ISSN:1306-3111
e-Journal of New World Sciences Academy
2012, Volume: 7, Number: 2, Article Number: 3A0052

NWSA-PHYSICAL SCIENCES
Received: January 2012
Accepted: April 2012
Series : 3A
ISSN : 1308-7304

İnci Çilingir Süngü
Hüseyin Demir
Ondokuz Mayıs University
incicilingir@gmailcom.tr
hdemir@omu.edu.tr
Samsun-Turkey

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM/SONLU FARK YÖNTEMİ İLE DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Bu çalışmada yeni bir çözüm metodu olarak Diferansiyel Dönüşüm/Sonlu Fark metodu incelenmiştir. Metodun birinci ve ikinci mertebeden lineer ve lineer olmayan denklem sistemlerine uygulanması araştırılmış ve Adomian Decomposition metodu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Buna göre Diferansiyel Dönüşüm/Sonlu Fark Metodunun denklem sistemlerinin çözümünde de etkili sonuçlar verdiği görülmüştür. Sonuç olarak; diğer metotlarla karşılaştırıldığında Diferansiyel Dönüşüm/Sonlu Fark Metodunun güvenilir ve kesin sonuç verdiği ve uygulanışının daha kolay olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Denklem sistemleri, Nümerik Analiz, Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Sonlu Fark Metodu, Hibrit metot

SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY DIFFERENTIAL TRANSFORM/FINITE DIFFERENCE METHOD

ABSTRACT

In this study, Differential Transform/Finite Difference Method is considered as a new solution technique. Discretization of system of first and second order linear and nonlinear differential equations were investigated and approximate solutions were compared with the solutions of Adomian Decomposition Method. The results show that Differential Transform/Finite Difference method is one of the efficient approaches to solve system of differential equations. Consequently, it was shown that the hybrid technique is reliable, accurate and easy to apply when compared with the methodology of some known techniques.

Keywords: System of Differential Equations, Numerical Analysis, Differential Transform Method, Finite Difference Method, Hybrid Method

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Fizik ve mühendisliğin birçok probleminde lineer ve lineer olmayan birinci veya daha yüksek mertebeden diferansiyel denklem sistemleri karşımıza çıkar. Bu sistemlerin çözümünde birçok metot kullanılmaktadır. Sonyıllarda ise seri çözüme dayalı, daha kullanışlı metotlar ortaya konmuştur. Bu sayede denklem sistemlerini daha hızlı bir şekilde yakınsak sonuçları elde edilebilmektedir. Bu metotlardan ikisi Adomian Decomposition Method (ADM) ve Diferansiyel Dönüşüm Metodudur (DTM). DTM ilk olarak Zhou (1986) tarafından ortaya konmuştur. Elektrik yayılım analizinde hem lineer hem de lineer olmayan başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Bu yöntem şimdiye kadar birçok bilim insanı tarafından çeşitli diferansiyel denklem ve sistemlerinin çözümünde tanım ve teorileri ile birlikte kullanılmıştır [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9].

Bizim bu çalışmada kullandığımız Diferansiyel Dönüşüm/Sonlu Fark Metodu ise yeni bir yöntem olarak lineer ve lineer olmayan bazı kısmi diferansiyel denklemlerine uygulanmıştır. Bu metot zaman değişkenine göre diferansiyel dönüşüm metodunun, konum değişkenlerine ise sonlu fark metodunun uygulanması ile elde edilen bir metotdur. Uygulanılan problemin özelliğine bağlı olarak seri formunda çözüm veya ağ noktaları üzerinde yaklaşık çözüm vermektedir. Chen ve Ju (2004)`de diferansiyel dönüşüm/sonlu fark metodunu advektif dispersiv taşınım denklemine uygulamışlardır. 2008 yılında Chu ve Chen lineer olmayan ısı transfer denklemini bu metotla çözmüşlerdir. Yine farklı formdaki bir ısı denkleminin çözümü Chu ve Lo (2008) tarafından yapılmıştır. Burada ele alınan denklemler önce zaman değişkenine göre diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak ayrıştırılmış daha sonra konum değişkenlerine merkezi fark yaklaşımı kullanılmıştır. Başlangıç ve sınır koşullarının dönüşümleri alınarak denklem sistemi eş zamanlı olarak çözülmüştür. Daha sonra bulunan yaklaşık çözümler literatürdekilerle karşılaştırılarak yorumlanmıştır.

