ISSN:1306-3111
e-Journal of New World Sciences Academy
2011, Volume: 6, Number: 4, Article Number: 3A0042

H. Eray Çelik[1]
Sinan Saraçlı[2]
Veysel Yılmaz[3]
Yuzuncu Yıl University[1]
Afyon Kocatepe University[2]
Eskisehir Osmangazi University[3]
ecelik@yyu.edu.tr
Van-Turkey

PHYSICAL SCIENCES
Received: March 2011
Accepted: October 2011
Series : 3A
ISSN : 1308-7304

YAPISAL EŞİTLİK MODELLEMESİNDE ÇOK DEĞİŞKENLİ NORMALLİK VARSAYIMI ALTINDA BİR UYGULAMA

ÖZET

Yapısal Eşitlik Modellemesinde, modele ilişkin tahmini kovaryans matrisinin gözlenen kovaryans matrisine eşit ise kurulan model gözlenen veriye uygundur. Bir model belirlenmiş ve gözlenen kovaryans matrisi de biliniyorsa, parametre tahminleri için uygun bir metot seçilebilir. Farklı tahmin metotlarının farklı dağılımsal varsayımlara sahip olduğu bilinmektedir. Bir tahmin süreci kabul edilebilir bir çözüme yakınsadığında, modelin uyumunun değerlendirilmesi gerekmektedir. Model uyumu kavramı YEM'in örneklem verisine uygunluğunun derecesini tanımlar. Bu çalışmada teorik bir model yardımıyla farklı örneklem büyüklükleri için 3 tahmin metodunun sonuçları çok değişkenli normallik varsayımı altında karşılaştırılmıştır.
Anahtar Kelimeler: Yapısal Eşitlik Modellemesi, Tahmin Metodu, R, LISREL, Normallik Varsayımı

AN APPLICATION OF STRUCTURAL EQUATION MODELING UNDER THE ASSUMPTION OF MULTIVARIATE NORMALITY

ABSTRACT

In structural equating modeling, the planned model fits the observed variables when the estimated covariance matrix of the model is equal to observed covariance matrix. İf there is a model and the covariance matrix of it is known, a suitable method can be chosen for parameter estimations. It's known that different estimation methods have different distributional assumptions. When an estimation process converges to an acceptable solution, the fit of the model must be utilized. The model fit concept, determines the fit level of the SEM to the sample data. In this study for different sample sizes the results of 3 estimation method is compared under normality assumption via a theoretical model.
Keywords: Structural Equation Modeling, Estimating Method, R, LISREL, Assumption of Normality

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Yapısal Eşitlik Modellemesi (YEM), istatistiksel bağımlılığa dayalı modellerle ilgili bütünleşik hipotezler içindeki değişkenlerin sebep-sonuç ilişkisini açıklayabilen ve kuramsal modellerin bir bütün olarak test edilmesine olanak veren etkili bir model test etme ve geliştirme yöntemidir. YEM modelleri araştırmacılara, değişkenler arasında doğrudan ve dolaylı etkileri belirleme olanağı sağlamaktadır YEM kuramsal yapılar arasındaki etkileşimleri, yapılara ölçme hatalarını ve hatalar arasındaki ilişkileri dâhil ederek modelleyen çok değişkenli istatistiksel bir yaklaşımdır. YEM, eşanlı eşitlik modelleri veya çok değişkenli regresyon modelleri olarak ta tanımlanmaktadır [1, 2 ve 3]

YEM, kovaryans yapı analizi olarakta ele alınmaktadır. Yapısal eşitlik modellesin de yer alan diğer yaklaşımların aksine (PLS – PM, vb.) örneklemden elde edilen varyans-kovaryans matrisinin ana kütleyi temsil edip etmediğini bir dizi uyum ölçütü kullanarak kararlaştırır. Bu yaklaşım LISREL yaklaşımı olarakta adlandırılmaktadır. Genel YEM için temel hipotez;

$$\Sigma = \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \tag{1}$$

dir. Burada Σ, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$'nin ana kütle kovaryans matrisidir. $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta}$' daki serbest model parametrelerinin bir fonksiyonu gibi yazılan kovaryans matrisidir. $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$'nın Σ ile ilişkisi, model uyumunun değerlendirilmesinin, tahmininin ve tanımlanmasının anlaşılması için temel oluşturmaktadır [1,4,5 ve 6].

$\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ üç parçadan oluşmaktadır; (1) $\mathbf{y}$'nin kovaryans matrisi, (2) $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$'nin kovaryans matrisi, (3) $\mathbf{x}$'in ana kütle kovaryans matrisidir. Bu üç parça açık bir biçimde yazıldığında, modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi elde edilir;

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy}(\boldsymbol{\theta}) & \Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) \\ \Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) & \Sigma_{xx}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathrm{I}-\mathbf{B})^{-1}\left(\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi\right)(\mathrm{I}-\mathbf{B})^{-1'} & (\mathrm{I}-\mathbf{B})^{-1}\,\Gamma\Phi \\ \Phi\Gamma'\,(\mathrm{I}-\mathbf{B})^{-1'} & \Phi \end{bmatrix} \tag{2}$$

