NWSA-Physical Sciences
ISSN: 1306-3111/1308-7304
NWSA ID: 204.9.1.3A0065
Status : Original Study
Received: July 2013
Accepted: January 2014
E-Journal of New World Sciences Academy

Adem Çelik
Dokuz Eylül University, adem.celik@deu.edu.tr, Izmir-Turkey

http://dx.doi.org/10.12739/NWSA.2014.9.1.3A0065

BİR FUL HİPERBOLİK BÖLGEDE EŞİTSİZLİKLER

ÖZET

$D \subset C$ sadece hiperbollerle sınırlı bir bölge (bir ful hiperbolik bölge) olsun. Bu bölgede, $f(0)=0$, $f(a)=a^q$, $f(-a)=-a^q$ olan $4m$ dereceli kompleks değerli ünivalant polinom fonksiyonların $UT_{2,2}^4 P(a)$ sınıfı için maksimum modül eşitsizlikleri elde edilmiştir. Bu eşitsizliklerde katsayılar: İlki $|a|$'ya bağlı olarak; bir diğeri polinomların sıfırlarına bağlı olarak ve üçüncüsü $|a|$'ya ve polinomların sıfırlarına bağlı olarak, üç farklı şekilde bulunmuştur. Sonra bu ful hiperbolik bölgenin bir özel durumu (Bir birim ful hiperbolik bölge) için eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematik Analiz, Öngörülen Üç Değeri Alan Ünivalant Fonksiyon, Hiperbolik Bölge, Maksimum Modül Değerler, Eşitsizlikler.

INEQUALITIES IN A FULL HYPERBOLICAL REGION

ABSTRACT

Let $D \subset C$ be a region bounded only by hyperbolas (a full hyperbolical region). In this region, we obtain maximum modulus inequalities for the class $UT_{2,2}^4 P(a)$ of univalent polynomials functions with complex values of degree $4m$, in which $f(0)=0$, $f(a)=a^q$, $f(-a)=-a^q$. The coefficients in these inequalities are obtained by three distinct ways: The firs is depending on $|a|$; the other one is depending on the zeros of polynomials, and the third is depending on $|a|$ and on the zeros of polynomials. Then we obtain inequalities for the special case where our region is a unit full hyperbolical region.

Keywords: Mathematical Analysis, Univalent Functions with Three Preassigned Values, Hyperbolical Region, Maximum Modulus Values, Inequalities.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

$D \subset C$ bölgesinde f kompleks değerli ve kompleks değişkenli bir polinom fonksiyon olsun. $M_f = \max_{z\in\partial D}|f(z)|$ tanımlayalım. $M_{f_1\cdot f_2\cdots f_n}$ ile $M_{f_1}.M_{f_2}...M_{f_n}$ $(n \geq 2)$ arasında eşitsizlikler D bölgesi birim daire olduğunda [7, 14, 15 ve 17]'de, D bölgesi $R \geq 1$ dairesi olduğunda [6]'da araştırılmıştır. Problem iki hiperbolik bölgede [4]'de ele alınmıştır ve

$B_1 = \{ z : \mathrm{Re}(z^2) \geq a^2, -b \leq \mathrm{Re}(z) \leq b, b > a \}$, ve

$B_2 = \{ z : \mathrm{Re}(z^2) \leq a^2, \mathrm{Im}(-iz^2) \leq b^2, -c \leq \mathrm{Im}\, z \leq c, c \geq b \}$, iki hiperbolik bölge olmak üzere aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır:

Theorem A. Let $M_f = \max_{z\in\partial B_i}|f(z)|$, $M_g = \max_{z\in\partial B_i}|g(z)|$ and $M_{f.g} = \max_{z\in\partial B_i}|f(z).g(z)|$ be the maximum modulus values of the polynomial functions $f(z) = \prod_{i=1}^{m}(z-\alpha_i)$, $(\alpha_i \neq 0)$, $g(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-\beta_j)$ $(\beta_j \neq 0)$, where $\min(|\alpha_i|, |\beta_j|) = r$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ on the hyperbolic regions B_i $(i = 1,2)$.

(i) Let $a \neq r$ be on the hyperbolic region B_1. Then:

$$M_{f.g} \geq \delta.M_f.M_g \text{ with } \delta = \left(\frac{|a-r|}{\sqrt{2b^2-a^2}}\right)^{m+n}.\frac{1}{2^m}.\frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

(ii) Let $\min(a,b) \neq r$ be on the hyperbolic region B_2. Then:

$$M_{f.g} \geq \theta.M_f.M_g \text{ with } \theta = \left(\frac{|\min(a,b)-r|}{\sqrt{2c^2+a^2}}\right)^{m+n}.\frac{1}{2^m}.\frac{1}{2^n}. \tag{2}$$

Theorem B. Let $f(z) = z^k\prod_{i=1}^{m}(z-\alpha_i)$, $(\alpha_i \neq 0, k \leq m)$, $g(z) = z^p\prod_{j=1}^{n}(z-\beta_j)$ $(\beta_j \neq 0, p \leq n)$ be polynomials on the hyperbolic regions B_i $(i = 1,2)$, satisfiying $\min(|\alpha_i|, |\beta_j|) = r$ $(1 \leq i \leq m-k,\ 1 \leq j \leq n-p)$.