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICANCE)

Bu çalışmada yeni bir çözüm metodu olarak Diferansiyel Dönüşüm/Sonlu Fark metodu incelenmiştir. Metodun birinci ve ikinci mertebeden lineer ve lineer olmayan denklem sistemlerine uygulanması araştırılmış ve Adomian Decomposition metodu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Buna göre Diferansiyel Dönüşüm/Sonlu Fark Metodunun denklem sistemlerinin çözümünde de etkili sonuçlar verdiği görülmüştür. Sonuç olarak; diğer metotlarla karşılaştırıldığında Diferansiyel Dönüşüm/Sonlu Fark Metodunun güvenilir ve kesin sonuç verdiği ve uygulanışının daha kolay olduğu görülmüştür.

3. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU (DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD)

DTM temel olarak lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanılır. $x(t)$, D bölgesinde analitik fonksiyon olsun. $x(t)$ nin Taylor seri açılımı $\forall t \in D$ *için*

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_i)^k}{k!}\left(\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right)_{t=t_i} \tag{1}$$

$t_i=0$ olduğunda bu açılım Maclaurin serileri olarak adlandırılır ve $\forall t \in D$ *için*

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right)_{t=0} \tag{2}$$

formuna sahiptir. $x(t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü, $\forall k \in \mathbf{K}$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$X(k)=T\left[x(t)\right]=\frac{H^k}{k!}\left(\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right)_{t=0} \tag{3}$$

Burada $\mathbf{K}$ bölgesi negatif olmayan tamsayıların kümesidir. $X(k)$, $\mathbf{K}$ bölgesinde $x(t)$ nin spektrumu veya dönüştürülmüş fonksiyonudur. k dönüşüm parametresi, H diferansiyel dönüşüm metodunun zaman aralığıdır.

Taylor seri açılımından, diferansiyel dönüşümün ters dönüşümü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k) \tag{4}$$

(4) denklemi mühendislik problemine uygulandığında, $x(t)$ fonksiyonu sonlu Taylor serisi terimi ve kalan teriminin toplamı olarak

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k)+R_{n+1}(t) \tag{5}$$

şeklinde yazılabilir.

DTM kullanarak, bir diferansiyel denklem $\mathbf{K}$ bölgesinde cebirsel sıralı denklemlere dönüştürülür. $x(t)$ bilinmeyen fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $X(k)$ sıralı denklemlerin çözümleri ile elde edilir ve buradan denklem (4) ve (5) kullanılarak $X(k)$nın ters dönüşümünden $x(t)$ bilinmeyen fonksiyonu elde edilir.

4. DENKLEM SİSTEMLERİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM/SONLU FARK METODU İLE ÇÖZÜMLERİ (SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING DIFFERENTIAL TRANSFORM/FINITE DIFFERENCE METHOD)

Bu bölümde, lineer ve lineer olmayan bazı denklem sistemlerinin çözümleri yapılmıştır. Sırasıyla Diferansiyel Dönüşüm/Sonlu Fark Metodu birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan denklem sistemlerine uygulanmıştır. Çalışmamızın en önemli noktası üçüncü örnekte ise ikinci mertebeden lineer olmayan denklem sistemi ele alınmış, diğer metotların aksine fazladan bir işlem yapmadan lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümünde de kullanılan metodunun etkili sonuçlar verdiği ortaya konmuştur. Sonuçlar literatürdekilerle karşılaştırılmıştır tablolar halinde verilmiştir.