1.1. Yapısal Eşitlik Modellemesi ve Tahmin (Structural Equation Modelling and Estimation)

Tahmin süreçleri, yapısal parametreler için gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisinin ilişkilerinden türetilir. Model uyumu kavramı YEM' in örneklem verisine uygunluğunun derecesini tanımlar. [1, 4 ve 7]. YEM' de modelleme süreci; kovaryans yapısı ile belirlenmiş gizil ve gözlenen değişkenlerin ilişkilerinin, path diyagramında kullanılan modelin belirlenmesiyle başlar. Bunu takip eden model belirleme süreci, modelin tanımlı olup olmadığının kararlaştırılmasıdır. Bu süreç oldukça zordur, model tanımlaması için gerekli koşul olmaksızın bu süreç geliştirilemez [8]. Verilen tanımlanmış bir modelde öncelikle YEM için $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$' deki model parametreleri tahmin edilmelidir. $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$' deki model parametreleri tahmin etmek için, $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$'nın örneklem tahmini $\mathbf{S}$'nin elde edilmesi ve $F\left(\mathbf{S}, \Sigma(\boldsymbol{\theta})\right) \geq 0$ sürekli fonksiyonunun skalar hatasını verecek uyum fonksiyonu seçilmelidir. $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$'daki minimize edilmiş uyum fonksiyonu, $\hat{\Sigma}$' e göre $\mathbf{S}$'nin uyumunun yakınlığının bir ölçüsü olan

$F\left(\mathbf{S},\hat{\Sigma}\right)$ gibi gösterilen $\Sigma\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)=\hat{\Sigma}$ deki uyum fonksiyonunun değeridir. $\mathbf{S}=\hat{\Sigma}$ için, uyum fonksiyonu sıfır olarak tanımlanır. Bu nedenle $\mathbf{S}-\hat{\Sigma}$ yaklaşık olarak sıfır olmalıdır.

YEM doğru olarak belirlendiğinde ve gözlenen değişkenler çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğunda, benzer asimptotik özelliklere sahip farklı tahmin süreçleri kullanılarak analitik olarak türetilebilir [1,7 ve 9]. İdeal koşullarda tahmin modelinin seçimi tamamen isteğe bağlıdır. Fakat daha gerçekçi koşullarda model tamamen ya da yetersiz olarak belirlendiğinde ve veriler çok değişkenli normal dağılmıyorsa farklı tahmin süreçleri aynı optimum sonuçları vermeyebilir. Eğer değişkenlerin tamamı aralıklı bir ölçekle ölçülmüş, değişkenler normal dağılımlı ve örneklem büyüklüğü yeterince geniş ise çözümlemede en çok olabilirlilik metodu (EO) kullanılmalıdır. Çünkü bu metot normallik varsayımlarının ihlali karşısında göreceli olarak robusttır. Robust EO tahmini bir alternatif olarak kullanılabilir fakat Robust EO göreceli olarak büyük bir örnekleme ihtiyaç duymaktadır ve bu örneklem büyüklüğü en azından 400 olmalıdır $\left(N\geq 400\right)$ [7].

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICANCE)

YEM' de genel olarak kullanılan tahmin metotları; En Çok Olabilirlilik (EO), Ağırlıklandırılmamış En Küçük Kareler (EKK), Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (GEKK) ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler (AEKK) metotlarıdır. Regresyon ve ekonometrik süreçler ile benzer biçimde, gözlenen değişkenli YEM'ler için diğer tahmin ediciler aynıdır. Olağan En Küçük Karelerin (OEKK) yinelemeli modeller için kullanılması uygundur. Yinelemesiz modeller için, İki Aşamalı En Küçük Kareler (2EKK) çok yaygın biçimde kullanılan bir tahmin sürecidir. Üç Aşamalı En Küçük Kareler (3EKK) ve Tam Bilgili En Çok Olabilirlik (TBEO) süreçleri de kullanılmaktadır (1,4,10,11 ve 12]. Normallik varsayımının sağlandığı durumlarda YEM' e ilişkin yazında ağırlıklı olarak EO tahmin edicileri kullanılmaktadır. Bununla birlikte normallik varsayımı altında EO tahmin edicilerine bir alternatif olarak sıklıkla GEKK ve EKK' da kullanılmaktadır. Bu çalışmada normallik varsayımı altında YEM ile bir uygulama yapılmıştır.

3. YÖNTEM (METHOD)

3.1. En Çok Olabilirlik Metodu (Maximum Likelihood Method)

Genel YEM'ler için en yaygın olarak kullanılan uyum fonksiyonu EO fonksiyonudur. EO metodu $\boldsymbol{\theta}$ parametresi tahmin edilirken, EO fonksiyonunun en büyüklenmesi durumudur. EO metodu kullanılırken, modelde yer alan değişkenlerin gözlem değerlerinin çok değişkenli normal dağılım gösterdiği varsayılır. YEM' de modele ilişkin varyans-kovaryans matrisi tanımlı hale geldikten sonra, EO fonksiyonu içindeki yerini alarak modele ilişkin parametrelerin tahmin sürecinde kullanılmaktadır. Modelle ilişkili olarak elde edilen kovaryans matrisinin ana kütle parametrelerinden sapma düzeyi, parametrelerin tahminlenmesinde kullanılan yönteme göre hesaplanan bir uyum fonksiyonu ile belirlenmektedir. Bu metot, modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi $\Sigma\left(\boldsymbol{\theta}\right)$'nın geçerliliği için bir ana kütleden hareketle gözlenen kovaryans matrisi $\mathbf{S}$'nin L olabilirliliğini en büyükleyen $\boldsymbol{\theta}$ parametreleri için ilgili tahminleri elde etmektedir [1, 4 ve 7]. $\log L$'nin en büyüklenmesi için, *log - olabilirlik* (benzerlik) fonksiyonu;