(i) Let $a \neq r$ be on the hyperbolic region B_1. Then:

$$M_{f.g} \geq \varepsilon_2.M_f.M_g \text{ where } \varepsilon_2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2a^2-b^2}}\right)^{k+p}.\left(\frac{|a-r|}{\sqrt{2b^2-a^2}}\right)^{m+n-k-p}.\frac{1}{2^{m-k}}.\frac{1}{2^{n-p}} \tag{3}$$

(ii) Let $\min(a,b) \neq r$ be on the hyperbolic region B_2. Then:

$$M_{f.g} \geq \varepsilon_3.M_f.M_g \text{ where } \varepsilon_3 = \left(\frac{\min(a,b)}{\sqrt{2c^2+a^2}}\right)^{k+p}.\left(\frac{|\min(a,b)-r|}{\sqrt{2c^2+a^2}}\right)^{m+n}.\frac{1}{2^{4m}}.\frac{1}{2^{4n}} \tag{4}$$

Bu teoremler n tane polinom fonksiyon için de genelleştirilmiştir. Ayrıca bazı özel durumlar için de formüller elde edilmiştir. [5]'de $\rho \in C$, $B = \{z \in C : |z| < r, 0 < r < \infty\}$ ve $n = 1,2,...,N$ (N sonlu) olmak üzere, 0, $-a$, a reel noktalarını sabit bırakan $F_n : D \to C$,

$F_n(z)=z+\rho(a^{2n}z^{2n}-z^{4n})$, $0<a<r$ ünivalant fonksiyonların sınıfını $\{F_n(a:r)\}$ ile ve $S_n:D\to C$, $S_n(z)=z+\rho\sum_{k=1}^{n}(a^{2k}z^{2k}-z^{4k})$, $0<a<r$ ünivalant fonksiyonların sınıfı da $\{S_n(a:r)\}$ ile belirtilmiştir. D açık diskinin otomorfizmaları araştırılmıştır. [3]'de $0,a,-a\in\overline{D}$ ve $q\in N$ olmak üzere $f(0)=0$, $f(a)=a^q$, $f(-a)=-a^q$ olan ünivalant polinom fonksiyonların kümesi $UTP(a)$ ile tanımlanmıştır. $UTP(a)$ içinde derecesi $4m$ ve $q\in\{\ 1,3,5,...,4m-1\ \}$ olmak üzere, $f(z)=z^q+\sum_{k=1}^{m}\rho_k(z^{4k}-a^{2k}z^{2k})$ $(\rho_k\in C,\rho_m=1)$ formundaki tüm polinom fonksiyonların sınıfı da $UT_{2,2}^4P(a)$ ile belirtilmiştir. Bu sınıf için hem birim hem de herhangi bir $R<\ \infty$ yarıçaplı bir diskte $M_{f_1.f_2....f_n}$ ile $M_{f_1}.M_{f_2}...M_{f_n}$ $(n\geq 2)$ arasında eşitsizlikler araştırılmıştır. Benzer sınıflar $UT_{3,1}^4P(a)$, $UT_{1,3}^4P(a)$, $UT_{4,0}^4P(a)$ ile tanımlanmıştır.

TANIM 1: Bir $A\subset C$ bölgesinin sınırı tamamen hiperbol eğrilerinden oluşuyorsa A bölgesi bir "ful hiperbolik bölgedir" denir.

TANIM 2: Bir ful hiperbolik bölgenin tüm hiperbol eğrilerinin tepe noktaları birim çembere teğet oluyorsa, bu hiperbolik bölgeye "bir birim ful hiperbolik bölgedir" diyelim.

Şimdi a_0,b_0,c_0,d_0 pozitif reel sayılar olsun. $\operatorname{Re}(z^2)=a_0^2$, $\operatorname{Im}(-iz^2)=b_0^2$, $\operatorname{Im}(z^2)=2c_0^2$, $\operatorname{Im}(-z^2)=2d_0^2$ $(i^2=-1)$ hiperbol eğrilerini göz önüne alalım. Bu hiperbol eğrileri ile sınırlı bölgeyi D ile gösterelim. D bölgesi bir ful hiperbolik bölgedir.

$ÇapD=2d$ alalım. D bölgesinin hiperbol eğrilerinin birbirini kestiği noktaları E_j $(1\leq j\leq 8)$ ile gösterelim. E_j, 4 kesim noktasından geçen ve D bölgesini kapsayan dairenin çap uzunluğu da $2d$ dir. Açık şekilde $Maks\ (|z-w|:z,w\in\overline{D})\leq 2d$ dir. Burada, ∂D simgesi D'nin sınırını belirtmek üzere $\overline{D}=\ \partial D\cup D$ dir.

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (REASERCH SIGNIFICANCE)

f,g kompleks değerli ve kompleks değişkenli iki polinom fonksiyonunu göz önüne alalım. z kompleks değişken olsun. Birim diskte $M_f=\max_{|z|=1}|f(z)|$, $M_g=\max_{|z|=1}|g(z)|$ ve $M_{f.g}=\max_{|z|=1}|f(z).g(z)|$, herhangi bir $R<\ \infty$ yarıçaplı bir disk için ise $M'_f=\max_{|z|=R}|f(z)|$, $M'_g=\max_{|z|=R}|g(z)|$ ve $M'_{f.g}=\max_{|z|=R}|f(z).g(z)|$ tanımlayalım. $M_{f.g}$ ile $M_f\ .M_g$ arasında [3, 7, 12, 14, 15 ve 17]'da ve herhangi f,g polinomları için [6]'da eşitsizlikler, $f,g\in UT_{2,2}^4P(a)$ polinomları için $M'_{f.g}$ ile $M'_f\ .M'_g$ arasında yeni eşitsizlikler [3]'de bulunmuştur. İlk defa ilgili problem hiperbolik bölgelerde [4]'de ele alınmış ve benzer yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu çalışmada ilgili problem bir ful hiperbolik bölgede (tamamen hiperbollerle sınırlı bir bölgede) ele alınarak $UT_{2,2}^{4}P(a)$ sınıfı için eşitsizlikler bulunmuştur. Ayrıca bir birim ful hiperbolik bölge tanımlanarak bu bölge için de eşitsizlikler elde edilmiştir.