Örnek 1:

$$\begin{aligned} u_t - v_x + (u+v) &= 0 \\ v_t - u_x + (u+v) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

homojen lineer denklem sistemini ele alalım. Denklem sistemine uygun başlangıç koşulları

$$u(x,0)=\sinh x \quad , \quad v(x,0)=\cosh x \tag{7}$$

şeklindedir. (6) denklem sitemi hibrit metodu ile ayrıştırılırsa

$$\begin{aligned}(k+1)U(i,k+1)&=\frac{V(i+1,k)-V(i-1,k)}{2h}-U(i,k)-V(i,k)\\(k+1)V(i,k+1)&=\frac{U(i+1,k)-U(i-1,k)}{2h}-U(i,k)-V(i,k)\end{aligned} \tag{8}$$

şeklinde elde edilir. Burada $U(i,k)$ ve $V(i,k)$, sırasıyla $u(x_i,t)$ ve $v(x_i,t)$ fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümleridir. Başlangıç koşullarının diferansiyel dönüşümleri ise

$$U(i,0)=\sinh(ih) \quad , \quad V(i,0)=\cosh(ih) \tag{9}$$

olarak elde edilir. (8) denklem sisteminde ilk olarak $k=0,1,2,\ldots$ yazılarak $U(i,k+1)$ ve $V(i,k+1)$ değerleri hesaplanır. Elde edilen bu değerler (4) ters dönüşüm bağıntısında yerlerine yazılırsa düğüm noktaları üzerinde yaklaşık çözümler elde edilmiş olur. Elde edilen yaklaşık çözümün $h=0.1$ alınarak $x=0,1,(0.1)$ için $u(x,0.001)$ değerlerinin aynı problemi DTM metodu ile çözen Kant ve Aruna'nın elde ettiği sonuçlarla karşılaştırılması Tablo 1'de verilmiştir[13].

Tablo 1. Örnek 1'de elde edilen yaklaşık sonuçların ADM metodu ile karşılaştırılması
(Table 1. Comparison of numerical results with ADM metheod for test problem 1)

x	Şimdiki Sonuçlar u	Literatürdeki sonuçlar [13], u	Hata u	Şimdiki Sonuçlar v	Literatürdeki sonuçlar [13], v	Hata v
0	1.000999	1.001000	0.000001	-0.000999	-0.001	$7.85\ 10^{-7}$
0.1	0.955544	0.955540	0.000003	0.044455	0.044459	-0.000003
0.2	0.918205	0.918202	0.000002	0.081794	0.081797	-0.000002
0.3	0.887515	0.887513	0.000001	0.112484	0.112486	-0.000002
0.4	0.862347	0.862346	0.000001	0.137652	0.137653	-0.000001
0.5	0.841823	0.841822	$9.441\ 10^{-7}$	0.158175	0.158177	-0.000001
0.6	0.825246	0.825245	$6.958\ 10^{-7}$	0.174753	0.174754	$-8.4\ 10^{-7}$
0.7	0.812051	0.812050	$5.171\ 10^{-7}$	0.187948	0.187949	$-6.3\ 10^{-7}$
0.8	0.801777	0.801776	$3.882\ 10^{-7}$	0.198222	0.198223	$-5.0\ 10^{-7}$
0.9	0.794040	0.794039	$3.310\ 10^{-7}$	0.205959	0.205960	$-4.3\ 10^{-7}$
1.0	0.788515	0.788514	0.000001	0.211484	0.211485	-0.000001