$$\log L = -\frac{1}{2}(N-1)\left\{\log\left|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right| + tr\left[\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\right]\right\} + c \quad (3)$$

burada, $\log$, doğal logaritma, L olabilirlik fonksiyonu, N örneklem büyüklüğü, $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörü, $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi ve c Wishart dağılımının terimlerini içeren bir sabittir.

F_{EO}, tahmin sonuçlarını değerlendirmede kullanılan uyum fonksiyonunun değeridir [1]. F_{EO} eşitlik aşağıdaki gibidir:

$$F_{EO} = \log\left|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right| + tr\left(\mathbf{S}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right) - \log\left|\mathbf{S}\right| - (p+q) \quad (4)$$

Genellikle $\Sigma(\theta)$ ve **S**'nin pozitif tanımlı olduğu varsayılmaktadır. $\hat{\Sigma} = \mathbf{S}$ olduğunda, F_{EO} değeri sıfırdır. Eşitlik (4)' te $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ için $\hat{\Sigma}$ ve $\hat{\Sigma} = \mathbf{S}$ yazılırsa, bu durumda,

$$F_{EO} = \log\left|\mathbf{S}\right| + tr(\mathbf{I}) - \log\left|\mathbf{S}\right| - (p+q) \quad (5)$$

olur, burada $tr(\mathrm{I}) = p + q$, F_{EO} sıfırdır.

EO kestiricileri modeldeki değişkenlerin çok değişkenli normal dağılımdan geldiğini varsayar. Ayrıca $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ ve **S**'nin pozitif tanımlı olduğu varsayılır. Bu matrisler tekil olmayandır. Bir matrisin tersi elde edilebiliyorsa ve bu matrisin determinantı sıfırdan farklı ise matrisin rankının tam olduğu yani tekil olmadığı belirtilir. *EO* kestiricileri bir kaç önemli özelliğe daha sahiptir. Eğer gözlenen veri çok değişkenli normal dağılımdan gelmiş, model doğru olarak belirlenmiş ve örneklem yeterince büyük ise, *EO* parametre tahminlerinin ve standart hatalarının; asimptotik olarak yansız, tutarlı ve etkin olmasını sağlar [1 ve 7]. Ayrıca bir kestiricinin dağılımı örneklem büyüklüğünün artmasıyla normal dağılma yakınsar. Bu yakınsama süreci sonucunda tahmin edilen parametrelerin standart hataları, büyük örneklemlerde z-*dağılımına* yakınsamaktadır (Bollen, 1989).

EO'nun önemli bir avantajı fazla tanımlanmış modeller için tüm modelin değerlendirilmesine dair biçimsel (formal) bir istatistiksel testin kullanılmasına olanak sağlamasıdır. $(N-1)F_{EO}$'nun asimptotik dağılımı $s-t$ serbestlik derecesi ile χ^2 dağılımıdır, burada s, **S**'deki artıksız elemanların sayısı ve t serbest parametrelerin sayısıdır. *EO*' in diğer bir avantajı, *EO* ile yapılan tahminler genelde ölçekten bağımsız ve değişmez ölçeklidir. Uyum fonksiyonunun değerleri, kovaryans veya korelasyon matrislerinin analiz edilip edilmediğine veya orijinal yada dönüştürülmüş verilerin kullanılıp kullanılmadığına bağımlı değildir [7 ve 8]

EO tahmininin önemli bir kısıtı, çok değişkenli güçlü bir normallik varsayımına dayanmasıdır. Dağılıma ilişkin varsayımların ihlal edildiği durumlarda, kaçınılmaz olarak ciddi yanlış sonuçların ortaya çıkmasına neden olur. Ancak yinede *EO* normallik varsayımının bozulduğu durumlarda oldukça robusttır (sağlam) [7,13,14 ve 15]. Normal olmayan durumlarda yapılan benzetim çalışmaları, *EO* parametre tahminlerinin tutarlı ancak etkin olmadığını göstermiştir. Model uyumunun bir ölçüsü olarak χ^2 kullanıldığında, modelin reddedilmesinde I. tip hata oranının artmasına neden olmaktadır [7]. Küçük örneklemler baz alındığında *EO* tahminleri için *Bootstrap metodu** bir alternatif olabilmektedir [16].