3. ANALİTİK ÇALIŞMA (ANALYTICAL STUDY)

Teorik metotlarla elde edilen bağıntı veya denklemlere "analitik bağıntılar" denir. Pür çalışmalarda ispat teknikleri aracılığıyla teorik metotlar kullanılarak bağıntılar (formüller) veya denklemler elde edilir. Bir analitik bağıntıyı bulmak için uygulanan bu teorik metotlar genellikle Teoerem-Hipetez-Hüküm ve ispat çerçevesinde şekillenir [3].

Çalışmamız pür matematik tabanlı bir analitik çalışmadır ve ispatlarda [3 ve 4] deki ispat yöntemlerinden kısmen yararlanılmıştır.

4. D'DE $UT_{2,2}^{4}P(a)$ İÇİN MAKSİMUM MODÜL EŞİTSİZLİKLERİ (MAXIMUM MODULUS INEQUALITIES FOR $UT_{2,2}^{4}P(a)$ ON D)

Bu kesimde ful hiperbolik D bölgesinde $UT_{2,2}^{4}P(a)$ sınıfı için eşitsizlikler vereceğiz. Önce aşağıdaki Lemma'yı ispatlayalım.

Lemma 1. Ful hiperbolik bölge D olsun. O zaman her $z \in \partial D$ için $|z| \geq \min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)$ dir.

İspat. $K_1 = \{z \in C : \mathrm{Im}(z^2) = 2c_0^2\}$ kümesini, $K_2 = \{z \in C : \mathrm{Im}(-z^2) = 2d_0^2\}$, $K_3 = \{z \in C : \mathrm{Im}(-iz^2) = b_0^2\}$ kümesini ve $K_4 = \{z \in C : \mathrm{Re}(z^2) = a_0^2\}$ kümesini ele alalım. Önce her $z \in K_1$ için $|z| \geq \sqrt{2}.c_0$ olduğunu gösterelim. Bunun için $z = |z|.e^{i\theta} \in K_1$ alalım. Bu durumda ya $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ya da $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ dir. Eğer $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ise $0 < 2\theta < \pi$; eğer $0 < \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ise $\pi < 2\theta < 2\pi$ olur. Öte yandan her $z \in K_1$ için $|z|^2.\sin 2\theta = 2c_0^2$ dir. Buradan, $|z|^2 \geq 2c_0^2$ ya da $|z| \geq \sqrt{2}.c_0$ bulunur. Benzer kümeler için aynı ispatı yaparak, her $z \in K_2$ için $|z| \geq \sqrt{2}.d_0$, her $z \in K_3$ için $|z| \geq b_0$ ve her $z \in K_4$ için $|z| \geq a_0$ bulunur. Ful hiperbolik bölge D göz önüne alınırsa, her $z \in \partial D$ için $|z| \geq \min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)$ olduğu görülür.

4.1. $|a|$'ya Bağlı Eşitsizlikler (Inequalities Depending On $|a|$)

Bu alt kesimde D bölgesinde $UT_{2,2}^{4}P(a)$ sınıfı için $|a|$'ya bağlı eşitsizlikler elde edeceğiz.

Teorem 1. D Bölgesinde $4m$ ve $4n$ sırasıyla $f, g \in UT_{2,2}^{4}P(a)$ polinom fonksiyonlarının dereceleri ve $f(\mp a) = \mp a^p$, $g(\mp a) = \mp a^q$ ve $\forall\ \rho_1 \neq 0$ olsun. Bu halde,

(i) $\min(p, q) \geq 3$ ise,

$$M_{f.g} \geq \theta_1.M_f.M_g \quad (5)$$

burada $\theta_1 = \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^4.\dfrac{|a|^{p+q-4}}{d^{4m+4n}}.\dfrac{1}{2^{4m-2}}.\dfrac{1}{2^{4n-2}}$.

(ii) $p = q = 1$ (ya da $0,-a,a$ noktaları polinomların sabit noktaları) ise,

$$M_{f.g} \geq \theta_2.M_f.M_g \quad (6)$$

burada $\theta_2 = \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^2.\dfrac{1}{d^{4m+4n}}.\dfrac{1}{2^{4m-1}}.\dfrac{1}{2^{4n-1}}$.

(iii) $\min(p,q) = 1$ ise,

$$M_{f.g} \geq \theta_3.M_f.M_g \quad (7)$$

burada $\theta_3 = \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^2.\dfrac{|a|^{p+q-2}}{d^{4m+4n}}.\dfrac{1}{2^{4m-1}}.\dfrac{1}{2^{4n-1}}$.

İspat. (i) h_1, h_2 fonksiyonları sırasıyla

$h_1(z) = z^{p-2} + \rho_1(z^2 - a^2) + \rho_2(z^6 - a^4.z^2) + \ldots + (z^{4m-2} - a^{2m}.z^{2m-2})$,

$h_2(z) = z^{q-2} + \rho_1'(z^2 - a^2) + \rho_2'(z^6 - a^4.z^2) + \ldots + (z^{4n-2} - a^{2n}.z^{2n-2})$

formunda iki polinom olsun. $f, g \in UT_{2,2}^4 P(a)$ fonksiyonları sırasıyla, $f(z) = z^2.h_1(z)$ ve $g(z) = z^2.h_2(z)$ formunda yazılabilir. O zaman $|f(z)| = |z|^2.|h_1(z)|$ ve $|g(z)| = |z|^2.|h_2(z)|$ olduğudan, her $z \in \overline{D}$ için $|f(z)| \leq d^2.(2d)^{4m-2}$ ve $|g(z)| \leq d^2.(2d)^{4n-2}$ ve buradan da,

$M_f = \max_{z \in \partial D} |f(z)| \leq d^2.(2d)^{4m-2}$ ve $M_g = \max_{z \in \partial D} |g(z)| \leq d^2.(2d)^{4n-2}$ olur.