Örnek 2:
Birinci mertebeden lineer olmayan denklem sistemi

$$\begin{aligned} &u_t + vu_x + u = 1 \\ &v_t - uv_x - v = 1 \end{aligned} \tag{10}$$

göz önüne alalım. Problem için uygun başlangıç koşulları

$$u(x,0) = e^x \quad , \quad v(x,0) = e^{-x} \tag{11}$$

şeklindedir. (11) denklem sistemini hibrit metodu ile ayrıştıralım. Bu durumda tekrarlama bağıntısı

$$\begin{aligned} (k+1)U(i,k+1) = -\sum_{k_1=0}^{k} V(i,k-k_1)\left\{\frac{U(i+1,k_1)-U(i-1,k_1)}{2h}\right\} \\ -U(i,k)+\delta(k) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} (k+1)V(i,k+1) = -\sum_{k_1=0}^{k} U(i,k-k_1)\left\{\frac{V(i+1,k_1)-V(i-1,k_1)}{2h}\right\} \\ +V(i,k)+\delta(k) \end{aligned}$$

ve başlangıç koşulları

$$U(i,0) = e^{ih} \quad , \quad V(i,0) = e^{-ih} \quad , \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{13}$$

şeklinde elde edilirler. Başlangıç koşulları kullanılarak (12) tekrarlama bağıntısından ardışık diferansiyel dönüşüm katsayıları hesaplanır. Hesaplanan katsayılar (4) ters dönüşüm bağıntısında yerine yazılmasıyla yaklaşık çözümler elde edilmiş olur. Elde edilen çözümlerin hasssasiyeti hesaplanan terim sayısına ve h aralığına bağlıdır. Sonuçları daha iyi karşılaştırabilmek için bu örnekte $h = 0,01$ alarak x'in farklı değerleri için sonuçları literatürdekilerle karşılaştıralım. Tablo 2'den görüldüğü gibi sonuçlar arasındaki farklılık oldukça azdır.

Tablo 2. Örnek 2'de elde edilen sonuçların literatürle karşılaştırılması
(Table 2. Comparison of numerical results with literature for test problem 2)

x	Şimdiki Sonuçlar u	Literatürdeki sonuçlar [8], u	Hata u	Şimdiki Sonuçlar v	Literatürdeki sonuçlar [8], v	Hata v
0	-0.000999	-0.001	2.10^{-9}	1.0	1.0	0
0.1	0.099161	0.099161	$3.\ 10^{-9}$	1.004904	1.004904	$1.\ 10^{-7}$
0.2	0.200316	0.200316	0	1.019866	1.019865	$1.\ 10^{-7}$
0.3	0.303475	0.303475	0	1.045034	1.045034	0
0.4	0.409671	0.409671	$2.\ 10^{-8}$	1.080662	1.080662	0
0.5	0.519967	0.519967	$1.\ 10^{-8}$	1.127105	1.127105	$1.\ 10^{-7}$
0.6	0.635468	0.635468	0	1.184829	1.184829	0
0.7	0.757328	0.757328	$1.\ 10^{-8}$	1.254411	1.254411	0
0.8	0.886769	0.886768	$1.\ 10^{-8}$	1.336547	1.336547	0
0.9	1.025084	1.025084	$-1.\ 10^{-7}$	1.432060	1.432060	0
1.0	1.173658	1.173658	0	1.541906	1.541906	0

Örnek 3:

Son olarak, ikinci mertebeden lineer olmayan denklem sistemi ele alalım. Denklem sistemi ve başlangıç koşulları aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u\left(1-u^2-v^2\right) \\ v_t - v_{xx} &= -2u^2 v \end{aligned} \tag{14}$$

$$u(x,0)=\frac{e^x}{1+x+e^x} \quad , \quad v(x,0)=\frac{x}{1+x+e^x} \tag{15}$$

Denklem sistemi diferansiyel dönüşüm metodu uygulanarak ayrıştırıldıktan sonra ikinci mertebeden türevlere merkezi sonlu fark yaklaşımı uygulanırsa aşağıdaki tekrarlama bağıntısı elde edilir.

