1,069767	1,139073	1,19708	1,023747	1,113924	1,249012	1,383886
.8	1,005102	1,021739	1,040698	1,054878	1,010417	1,047619	1,097222	1,140625	1,015957	1,078947	1,181034	1,293478
.9	1,002558	1,010989	1,020772	1,028213	1,005236	1,02439	1,051095	1,07563	1,008043	1,041096	1,099526	1,171975

KAYNAKLAR

1. Johnson, N.L., Kotz, S., *A vector multivariate hazard rate*, Journal of Multivariate Analysis. 5, 53-66, (1975).
2. Basu, A.P., *Bivariate Failure Rate,* Journal of American Statistical Association. 66, No. 333. 103-104, (1971).
3. Shaked, M., Shanthikumar, J.G., Stochastic Orders and Their Applications, Academic Press, San Diego (CA), (1994).
4. Oluyede, B.O., *On stochastic inequalities and dependence orderings,* Applied Mathematics and Computation, 146, 601–610, (2003).
5. Yılmaz, M., Tuncer Y., *Convex Ordering for Bivariate Distributions*, Communications in Statistics-Theory and Methods, 36, 465-472, (2007).