Normal olmayan durumlarda ilgili hesaplamaları yapabilmek için "*ayarlanmış EO kestiricileri*" geliştirilmiştir. Satorra – Bentler' in ölçeklenmiş χ^2' si gözlenen değişkenlerin dağılımına bakılmaksızın, örneklemin dördüncü dereceden momenti, tahmin metodu ve model temel alınarak hesaplanır [7]. Benzetim çalışmaları sonucunda; Satorra – Bentler ölçeklenmiş χ^2 istatistiği temelinde hesaplanan *EO* kestiricilerinin, EKK kestiricileri ile karşılaştırılmasında göreli olarak daha iyi istatistiksel özelliklere sahip oldukları belirlenmiştir [14 ve 17]. Gözlenen değişkenlerin dağılımının aşırı derecede normal olmadığında, robust standart hatalar en az yanlı olan standart hataları vermektedir.

3.2. Ağırlıklandırılmamış En Küçük Kareler Metodu (Unweighted Least Squares Method)

En küçüklenecek uyum fonksiyonu [1 ve 7];

$$F_{EKK} = \left(\tfrac{1}{2}\right) tr\left\{\left[\mathbf{S} - \Sigma\left(\boldsymbol{\theta}\right)\right]\right\}^2 \tag{6}$$

dir. Burada, $\mathbf{S}$ gözlenen kovaryans matrisi, $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi ve $\boldsymbol{\theta}$ parametrelerin $(t\times 1)$ boyutlu vektörüdür.

F_{EKK}, artık matrisi $\mathbf{S} - \Sigma(\boldsymbol{\theta})$'deki her bir elemanın kareleri toplamının bir buçuk katıdır. Olağan En Küçük Karelere (OEKK) benzerliği çok açıktır. OEKK' da artıkların kareleri toplamı en küçüklenmektedir. Hata, model tarafından elde edilmiş bir tahmin ve gözlenen bağımlı değişken arasındaki uyumsuzluktur. F_{EKK} ile artık matrisindeki her bir elemanın kareleri toplamı en küçüklenir [1,4 ve 7]. $\boldsymbol{\theta}$'nın tanımlanmış olması, EKK, EO ve GEKK ile karşılaştırıldığında; gözlenen değişkenlerin sahip olduğu özel bir dağılıma ilişkin varsayımlara bakmaksızın tutarlı bir kestiricisinin elde edilmesini sağlar. EKK'nın dezavantajı ise $\boldsymbol{\theta}$ için asimptotik olarak daha etkin tahminler sağlamamasıdır. Tahminleri ne ölçekten bağımsız ne de değişmez ölçeklidir. F_{EKK}'nın değerleri, kovaryans matrisleri yerine korelasyon matrisi analiz edildiğinde farklılık göstermektedir [1].

3.3. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Metodu (Generalized Least Squares Method)

EKK'nın odağı gözlenen ve tahmin edilen kovaryanslar iken, OEKK tek tek gözlemler için tahmin edilen ve gözlenen y'leri ele almaktadır. EKK'nın bir problemi, artıkların tüm elemanlarının diğer elemanlar ile aynı varyanslara ve kovaryanslara sahipmiş gibi ağırlıklandırılmasıdır. Bu durum, bir regresyon eşitliğinden

* Herhangi büyüklükte bir veri setinde gözlemlerin rassal olarak yer değiştirilmesi ile yeniden örneklenerek çeşitli miktarda ve büyüklükte veri setleri oluşturulabilmektedir. Böylece, mevcut veri setinden mümkün olabildiğince fazla miktarda bilgi alınabilmektedir.

hareketle artıklar değişen varyanslı veya otokorelasyonlu olduğunda OEKK' nın yanlış uygulamalarına benzemektedir. Regresyon analizinde çözüm GEKK'nın kullanılmasıdır. GEKK, diğer elemanlar ile onların varyans ve kovaryanslarına göre artıklar matrisinin elemanlarını ağırlıklandırır. F_{GEKK} aşağıdaki gibidir [1];

$$F_{GEKK} = \left(\tfrac{1}{2}\right) tr\left\{\left[\mathbf{S} - \Sigma(\boldsymbol{\theta})\right]\mathbf{W}^{-1}\right\}^2 \quad (7)$$

burada, tr matrisin izi, $\mathbf{S}$ gözlenen kovaryans matrisi, $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi, $\boldsymbol{\theta}$ parametrelerin $(t\times1)$ boyutlu vektörü ve $\mathbf{W}^{-1}$ artıkların bir $p\times p$ boyutlu ağırlık matrisidir.