O zaman,

$$M_f.M_g = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.\max_{z \in \partial D} |g(z)| \leq d^4.(2d)^{4m-2+4n-2} = 2^{4m-2}.2^{4n-2}.d^{4m+4n} \quad (8)$$

bulunur. Öte yandan, Lemma 1 gereğince her $z \in \partial D$ için sırasıyla,

$|f(z)| \geq (\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0))^2.|h_1(z)|$,

$|g(z)| \geq (\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0), \sqrt{2}.d_0))^2.|h_2(z)|$, olduğundan

$|f(z).g(z)| \geq (\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0))^4.|h_1(z).h_2(z)|$ ve buradan

$\max_{z \in \partial D} |f(z).g(z)| \geq \max_{z \in \partial D}((\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0))^4.|h_1(z).h_2(z)|)$ yazarız. Şimdi,

$|H_1(z)| = \min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)^4.|h_1(z).h_2(z)|$ alalım.

$|H_1(a)| = (\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0))^4.|a|^{p-2}.|a|^{q-2}$ olduğu için, maximum modul prensibi gereğince, $\max_{z \in \partial D} |H_1(z)| > (\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0))^4.|a|^{p-2}.|a|^{q-2}$ elde edilir. Buradan da,

$$M_{f.g} = \max_{z \in \partial D} |f(z).g(z)| \geq (\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0))^4.|a|^{p-2}.|a|^{q-2} \quad (9)$$

bulunur. (8) ve (9) den (7) elde edilir. **(ii)** $f, g \in UT_{2,2}^4 P(a)$ fonksiyonları sırasıyla, h_3, h_4 polinom fonksiyonları $4m-1$, $4n-1$ dereceli olmak üzere $f(z) = z.h_3(z)$, $g(z) = z.h_4(z)$ formunda yazılabilir ve $h_3(a).h_4(a)=1$ dir. **(iii)** $f,g\in UT_{2,2}^4P(a)$ fonksiyonları sırasıyla, h_5,h_6 polinom fonksiyonları $4m-1$, $4n-1$ dereceli olmak üzere $f(z)=z.h_5(z)$, $g(z)=z.h_6(z)$ formunda yazılabilir ve $h_5(a).h_6(a)=a^{q-1}.a^{p-1}$ dir. Bu iki hal için **(i)** deki ispat yolu izlenir.

Teorem 2.(Genelleştirilmiş Teorem 1) $n\geq 2$ olsun. D Bölgesinde $4m_1$, $4m_2$, …, $4m_n$ sırasıyla $f_1,f_2,...,f_n\in UT_{2,2}^4P(a)$ polinom fonksiyonlarının dereceleri olmak üzere, $f_i(\mp a)=\mp a^{q_i}$ ve $\forall\rho_1\neq 0\ (i=1,2,..,n)$ olsun. O zaman,

(i) $\min(q_1,q_2,...,q_n)\geq 3$ ise,

$$\theta_1'=\left[\min(a_0,b_0,\sqrt{2}.c_0,\sqrt{2}.d_0)\right]^{2n}.\frac{|a|^{q_1+q_2+...+q_n-2n}}{d^{4m_1+4m_2+....+4m_n}}.\frac{1}{2^{4m_1-2}}.\frac{1}{2^{4m_m-2}}\cdots\frac{1}{2^{4m_n-2}}$$

olmak üzere

$$M_{f_1\cdot f_2\cdots f_n}\geq\theta_1'.M_{f_1}.M_{f_2}...M_{f_n}\text{ dir.}\tag{10}$$

(ii) $q_1=q_2=...=q_n=1$ (ya da $0,-a,a$ noktaları polinomların sabit noktaları) ise,

$$\theta_2'=\left[\min(a_0,b_0,\sqrt{2}.c_0,\sqrt{2}.d_0)\right]^{n}.\frac{1}{d^{4m_1+4m_2+....+4m_n}}.\frac{1}{2^{4m_1-1}}.\frac{1}{2^{4m_m-1}}\cdots\frac{1}{2^{4m_n-1}}$$

olmak üzere

$$M_{f_1\cdot f_2\cdots f_n}\geq\theta_2'.M_{f_1}.M_{f_2}...M_{f_n}\text{ dir.}\tag{11}$$

(iii) $\min(q_1,q_2,...,q_n)=1$ ise,

$$\theta_3'=\left[\min(a_0,b_0,\sqrt{2}.c_0,\sqrt{2}.d_0)\right]^{n}.\frac{|a|^{q_1+q_2+...+q_n-n}}{d^{4m_1+4m_2+...+.4m_n}}.\frac{1}{2^{4m_1-1}}.\frac{1}{2^{4m_m-1}}\cdots\frac{1}{2^{4m_n-1}}$$

olmak üzere

$$M_{f_1\cdot f_2\cdots f_n}\geq\theta_3'.M_{f_1}.M_{f_2}...M_{f_n}\text{ dir.}\tag{12}$$