$$\begin{aligned} (k+1)U(i,k+1) &= \frac{U(i+1,k)-2U(i,k)+U(i-1,k)}{h^2}+U(i,k) \\ &-\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}U(i,k_1)U(i,k_2-k_1)U(i,k-k_2) \\ &-\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}U(i,k_1)V(i,k_2-k_1)V(i,k-k_2) \end{aligned} \tag{16}$$

$$(k+1)V(i,k+1)=\frac{V(i+1,k)-2V(i,k)+V(i-1,k)}{h^2}$$
$$-2\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}U(i,k_1)U(i,k_2-k_1)V(i,k-k_2)$$

Başlangıç koşulları için

$$U(i,0)=\frac{e^{ih}}{1+ih+e^{ih}} \quad , \quad V(i,0)=\frac{ih}{1+ih+e^{ih}} \quad , \quad i=0,1,2,\ldots \tag{17}$$

bağıntıları elde edilir. Bu denklem sistemleri eşzamanlı olarak başlagıç değerleri yerlerine yazılarak çözülürse aşağıdaki sonuçlar elde edilir. Tablo 3'de $h=0.01$ alınarak $t=0.001$ anındaki u ve v değerleri ve içerdikleri hatalar verilmiştir.

Tablo 3. Örnek 3 de elde edilen yaklaşık sonuçların literatürdekilerle karşılaştırılması
(Table 3. Comparison of numerical results with literature for test problem 3)

x	Şimdiki Sonuçlar u	Literatürdeki sonuçlar [14], u	Hata u	Şimdiki Sonuçlar v	Literatürdeki sonuçlar [14], v	Hata v
0	0.999	0.999	$-1.78\ 10^{-8}$	1.001	1.001	$-1.8\ 10^{-8}$
0.1	1.00904	1.00904	$-1.7\ 10^{-8}$	0.991040	0.991040	$-1.68\ 10^{-8}$
0.2	1.019181	1.019181	$-1.7\ 10^{-8}$	0.981179	0.981179	$-1.67\ 10^{-8}$
0.3	1.029424	1.029424	$-1.6\ 10^{-8}$	0.971416	0.971416	$-1.68\ 10^{-8}$
0.4	1.03977	1.03977	$-1.7\ 10^{-8}$	0.961750	0.961750	$-1.66\ 10^{-8}$
0.5	1.05022	1.05022	$-1.7\ 10^{-8}$	0.952181	0.952181	$-1.67\ 10^{-8}$
0.6	1.060775	1.060775	$-1.6\ 10^{-8}$	0.942706	0.942706	$-1.67\ 10^{-8}$
0.7	1.071436	1.071436	$-1.7\ 10^{-8}$	0.933326	0.933326	$-1.67\ 10^{-8}$
0.8	1.082204	1.082204	$-1.6\ 10^{-8}$	0.924039	0.924039	$-1.66\ 10^{-8}$
0.9	1.09308	1.09308	$-1.6\ 10^{-8}$	0.914845	0.984845	$-1.67\ 10^{-8}$
1.0	1.104066	1.104066	$-1.7\ 10^{-8}$	0.905742	0.905742	$-1.67\ 10^{-8}$