Ağırlık matrisi $\mathbf{W}^{-1}$, ya rassal bir matristir ya da sabitlerin pozitif tanımlı bir matrisidir. F_{EKK}, F_{GEKK}'nin özel bir durumudur, burada $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$ dir. F_{EO} ve F_{EKK} gibi F_{GEKK}'dan elde edilen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta}$'nın tutarlı bir tahmin edicisidir. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$'nın asimptotik dağılımı, bilinen bir asimptotik kovaryans matrisi ile çok değişkenli normaldir. $\mathbf{S}$'nin elemanları hakkında yapılan iki varsayım, doğru bir biçimde ağırlıklandırılmış $\mathbf{W}^{-1}$ matrisinin seçilmesi için basit bir koşulun ve GEKK $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ için optimal özelliklerin belirlenmesini sağlamaktadır. Bu varsayımlar: (1) $E\left(s_{ij}\right) = \sigma_{ij}$ ve (2) $\mathbf{S}$'nin elemanlarının asimptotik dağılımı, $N^{-1}\left(\sigma_{ig}\sigma_{jh} + \sigma_{ih}\sigma_{jg}\right)$' ye eşit olan s_{ij} ve s_{gh} asimptotik kovaryansları ve σ_{ij}'nin ortalamaları ile çok değişkenli normal olduğudur. Anahtar varsayım $ACOV\left(s_{ij}, s_{gh}\right) = N^{-1}\left(\sigma_{ig}\sigma_{jh} + \sigma_{ih}\sigma_{jg}\right)$ dir. Eğer $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ çok değişkenli normal dağılmışlar ise bu varsayım yeterlidir. Yukarıda verilen iki varsayımda sağlanıyor ise $\mathbf{W}^{-1}$ $p\lim \mathbf{W}^{-1} \neq c\Sigma^{-1}$ olacak şekilde seçilmelidir. GEKK tahmin edicisi asimptotik çok değişkenli normal dağılıma sahiptir ve asimptotik olarak etkindir. F_{GEKK}' dan elde edilen $\hat{\theta}$'nın asimptotik kovaryans matrisi, $p\lim \mathbf{W}^{-1} \neq c\Sigma^{-1}$' in gerçek olduğu durumdan daha basit biçimde elde edilir. $\hat{\theta}$'nın asimptotik kovaryans matrisi, bilgi matrisinin beklenen değerinin tersinin $\left(2/(N-1)\right)$ ile çarpımıdır: $\left(2/(N-1)\right)\left[E\partial^2 F_{GEKK} / \partial\theta\partial\theta'\right]^{-1}$ [1 ve 4].

GEKK ağırlık matrisi olarak örneklem kovaryans matrisini kullanır ve $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}$:

$$F_{GEKK} = \left(\tfrac{1}{2}\right) tr\left\{\left[\mathbf{S} - \Sigma(\boldsymbol{\theta})\right]\mathbf{S}^{-1}\right\}^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right) tr\left\{\left[\mathbf{I} - \Sigma(\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{S}^{-1}\right]^2\right\} \quad (8)$$

burada, tr, matrisin izi, $\mathbf{S}$, gözlenen kovaryans matrisi, $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$, modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi $\boldsymbol{\theta}$, parametrelerin $(t\times1)$ boyutlu vektörüdür.

F_{GEKK}, F_{EO} gibi ölçekten bağımsız ve değişmez ölçeklidir. F_{GEKK}'nın ek bir yararı; model doğru olduğunda asimptotik bir ki-kare dağılımına sahip sonuç tahminlerinin $(N-1)\,F_{GEEK}$ ile değerlendirilmesine imkân sağlamasıdır. Burada serbestlik derecesi $(1/2)(p+q)(p+q-1)$ dir. GEKK sıklıkla kullanılan ve asimptotik olarak F_{EO}' ya eşit bir tahmin metodudur (Bollen, 1989). GEKK, EO ile aynı varsayımları temel alır ve aynı koşullar altında uygulanır. Ancak EO küçük örneklemlerde tercih edilse de, GEKK küçük örneklemlerde daha az performans göstermektedir. Büyük örneklemlerde $(N-1)\,F_{GEEK}$, bir ki-kare rassal değişkenine yakınsar. Eğer model geçerli ise, $(N-1)\,F_{GEEK}$ ve $(N-1)\,F_{EO}$ büyük örneklemlerde asimptotik olarak eşittirler [1 ve 7].

4. UYGULAMA (APPLICATION)

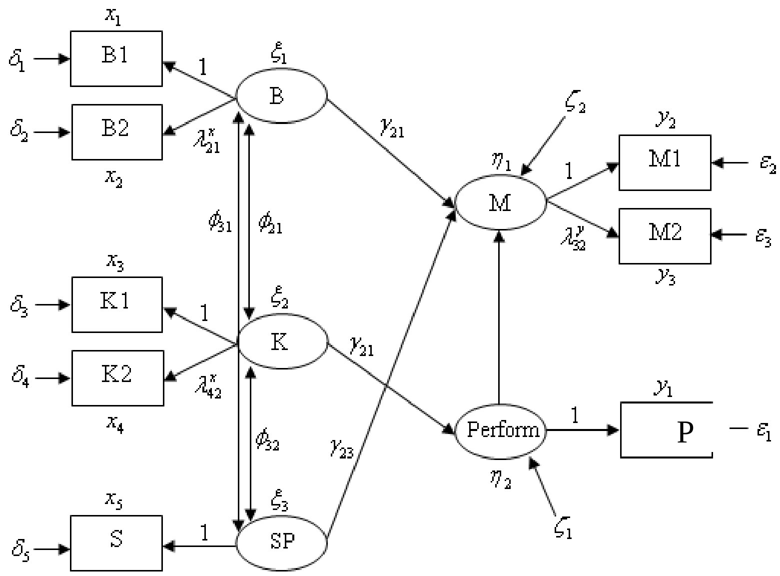
Bagozzi'nin (1980) performans ve memnuniyet arasındaki nedensel ilişkilerin belirlenmesi için oluşturduğu model, Şekil 1'de matematiksel gösterimleriyle verilmiştir [18]. Bagozzi'nin 122 gözlem sonucunda, gözlenen değişkenlere için verdiği korelasyon katsayıları matrisi kullanılarak R programında 100, 200, 300, 400 ve 500 birimlik çok değişkenli normallik varsayımını sağlayan veri türetilmiştir. Türetilen veri setlerinin çok değişkenli normallik varsayımını sağlayıp sağlamadığı Mardia'nın çok değişkenli normallik testi ile araştırılmış ve farklı örneklem büyüklükleri için türetilen veri setlerinin istatistiki olarak çok değişkenli normallik varsayımını sağladığını karar verilmiştir. Çok değişkenli normallik varsayımını sağlayan 5 gizil (latent) ve 8 gözlenen değişkene sahip modelin uygunluğunun araştırılmasında, EO, OEKK ve GEKK tahmin yöntemleri kullanılarak, elde elden sonuçların istatistiksel anlamlılıkları tartışılmıştır. 3 farklı tahmin metodunun kullanılırken elde edilen tahminler 250 ve daha üzeri iterasyonla elde edilmiştir. Aşağıda sırasıyla modelde yer alan gözlenen ve latent değişkenler verilmiştir.