Sonuç Teorem 1. $n\geq 2$ olsun. D Bölgesinde $4m_1$, $4m_2$, … , $4m_n$ sırasıyla $f_1,f_2,...,f_n\in UT_{2,2}^4P(a)$ polinom fonksiyonlarının dereceleri olmak üzere, $f_i(\mp a)=\mp a^{q_i}$ ve $\forall\rho_1\neq 0\ (i=1,2,..,n)$ olsun. $j\leq n$ tane $f_1,f_2,...,f_j$ için $\min(q_1,q_2,...,q_j)\geq 3$, geriye kalan $n-j$ tane $f_{j+1},f_{j+2},...,$ f_n için $\min(q_{j+1},q_{j+2},...,q_n)=1$ ise,

$$\theta_4=\left[\min(a_0,b_0,\sqrt{2}.c_0,\sqrt{2}.d_0)\right]^{2j+(n-j)}.\frac{|a|^{q_1+q_2+...+q_n-(2j+(n-j))}}{d^{4m_1+4m_2+....+4m_n}}$$

$$.\frac{1}{2^{4m_1-2}}.\frac{1}{2^{4m_m-2}}\cdots\frac{1}{2^{4m_j-2}}.\frac{1}{2^{4m_{j+1}-1}}.\frac{1}{2^{m_{j+2}-1}}\cdots\frac{1}{2^{4m_n-1}}$$

olmak üzere

$$M_{f_1\cdot f_2\cdots f_n}\geq\theta_4.M_{f_1}.M_{f_2}...M_{f_n}\quad\text{dir.}\tag{13}$$

4.2. Polinomların Sıfırlarına Bağlı Eşitsizlikler (Inequalities Depending on the Zeros of Polynomials)

Bu alt kesimde D bölgesinde $UT^4_{2,2}P(a)$ sınıfı için polinomların köklerine bağlı eşitsizlikler elde edeceğiz.

Teorem 3. D Bölgesinde $4m$ ve $4n$ sırasıyla $f, g \in UT^4_{2,2}P(a)$ polinom fonksiyonlarının dereceleri ve $f(\mp a) = \mp a^p$, $g(\mp a) = \mp a^q$, $\forall\ \rho_1 \neq 0$; $\alpha_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq 4m-2)$ f'nin sıfırları, $\beta_i \neq 0$ $(1 \leq j \leq 4n-2)$ g'nin sıfırları olsun. Bu halde,

$$\theta_5 = \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^4 . \frac{\prod_{i=1}^{4m-2}|\alpha_i| . \prod_{j=1}^{4n-2}|\beta_j|}{d^{4m+4n}} . \frac{1}{2^{4m-2}} . \frac{1}{2^{4n-2}}$$ olmak üzere,

$$M_{f.g} \geq \theta_5 . M_f . M_g \text{ dir.} \tag{14}$$

İspat. Hipotezden, f ve g polinom fonksiyonları sırasıyla $f(z) = z^2 . \prod_{i=1}^{4m-2}(z-\alpha_i)$ ve $g(z) = z^2 . \prod_{i=1}^{4n-2}(z-\beta_i)$ biçiminde yazılabilir. Şimdi h_{11}, h_{22} fonksiyonları sırasıyla $h_{11}(z) = \prod_{i=1}^{4m-2}(z-\alpha_i)$ ve $h_{22}(z) = \prod_{j=1}^{4n-2}(z-\beta_j)$ ise, $|h_{11}(0)| = \prod_{i=1}^{4m-2}|\alpha_i|$ ve $|h_{22}(0)| = \prod_{j=1}^{4n-2}|\beta_j|$ olur. O zaman $|h_{11}(0).h_{22}(0)| = \prod_{i=1}^{4m-2}|\alpha_i| . \prod_{j=1}^{4n-2}|\beta_j|$ elde edilir. Eğer,
$H(z) = \prod_{i=1}^{4m-2}(z-\alpha_i) . \prod_{j=1}^{4n-2}(z-\beta_j)$ tanımlarsak $\max_{z \in \partial D}|H(z)| > \prod_{i=1}^{4m-2}|\alpha_i| . \prod_{j=1}^{4n-2}|\beta_j|$ olur. Öte yandan $|f(z).g(z)| = |z|^4 . |H(z)|$ olduğu için Lemma 1 gereğince her $z \in \partial D$ için
$|f(z).g(z)| \geq \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^4 . |H(z)|$ ve buradan da

$$M_{f.g} = \max_{z \in \partial D}|f(z).g(z)| \geq \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^4 . \prod_{i=1}^{4m-2}|\alpha_i| . \prod_{j=1}^{4n-2}|\beta_j| \tag{15}$$

bulunur. Ayrıca her $z \in \overline{D}$ için $|z| \leq d$, $|z-\alpha_i| \leq 2d$ ve $|z-\beta_j| \leq 2d$ olduğundan

$$M_f . M_g = \max_{z \in \partial D}|f(z)| . \max_{z \in \partial D}|g(z)| \leq 2^{4m-2} . 2^{4n-2} . d^{4m+4n} \tag{16}$$

bulunur. (15) ve (16) dan da (14) Formülü elde edilir.

Teorem 4. (Genelleştirilmiş Teorem 3) $n \geq 2$ olsun. D Bölgesinde $4m_1, 4m_2, \ldots, 4m_n$ sırasıyla $f_1, f_2, \ldots, f_n \in UT^4_{2,2}P(a)$ polinom fonksiyonlarının dereceleri ve $f_i(\mp a) = \mp a^{q_i}$, $\forall \rho_1 \neq 0$ $(i = 1,2,..,n)$; $\alpha_{i1} \neq 0$ $(1 \leq i \leq 4m_1 - 2)$

f_1'in sıfırları, $\alpha_{i2} \neq 0$ ($1 \leq i \leq 4m_2 - 2$) f_2'in sıfırları,…, $\alpha_{in} \neq 0$ ($1 \leq i \leq 4m_n - 2$) f_n'in sıfırları olsun. O zaman,

$$\theta_5' = \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^{2n} . \frac{\prod_{i=1}^{4m_1-2} |\alpha_{i1}| . \prod_{i=1}^{4m_2-2} |\alpha_{i2}| \ldots \prod_{i=1}^{4m_n-2} |\alpha_{in}|}{d^{4m_1+4m_2+\ldots+4m_n}} . \frac{1}{2^{4m_1-2}} . \frac{1}{2^{4m_2-2}} \cdots \frac{1}{2^{4m_n-2}}$$

olmak üzere

$$M_{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n} \geq \theta_5' . M_{f_1} . M_{f_2} \ldots M_{f_n} \text{ dir.} \tag{17}$$

