KÜMELER KURAMI ÜSTÜNE BAZI GÖZLEMLER

Ahmet İnam*

Necati Öner Hocama sevgiyle...

Kümeler kuramının devindiği sorunlar alanı, kendi alanlarının temelleri üstüne kaygılar taşıyan matematikçilerin oluşturduğu bir alan. 1847'de Bolzano'nun küme, sonsuz küme kavramları 1867-1871 yılları arasında Georg Cantor'un cesur çalışmalarıyla geliştirildi. 1874 yayımlanan Cantor'un makalesi, kümeler kuramının ortaya çıkışında önemli bir adım olarak görülür.[1]

Cantor, çağının ünlü matematik otoritesi Kronecker'in karşı çıkmasına, engellemelerine karşı "sonsuz" kavramı üzerine çalıştı; bu çalışmaları, sayılar kuramının içinden çıkmış sorunlarla bütünleşerek, kümeler kuramının temellerinin kurulmasına yol açtı.

Kümeler kuramının temelleri oluşturulmaya çalışılırken ortaya zengin bir paradokslar kümesi çıktı. 1897'de daha önce Cantor'un da bulduğu söylenen Burali-Forti Paradoksu yayımlandı. 1902'de Russell Paradoksu, aksiyomatik kümeler kuramının oluşumunu gerekli kılan önemli bir paradoks olarak ortaya çıktı. 1908'de Zermela, kümeler kuramının aksiyomatik yapısının oluşturulmasında ilk adımı attı. Fraenkel, von Neumann, Bernays, Gödel, aksiyomatik kümeler kuramının geliştirilmesine önemli katkıda bulunan matematikçiler oldular.

Bugün, kümeler kuramı, "teknik" açıdan, daha yetkin, daha "işlevsel" bir yapıya kavuşturulmaya çalışılırken, kendisine, mühendislikten, iktisada, yapay zekâ çalışmalarına, bilim felsefesine dek geniş bir uygulama alanı bulabilmektedir.

Kümeler kuramı, tartışmalı yanları olmakla birlikte, değişik formal di-

* Prof. Dr., ODTÜ Felsefe Bölümü.

1 J. W. Dauben, "Georg Cantor's Creation of Transfinite Set Theory: Personality and Psychology in the History of Mathematics," *Papers in Mathematics*, New York, 1979, s. 27-44.

siplinlerin içinde tanımlanabildiği bir çalışma alanı oluşturuyor. Bourbaki, 1949'da, tüm matematiksel kuramların, genel bir kümeler kuramının genişletilmiş biçimi olabileceğini, kümeler kuramına dayanarak tüm matematiğin kurulabileceğini savunuyordu. İnsanın soyut düşünme çabasında, mantıksal ilişkiler oluştururken, parça-bütün bağlantılarını anlama uğraşında, kümeler kuramının önemli katkıları olabilir.

Felsefece düşünme çabasında, kümeler kuramı, felsefeye hem bir soyut düşünce dili olarak yardımcı olabilir hem de soyut düşünce örneği olarak kendini felsefenin önüne serer: Felsefî bakışa (örneğin, fenomenolojik yaklaşım açısından), biçimsel (formal) düşünmenin sorunları, yapısı üzerine önemli bir örnek sunar.

***

Nedir Küme? Herhalde, nasıl tanımlanırsa tanımlansın tanımı yapılamayan; bundan dolayı da, sorun çıkarabilecek öğeleri içinde barındıran bir kavram. Bir yandan, sonsuz, "sınırsız" anlamında alınırsa, nasıl "küme" oluşturabilir? Hiçbir elemanı olamayan bir kümeyi küme kılan nedir? Böylesi sorunlar, iş başındaki matematikçi için o denli önemli sayılmayabilir: İçinden çıkamayacağı kavramları "tanımsız" bırakarak (örneğin "$\in$" gibi), aksiyom olarak ileri sürerek (örneğin boş kümenin küme sayılması aksiyomu, örneğin, von Neumann, Gödel, Bernays aksiyomatik sisteminde!) çalışma yapmak olanağı her zaman söz konusu. Kümeler kuramı içinde "paradokslar", "tanımsız", "hesabı verilemeyen", "karanlık" noktalar taşıması açısından üzerinde epeyce çalışılması gerekli bir alan.

Bu çalışmamda, von Neumann, Gödel, Bernays aksiyomatik düzeni içinde ortaya çıkan kimi sorunlara dikkat çekmek istiyorum.[1] Bu sorunlar, teknik olarak bilinen, çözümleri önerilmiş sorunlar olsa bile, felsefe açısından bâzı hatırlatmalar yapmak hem felsefeciler hem de kümeler kuramı üzerine teknik açıdan çalışanlar için düşündürücü olabilir.