- **Gözlenen değişkenler:**
    - Performans Ölçüsü (P)
    - İş memnuniyeti ölçüsü - 1 (M1)
    - İş memnuniyeti ölçüsü - 2 (M2)
    - Başarı motivasyonu ölçüsü -1 (B1)
    - Başarı motivasyonu ölçüsü -2 (B2)
    - Benlik kaygısı ölçüsü -1 (K1)
    - Benlik kaygısı ölçüsü -1 (K2)
    - Sözel performans ölçüsü (S)

- **Latent Değişkenler**
    - Performans (Perform)
    - İş memnuniyeti (M)
    - Başarı motivasyonu (B)
    - Benlik kaygısı (K)
    - Sözel performans (SP)

Tablo 1. Bagozzi'nin modelindeki gözlenen değişkenlerin korelasyonları
(Table 1. The correlatins of the observed variables in Bogozzi's model)

Değişken	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P	1.000							
M1	0.418	1.000						
M2	0.394	0.627	1.000					
B1	0.129	0.202	0.266	1.000				
B2	0.189	0.284	0.208	0.365	1.000			
K1	0.544	0.281	0.324	0.201	0.161	1.000		
K2	0.507	0.225	0.314	0.172	0.174	0.546	1.000	
S	-0.357	-0.156	-0.038	-0.199	-0.277	-0.294	-0.174	1.000



Şekil 1. Bagozzi'nin kuramsal yapısal eşitlik modeli
(Figure 1. The structural equation model of Bogozzi)

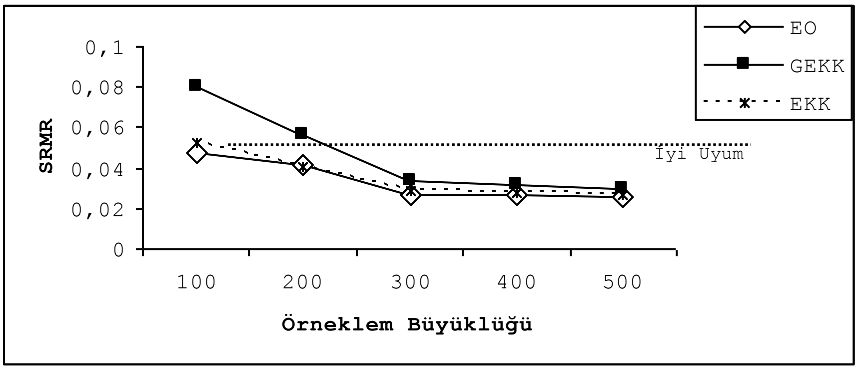
Üç fraklı tahmin metoduyla elde edilen sonuçların örneklem büyüklükleri itibariyle karşılaştırılması için "Standartlaştırılmış Hata Kareleri Ortalamasının Karekökü" (SRMR) ve "Mutlak Bağıl Hata Ortalaması" (MBHO) kullanılmıştır. Hatalar $\mathbf{S} - \Sigma(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ matrisinin elemanları olarak tanımlanmaktadır. Değişkenlere ait ölçek verilmeksizin elde edilen bir hata kareleri ortalamasının karakökü değerinin iyi veya kötü uyumu gösterip göstermediğini değerlendirmek olanaksızdır. Bu problemin çözümlenebilmesi için SRMR kullanılmaktadır (Schermelleh-Engel and Moosbrugger, 2003). $s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}$ hataları öncelikle belirgin değişkenlere ait $s_i = \sqrt{s_{ii}}$ ve $s_j = \sqrt{s_{jj}}$ standart sapmalarına bölünür. Bu işlem $\left(s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}\right) / \left(s_i s_j\right) = r_{ij} - \hat{\sigma}_{ij} / \left(s_i s_j\right)$ elemanları ile bir standartlaştırılmış hata matrisinin elde edilmesini sağlamaktadır. r_{ij} değişkenler arasındaki gözlenen korelasyondur. Burada sıfır değeri mükemmel bir uyumu göstermektedir ancak bunun yanlış belirlenmiş modellerin duyarlılığı ve örneklem büyüklüğüne bağlılığından dolayı kabul edilebilir veya iyi bir uyum için yetersiz olduğunu belirlemek oldukça zordur. SRMR değeri, 0.05 değerinden küçük olduğunda iyi bir uyumun, 0.10'dan küçük olduğunda ise kabul edilebilir bir uyumun işareti olarak yorumlanır. SRMR, Bu ölçüler **S** ve $\Sigma\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ arasındaki uyumsuzluğun yönü hakkında bir bilgi vermemektedirler [7 ve 14]. Diğer bir ölçüt olan MBHO ise yanlı parametre kestiricilerinin karşılaştırılmasında kullanılmaktadır. Bunun için öncelikle kestirici bağıl yanlılığının hesaplanması gerekmektedir. $\hat{\theta}_j$ kestiricisinin bağıl yanlılığı;