4.3. $|a|$'ya ve Polinomların Sıfırlarına Bağlı Eşitsizlikler (Inequalities Depending On $|a|$ and on the Zeros of Polynomials)

Bu alt kesimde D bölgesinde $UT_{2,2}^4 P(a)$ sınıfı için hem $|a|$'ya hem de polinomların köklerine bağlı olarak eşitsizlikler elde edeceğiz.

Teorem 5. D Bölgesinde $4m$ ve $4n$ sırasıyla $f, g \in UT_{2,2}^4 P(a)$ polinom fonksiyonlarının dereceleri ve $f(\mp a) = \mp a^p$, $g(\mp a) = \mp a^q$, $\forall \rho_1 \neq 0$; $\alpha_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq 4m - 2$) f'nin sıfırları, $\beta_i \neq 0$ ($1 \leq j \leq 4n - 2$) g'nin sıfırları olsun. Bu halde,

$$\theta_6 = \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^4 . \frac{\max(|a|^{p+q-4}, \prod_{i=1}^{4m-2} |\alpha_i| . \prod_{j=1}^{4n-2} |\beta_j|)}{d^{4m+4n}} . \frac{1}{2^{4m-2}} . \frac{1}{2^{4n-2}}$$ olmak

üzere,

$$M_{f \cdot g} \geq \theta_6 . M_f . M_g \quad \text{dir.} \tag{18}$$

İspat. Teorem 1'in (9) eşitsizliği

$M_{f \cdot g} = \max_{z \in \partial D} |f(z).g(z)| \geq (\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0))^4 . |a|^{p-2} . |a|^{q-2}$ ve Teorem 3'in (15) eşitsizliği

$$M_{f \cdot g} = \max_{z \in \partial D} |f(z).g(z)| \geq \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^4 . \prod_{i=1}^{4m-2} |\alpha_i| . \prod_{j=1}^{4n-2} |\beta_j|$$

biçimindedir. O zaman,

$$M_{f \cdot g} = \max_{z \in \partial D} |f(z).g(z)| \geq \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^4 . \max(|a|^{p+q-4}, \prod_{i=1}^{4m-2} |\alpha_i| . \prod_{j=1}^{4n-2} |\beta_j|)$$

olur. Bundan sonra (8) (ya da (16)) göz önüne alınırsa istediğimizi elde ederiz.

Teorem 6. (Genelleştirilmiş Teorem 5) $n \geq 2$ olsun. D Bölgesinde $4m_1$, $4m_2$, …, $4m_n$ sırasıyla $f_1, f_2, \ldots, f_n \in UT_{2,2}^4 P(a)$ polinom fonksiyonlarının dereceleri ve $f_i(\mp a) = \mp a^{q_i}$, $\forall \rho_1 \neq 0$ $(i = 1,2,..,n)$; $\alpha_{i1} \neq 0$ ($1 \leq i \leq 4m_1 - 2$) f_1'in sıfırları, $\alpha_{i2} \neq 0$ ($1 \leq i \leq 4m_2 - 2$) f_2'in sıfırları, … , $\alpha_{in} \neq 0$, $1 \leq i \leq 4m_n - 2$) f_n'in sıfırları olsun. O zaman,

$$\theta_7 = \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^{2n} . \frac{\max(|a|^{q_1+q_2+...+q_n-2n}, \prod_{i=1}^{4m_1-2} |\alpha_{i1}| . \prod_{i=1}^{4m_2-2} |\alpha_{i2}| ... \prod_{i=1}^{4m_n-2} |\alpha_{in}|}{d^{4m_1+4m_2+....+4m_n}}$$

$$. \frac{1}{2^{4m_1-2}} . \frac{1}{2^{4m_2-2}} ... \frac{1}{2^{4m_n-2}}$$

olmak üzere

$M_{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n} \geq \theta_7 . M_{f_1} . M_{f_2} ... M_{f_n}$ dir. (17)

4.4. Özel Durum: Bir Birim Ful Hiperbolik Bölge Durumu (Special Case: Case A Unit Full Hyprbolical Region)

Bu kesimde bir birim ful hiperbolik bölgede $UT_{2,2}^4 P(a)$ sınıfı için maksimun modül eşitsizlikleri vereceğiz.

D Bölgesinde $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 1$ koymakla elde ettiğimiz ful hiperbolik bölge Tanım 2 gereğince bir birim ful hiperbolik bölgedir. Bu bölgeyi $D(1)$ ile gösterelim. $D(1)$ bölgesi için $\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0) = 1$, ve $2d = 2\sqrt{3}$ ya da $d = \sqrt{3}$ dir. $a \in \overline{D}$ noktası $D(1)$ bölgesinde birim çember üzerinde olsun. O zaman, sırasıyla

. $\min(p, q) \geq 3$ ise, (5) Formülünden

$$M_{f.g} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4m+4n} . \frac{1}{2^{4m-2}} . \frac{1}{2^{4n-2}} . M_f . M_g \quad (18)$$