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada üç farklı türden denklem sistemi göz önüne alınmıştır. Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemine diferansiyel dönüşüm/sonlu fark metodu uygulandığında sonuçlarımız göstermiştir ki; h değeri çok küçük bir değer olarak alınmamasına rağmen yaklaşım oldukça tutarlıdır. İkinci aşama olarak birinci mertebeden lineer olmayan denklem sistemi göz önüne alınmıştır. Lineerleştirmeye gerek duyulmadan denklemler ayrıştırılmıştır. Sadece sonlu fark adım aralığı inceltilerek sonuç alınmış ve sonuçların içerdikleri hataların oldukça küçük değerler olduğu görülmüştür. Çalışmamızın asıl örneği olan üçüncü örnekte ikinci mertebeden lineer olmayan denklem sistemi gözönüne alınmış, yine lineerleştirme yapılmadan denklem sistemi ayrıştırılmıştır. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun aksine katsayıların kolaylıkla hesaplanabileği karmaşık toplam terimleri içermeyen tekrarlama bağıntıları elde edimiştir. Yine sadece sonlu fark adım aralığı inceltilerek sonuçlar alınmış ve sonuçların analitik çözümle tutarlı olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak yeni bir metot olarak diferansiyel dönüşüm/sonlu fark metodu iki farklı sayısal metodun farklı özelliklerini birleştiren kullanışlı bir metottur. Lineer ve lineer olmayan denklemlere doğrudan uygulanabilmekte ve yüksek mertebeden denklemler için tekrarlama bağıntısını karmaşık işlemlerden uzak tutarak hesaplanmasını sağlamaktadır. Bu haliyle bu metot bilinen klasik çözüm yöntemlerinin aksine daha kullanışlı, daha pratik, daha hızlı yakınsayan etkili bir metottur. Yine diferansiyel dönüşüm metodunda başlangıç koşullarının dönüşüm katsayılarının hesaplanmasında Taylor açılımlarına gereksinim duyulurken diferansiyel dönüşüm/sonlu fark metodunda doğrudan yerine yazılarak hesaplanması sağlanmaktadır. Bu da farklı başlangıç koşullarının gözönüne alınmasını kolaylaştırmaktadır.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Zhou, C.Q., (1986). Differential Transformation and its Applications for Electrical Circuits. Huazhong University Press, Wuhan, China.
2. Chen, C.L. and Liu, Y.C., (1998). Solutions of Two-Boundary-Value Problems Using the Differential Transform Method. Journalof Optimization Theory and Application, 99, 23-35.
3. Yu, L.T. and Chen, C.K., (1998a). The Solution of the Blasius Equation by the Differential Transformation Method. Math. Comput. Model, 28(1), 101–11.
4. Yu, L.T. and Chen, C.K., (1998b). Application of Taylor Transformation to Optimize Rectangular Fins with Variable Thermal Parameters. Applied Mathematical Modeling, 22, 11-22.
5. Jang, M.J., Chen, C.L., and Liy, Y.C., (2000). On Solving the Initial-Value Problems Using the Differential Transformation Method, Appl Math Comput, 115, 145–160.
6. Jang, M.J., Chen, C.L., and Liu, Y.C., (2001). Two-Dimensional Differential Transform for Partial Differential Equations, Appl Math Comput,121, 261–70.
7. Kuo, B.L. and Chen, C.K., (2003). Application of a Hybrid Method to the Solution of the Nonlinear Burger's Equation, J Appl Mech Trans ASME, 70, 926–929.
8. Ayaz, F., (2004). Solutions of the System of Differential Equations by Differential Transform Method. Applied Mathematics and Computation, 147, 547-567.
9. Arikoglu, A. and Özkol, İ., (2006). Solution of difference equations by using differential transform method, Applied Mathematics and Computation, 174, 1216-1228.
10. Chen, C.K. and Ju, S.P., (2004). Application of Differential Transformation to Transient Advective-Dispersive Transport Equation. Applied Mathematics and Computation, 155, 25-38.
11. Chu, H.P. and Chen, C.L., (2008). Hybrid Differential Transform and Finite Difference Method to Solve the Nonlinear Heat Conduction Problem, Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13, 1605-1614.
12. Chu, H.P. and Lo, C.Y., (2008). Application of the Hybrid Differential Transform- Finite Difference Method to Nonlinear Transient Heat Conduction Problems. Numerical Heat Transfer, Part A, 53, 295-307.
13. Ravi Kanth, A.S.V. and Aruna, K., (2008). Differential transform method for solving linear and non-linear systems of partial differential equations. Physics Letters A 372, 6896–6898.
14. http://eqworld.ipmnet.ru/eqarchive/view.php?id=113.