$$B\left(\hat{\theta}_j\right) = \frac{\hat{\theta}_j - \theta_j}{\theta_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, t \tag{9}$$

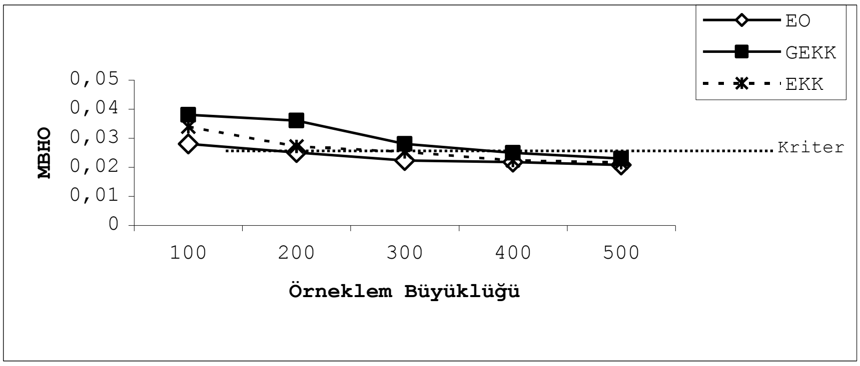
ile elde edilir. Buna göre MBHO ise;

$$MBHO\left(\hat{\theta}_j\right) = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\left|B\left(\hat{\theta}_j\right)\right| < 0,025 \tag{10}$$

Bir parametre kestiricisinin MBHO’ sunun 0,025’ ten küçük olması istenir [14]. Aşağıda yer alan Şekil 2 ve Şekil 3’ te sırasıyla SRMR ve MBHO ölçütleri itibariyle tahmin metotları için elde edilen değerler verilmiştir.



Şekil 2. SRMR Sonuçları
(Figure 3. Results of SRMR)



Şekil 3. MBHO Sonuçları
(Figure 3. Results of MARB)

Tablo 2. Farklı örneklem büklükleri için sonuçlar
(Table 2. Results for the different sample sizes)

Örneklem Büyüklüğü	Tahmin Metodu					
	EO		GEKK		OEKK	
	SRMR	MBHO	SRMR	MBHO	SRMR	MBHO
100	+	–	–	–	–	–
200	+	+	–	–	+	–
300	+	+	+	–	+	+
400	+	+	+	+	+	+
500	+	+	+	+	+	+

Yapılan analiz sonucu itibariyle EO metodunun tüm örneklem büyüklüklerinde SRMR içim iyi uyum (+) koşulunu sağladığı belirlenmiştir. OEKK metodu 200 örneklem büyüklüğü ile birlikte EO ile SRMR açısından benzer sonuçlar vermiştir. GEKK için 300 ve üstü örneklemlerde SRMR < 0,05 sonucu elde edilmiştir. MBHO açısından tüm metotlar 100 örneklem büyüklüğü için karar ölçütü kriterini sağlayamamıştır (-). EO, 200 ve üstü, EKK 300 ve üstü, GEKK 400 ve üstü örneklem büyüklükleri için MBHO < 0,025 kriterini sağlamışlarıdır (+).