Formülü,

. $p = q = 1$ ($0, -a, a$ noktaları sabit noktalar) ya da $\min(p, q) = 1$ ise, (6) ya da (7) Formülünden

$$M_{f.g} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4m+4n} . \frac{1}{2^{4m-1}} . \frac{1}{2^{4n-1}} . M_f . M_g \quad (19)$$

Formülü,

. $\min(q_1, q_2, ..., q_n) \geq 3$ ise, (10) Formülünden

$$M_{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4m_1+4m_2+...+4m_n} . \frac{1}{2^{4m_1-2}} . \frac{1}{2^{4m_m-2}} ... \frac{1}{2^{4m_n-2}} . M_{f_1} . M_{f_2} ... M_{f_n} \quad (20)$$

Formülü,

. $q_1 = q_2 = ... = q_n = 1$ ($0, -a, a$ noktaları sabit noktalar) ya da $\min(q_1, q_2, ..., q_n) = 1$ ise, (11) ya da (12) Formüllerinden

$$M_{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4m_1+4m_2+...+4m_n} . \frac{1}{2^{4m_1-1}} . \frac{1}{2^{4m_m-1}} ... \frac{1}{2^{4m_n-1}} . M_{f_1} . M_{f_2} ... M_{f_n} \quad (21)$$

Formülü,

Eğer $j \leq n$ olmak üzere $f_1, f_2, ..., f_j$ polinom fonksiyonları için $\min(q_1, q_2, ..., q_j) \geq 3$, geriye kalan $n - j$ tane $f_{j+1}, f_{j+2}, ..., f_n$ polinom fonksiyonu için $\min(q_{j+1}, q_{j+2}, ..., q_n) = 1$ ise, (13) Formülünden aşağıda (22) ile numaralayaçağımız

$$M_{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4m_1+4m_2+\ldots+4m_n} \cdot \frac{1}{2^{4m_1-2}} \cdot \frac{1}{2^{4m_m-2}} \cdots \frac{1}{2^{4m_j-2}} \cdot \frac{1}{2^{4m_{j+1}-1}} \cdots \frac{1}{2^{4m_n-1}} \; . \; M_{f_1} . M_{f_2} \ldots M_{f_n}$$

Formülü, elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER (RESULTS AND RECOMMENDATIONS)

$UT_{2,2}^4 P(a)$ sınıfının a) $\rho_1 = 0$, b) $\rho_1 = \rho_2 = 0$,… c) $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_l = 0$ ($l \leq m$)olan elemanları için de B_2 ve D hiperbolik bölgelerinde (5)---(22) Formüllerine benzer formüller elde edilebilir.

$UTP(a)$ içinde $UT_{3,1}^4 P(a)$, $UT_{1,3}^4 P(a)$, $UT_{4,0}^4 P(a)$ ile tanımlı sınıflar için de B_2 ve D hiperbolik bölgelerinde (5)---(22) Formüllerine benzer formüller elde edilebilir.

$z = 0$ noktasını kök kabul etmeyen $f_1(z) = \prod_{i=1}^{m_1} (z - \alpha_{i1})$ $(\alpha_{i1} \neq 0, 1 \leq i \leq m_1)$, $f_2(z) = \prod_{i=1}^{m_2} (z - \alpha_{i2})$ $(\alpha_{i2} \neq 0, 1 \leq i \leq m_2)$, …, $f_n(z) = \prod_{i=1}^{m_n} (z - \alpha_{in})$ $(\alpha_{in} \neq 0, 1 \leq i \leq m_n)$ formunda $UT_{2,2}^4 P(a)$ sınıfının elemanı olmayan $n \geq 2$ polinom fonksiyonu verilsin. O zaman,çalışmada yaptığımız ispat yolu izlenerek,

$$\delta = \frac{\prod_{i=1}^{m_1} |\alpha_{i1}| . \prod_{i=1}^{m_2} |\alpha_{i2}| \ldots \prod_{i=1}^{m_n} |\alpha_{in}|}{d^{m_1+m_2+\ldots+m_n}} . \frac{1}{2^{m_1}} . \frac{1}{2^{m_2}} \cdots \frac{1}{2^{m_n}}$$ olmak üzere

$M_{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n} \geq \delta . M_{f_1} . M_{f_2} \ldots M_{f_n}$ formülü bulunabilir. (23)

$z = 0$ noktasını sırasıyla $k_1, k_2, \ldots, k_n$ katlı kök kabul eden

$f_1(z) = z^{k_1} . \prod_{i=1}^{m_1-k_1} (z - \alpha_{i1})$ $(\alpha_{i1} \neq 0, 1 \leq k_1 \leq m_1)$, $f_2(z) = z^{k_2} . \prod_{i=1}^{m_2-k_2} (z - \alpha_{i2})$ $(\alpha_{i2} \neq 0, 1 \leq k_2 \leq m_2)$, …, $f_n(z) = z^{k_n} . \prod_{i=1}^{m_n-k_n} (z - \alpha_{in})$ $(\alpha_{in} \neq 0, 1 \leq k_n \leq m_n)$ formunda $UT_{2,2}^4 P(a)$ sınıfının elemanı olmayan $n \geq 2$ polinom fonksiyonu verilsin. Bu zaman,

$$\gamma = \left[\min(a_0, b_0, \sqrt{2}.c_0, \sqrt{2}.d_0)\right]^{k_1+k_2+\ldots+k_n} . \frac{\prod_{i=1}^{m_1-k_1} |\alpha_{i1}| . \prod_{i=1}^{m\ -k_2} |\alpha_{i2}| . \prod_{i=1}^{m_n-k_n} |\alpha_{in}|}{d^{m_1+m_2+\ldots+m_n}} . \frac{1}{2^{m_1-k_1}} . \frac{1}{2^{m_2-k_2}} \cdots \frac{1}{2^{m_n-k_n}}$$

olmak üzere

$M_{f_1 . f_2 \ldots f_n} \geq \gamma . M_{f_1} . M_{f_2} \ldots M_{f_n}$ formülü bulunabilir. (24)

$M(f, R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$ ve $M(f,1) = \max_{|z|=1} |f(z)|$ olarak tanımlansın.