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

LISREL yaklaşımı varyans-kovaryans temelli bir yaklaşım olduğu için kullanılan tahmin metodu sonucunda örneklemden elde edilen varyans-kovaryans matrisi ile tahmini varyans –kovaryans matrisi arasındaki farkın sıfıra eşit olması beklenmektedir. Etkin tahmin metodunun seçiminde örneklem büyüklüğü önemli bir kriterdir. Örneklem büyüklüğü sadece değişkenlerin dağılımına bağımlı değildir (normal olmayan veri söz konusu olduğunda daha büyük bir örnekleme ihtiyaç duyulur). Bundan başka modelin büyüklüğü, göstergelerin sayısı, kayıp verinin miktarı, değişkenlerin güvenirliliği ve değişkenlerin arasındaki ilişkinin gücüne de bağlıdır. Doğru bir biçimde belirlenmiş modeller ve çok değişkenli normal dağılmış veri için yapılan benzetim çalışmaları sonucunda, makul örneklem büyüklüğünün 150 [15] veya 200 [14 ve 19] olması gerektiği belirlenmiştir. F_{EO} uyum fonksiyonu gözlenen değişkenlerin çok değişkenli normal dağılımdan türetilmektedir. F_{EO} veya F_{GEKK} fonksiyonları, gözlenen değişkenlerin dağılımı aşırı basıklığa sahip olmadığında doğru olmaktadır. Çoklu normal değişkenler için EO ve GEKK tahmin edicileri asimptotik olarak etkindir. Genellikle asimptotik kovaryans matrisi ve ki-kare tahmin edicisi kullanılmaktadır. Bu durum marjinal ve çok değişkenli dağılımların basıklığı çok değişkenli bir normal dağılımın basıklığı ile aynı olduğu zaman ortaya çıkmaktadır. Daha açık bir anlatımla gözlenen değişkenler aşırı basıklığa sahip değildirler. Gözlenen değişkenler aşırı basıklığa sahip olduklarında (normal dağılıma göre) sadece tahmin edicinin tutarlılığı sağlanmış olunur [1]. Eliptik dağılımlar çarpıklığı olmayan dağılımlardır ve her bir gözlenen değişken için aynı basıklık derecesine sahiptirler. Eliptik dağılımlar için en küçüklenen F_{EO} asimptotik olarak etkindir. Ancak F_{EO}' yu temel alan asimptotik kovaryans matrisi, standart hatalar ve ki-kare tahmin edicisi yanlıştır. Gözlenen değişkenler keyfi bir dağılıma sahip olduğunda F_{EO} veya F_{GEKK} den hareketle $\hat{\theta}$ asimptotik olarak etkin değildir.

Çalışma sonucunda elde edilen bulgular çok değişkenli normallik varsayımı altında model tek gözlenen değişkene sahip latent değişkenler olduğunda kullanılan 3 farklı metottan en çok olabilirlilik metodunun daha etkin ve tutarlı olduğu belirlenmiştir. Örneklem hacmi genişledikçe 3 tahmin metodu sonucu elde edilen sonuçların bir birine yakın değerler almaya başladığı ve küçük örneklemlerde etkin olmayan diğer iki tahmin metodunun EO ile aynı asimptotik etkinliği yansıttığı belirlenmiştir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Bollen, K.A., (1989). Structural Equations with Latent Variables, Wiley, New York, pp:(514).
2. Fox, J., (2006). An introduction to structural equation modeling, Lecture Notes, MCMaster University, Canada, pp:(130) (unpublished).
3. Schumacker, R.E. and Lomax, R.G., (2004). A beginner's guide to structural equation modeling second edition, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp:(498).
4. Hayduk, L.A., (1987). Structural Equation Modeling with LISREL: Essentials and Advances, Johns Hopkins University Press, Baltimore, pp:(405).
5. Byrne, B.M., (1998). Structural Equation Modeling with LISREL, PIRELIS and SIMPLIS: Basic Concepts, Applications, and Programming, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, pp:(412).
6. Raykov, T. and Marcoulides, G.A., (2006). A first course in structural equation modeling, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp:(238).
7. Schermelleh-Engel, K., Moosbrugger, H., and Müller, H., (2003). Evaluating the fit of structural equation models: Test of significance and descriptive goodness-of-fit measures, Methods of Psychological Research - Online, 8(2),pp:(23-74).
8. Timm, H.N., (2002). Applied Multivariate Analysis. Springer – Verlag New York, pp:(720).
9. Joreskog, K.G. and Sorbom, D., (1981). LISREL V: Analysis of linear structural relationships by maximum likelihood and least squares methods Research Report, Uppsala, Sweden: University of Uppsala, Department of Statistics, pp:(81-89).
10. Loehlin, J.C., (2004). Latent Variable Models: An introduction to factor, path, and structural analysis, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp:(317).
11. Golob, T.F., (2003). Structural equation modeling for travel behavior research, Transportation Research, B - Methodological, 37, pp:(1-25).
12. Kline, B.R., (2005). Principles and practice of structural equation modeling, Second Edition, The Guilford Press, New York London, pp:(385).
13. Curran, P.J., West, S.G., and Finch, J.F., (1996). The robustness of test statistics to nonnormality and specification error in confirmatory factor analysis, Psychological Methods, 1,pp:(16–29).
14. Boomsma, A. and Hoogland, J.J., (2001). The robustness of LISREL modeling revisited, Structural Equation Modeling: Present and Future, Cudeck, R., du Toit, S., and Sorbom, D., (Eds.), Scientific Software International, Chicago, pp:(139–168).
15. Muthén, L.K. and Muthén, B.O., (2002). How to use a Monte Carlo study to decide on sample size and determine power, Structural Equation Modeling, 4, pp:(599–620).
16. Shipley, B., (2004). Cause and Correlation in Biology, University Press, Cambridge, pp:(317).

17. Yang-Wallentin, F. and Joreskog, K.G., (2001). Robust standard errors and chi-squares for interaction models, New developments and techniques in structural equation modeling, G.A. Marcoulides and R. E. Schumacker (Eds.), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, pp:(159-171).

18. Yılmaz, V. and Çelik, H.E., (2009). LISREL ile Yapısal Eşitlik Modellemesi - I, Pegem Akademi, Ankara, Türkiye, ISBN: 978-605-4282-00-5.

19. Hoogland, J.J. and Boomsma, A., (1998). Robustness studies in covariance structure modeling: An overview and a meta-analysis, Sociological Methods and Resea rch, 26,pp:(329–367).