$M(f, R)$ ve $M(f,1)$ arasında var olan eşitsizlik formülleri için [1, 9, 10, 11, 12, 13 ve 17] önerilir. Bir ful hiperbolik bölge ve bu bölgeden oluşturulan birim ful hiperbolik bölge için polinomların maksimum modülleri arasında [1, 9, 10, 11, 12, 13 ve 17]'dekilere benzer eşitsizlikler oluşturulabilir.

6. TARTIŞMALAR (DISCUSSIONS)

(1),(2),(3)ve(4) formüllerindeki katsayılar polinomların köklerinin mutlak değerli olarak en küçük köküne bağlıdırlar. Polinomların köklerini bulmak sorun değilse, bu formülleri uygulamak oldukca kolaylık sağlar. Elbette $UT^4_{2,2}P(a)$ sınıfının elemanları için de (1), (2),(3) ve (4) Formüllerini yazabiliriz. D ful hiperbolik bölgesi B_2 hiperbolik bölgesinden daha genel bir bölgedir. D bölgesinde $UT^4_{2,2}P(a)$ sınıfının elemanları için bulduğumuz (5), (6), (7), (10), (11), (12) ve (13) Formüllerindeki katsayılar polinomların köklerinden bağımsızdır. İlgili katsayılar $|a|$'ya (ya da kuvvetine) bağlıdır ve sınıf verildiğinde $|a|$ bellidir. O zaman elde ettiğimiz (5), (6), (7), (10), (11), (12) ve (13) Formülleri oldukça kullanışlıdır.

Bir birim ful hiperbolik bölge daima birim diski içerir. $UT^4_{2,2}P(a)$ sınıfının elemanları için, birim diskte [17], [15], [14], [7] ve [3]'de verilen eşitsizliklerdeki katsayılar geçerli iken, aynı polinom fonksiyonlar için $D(1)$birim ful hiperbolik bölgesinde(18), (19),(20),(21) ve (22) Formüllerindeki katsayılar geçerlidir. Tersine tartışmalar da yapılabilir. Örneğin, $D(1)$ birim ful hiperbolik bölgesi $d = R = \sqrt{3}$ yarıçaplı daire tarafından kapsanır.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Ankeny, N.C. and Rivlin, T.J., (1955). On a theorem of S. Brenstein, Pasific J. Math., ss:849-852.
2. Aziz, A., (1987). Growty of polynomials whose zeros are within or outside a circle,Bull.Austral.Math. Soc. Vol.35, ss:247-256.
3. Çelik, A., (2013). Inequalities for polynomial functions, NWSA-Physical Sciences, Volume: 8, Number: 2, ss:32-47.
DOI URL http://dx.doi.org/10.12739/NWSA.2013.8.4.3A0064
4. Çelik, A., (2012). New inequalities for Maximum Modulus Values of polynomial functions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume: 41 (2), ss:255-263.
5. Çelik, A., (2009). On the ünivalent functions with three preasigned values and automorphism of an open disk, NWSA-Physical Sciences, Volume: 4, Number: 1, ss:36-41,2009.
6. Çelik, A., (2004). Maximum module values of polynomials on $|z| = R$ ($R > 1$), Üniv. Beograd, publ. Elektrotehn. Fak.,ser.Mat.15,ss:1-6
7. Çelik, A., (1997). A note on Mohr's paper, Üniv.Beograd,publ. Elektrotehn. Fak., ser. Mat.8, ss: 51-54
8. Deshpande, J.V., (1986). Complex Analysis (Tata MCGraw-Hill Publising Company, New Delhi).
9. Dewan, K.K. and Ahuja, A., (2011). Growty of polynomials havings zeros inside a circle, Int. Journal of Math. Analysis, Volume:5, no.11, ss:499-505.
10. Gardner, R.B., (2004). Some results conserning rate of Growty of polynomials, East Journal on approximations, Volume: 10, Number: 3, ss:301-312.

11. Gardner, R.B., Govil, N.K., and Musukula, S.R., (2005). Rate of Growty of polynomials not vanishings inside a circle, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume: 6, Issue: 2, Articale: 53, ss:1-21.
12. Milonovic’ G.V., Mitrinovic’ D.S., and Rassias, M.TH., (1994). Extremal Problems, Inequalities Zeros (ord Scientific Publ. Co., Singapore, New Jersey, London.
13. Mir, A., Devan, K.K., and Sing, N., (2009). Some inequalities concerning the rate of growty of polinomials, Turk. J. Math., 33, ss:239-247.
14. Mohr, E., (1992). Bemerkung Zu der arbeit Van A.M. Ostrowski Notiz Uber Maximalwerte von polynomen auf dem einheitskreis Üniv. Beograd, publ. Elektrotehn. Fak,ser. Mat.3, ss: 3-4.
15. Ostrowski, A.M., (1979). Notiz uber Maximalwerte von polynomen auf dem einheitskreis, Üniv. Beograd, publ.Elektrotehn. Fak.,ser. Mat. Fiz., No 34-637 ,ss: 55-56.
16. Quazi, M.A., (1992). On the maximum module values of polynomials, Proceding of the American Mathematicle Soc., Volume: 115, Number: 2, ss:337-343.
17. Rassias, M.T.H., (1986). A new inequality for complex-valued polynomial functions, Proc. Amer. Math. Soc. 9, ss: 296-298.