Sınıflandırma aksiyomu diye Türkçeleştirebileceğimiz aksiyom:

(1) $\exists y \forall x\, (x \in \leftrightarrow y\ \text{Küm}\, x \wedge Fx)$ biçiminde yazılabilir.

Burada tüm değişkenler bir "sınıf"ı gösteriyor. Sınıf (class) tanımsız bir kavram. Bir ilkel (primitive) terim. Sınıf ve elemanı olma "$\in$", terimleri, sözünü ettiğim sistemde tanımsız terimler. Sınıf terimiyle, küme (set) ve has sınıf (proper class) terimlerini tanımlayabiliriz.

(2) $\text{Küm}\, x \leftrightarrow \exists y\, (x \in y)$

"Küm x", "x, kümedir"in kısaltılmışı; küme en azından bir diğer sınıfın

1 Bu sistemi kullanan derli toplu bir kitap: E. J. Lemmon, *Introduction to Axiomatic Set Theory*, Routledge and Kegan Paul, 1969.

elemanı olabilen bir sınıf. Bir sınıf, ya kümedir ya da has sınıf. "Has sınıf", öyleyse, "Küm x"in değillenmesiyle elde edilebilir; böylece, "Has x" (x has sınıftır) şöyle tanımlanır:

(3) Has $x \leftrightarrow \forall y\,(x \notin y)$

Has sınıflar, hiçbir sınıfın elemanı olmayan sınıflardır. Böyle bir "küme", "has sınıf" ayırımı, ünlü Russell Paradoksunu ortadan kaldırmak için ortaya atılmıştır.

(1)'e tekrar göz atarsak, herhangi bir sınıfın bir başka sınıfa ait olmasıyla iki durum ortaya çıkıyor:

a) Ait olan (eleman olan) sınıf kümedir.

b) F gibi, o kümenin üyeleriyle ortak bir "özellik" taşır!

Örneğin, Fa olsun. Bu tümce bize "a, F dir"i verir. a, F özelliği taşıyorsa, bu durum, a'nın elemanı kümenin tüm üyelerinin F özelliğini taşıdığını gösterir. Başka türlü söylersek:

(4) $\forall x\,(\text{Küm}\,x \wedge Fx \leftrightarrow x \in \{z\colon Fz\})$

Belli bir özellik taşıyan "nesne", kümeler kuramının izlediğimiz aksiyomatik düzeninin diliyle söylersek, belli bir sınıfın elemanı olmak dolayısıyla küme olmak zorundadır. (4)'e dikkat edersek "x" küme olduğunda, F özelliği taşıyabildiğini görüyoruz. Bundan dolayı, "has sınıf"ın özelliği olamaz; yani, ona bir yüklem yüklenemez.

Buradan, değişik dile getirilişleri felsefe tarihinde de tartışılmış bir savı gözden geçirmeye başlayabiliriz. Savı şöyle dile getirelim:

(5) Güzeller kümesi güzel değildir.

Güzeller kümesi, elemanları güzellerden oluşmuş bir kümedir. Neden bu küme güzel değildir? Güzel olsaydı, güzeller kümesinin bir üyesi olurdu. Oysa, güzeller kümesinin içinde güzeller kümesi yok ki!

Bu, kendi kendisinin üyesi olma durumu, izlediğimiz aksiyomatik düzende, *düzenlilik aksiyomu* tarafından yasaklanıyor. Aksiyomu şöyle yazabiliriz:

(6) $\forall x\,[x \neq \Phi \rightarrow \exists y\,(y \in x \wedge x \cap y = \Phi)]$

Bu aksiyoma dayanarak, şu iki teoremi kanıtlama olanağı vardır:

(7) $\forall x\,(x \notin x)$

(8) $\forall x\,\forall y\,(x \in y \rightarrow y \notin x)$

Güzeller kümesinin güzel olmadığının formal yoldan kısa ispatı için (5)'i biçimsel mantık diliyle anlatalım.

(9) $\forall x\,(x = \{z\colon Gz\} \wedge \text{Küm}\,x \rightarrow \neg\, Gx)$

x'in güzel olduğunu varsayarsak (Reductio ad absurdum yöntemiyle!), sınıflandırma aksiyomu ve eşitlik aksiyomunu (ya da "kapsamlılık" aksiyomu - axiom of extensionality-) kullanarak:

(10) $(x \in x \leftrightarrow$ Küm $x \wedge Gx) \wedge$ Küm x elde ederiz. Oysa (7) gereği $x \in x$ yanlıştır; o zaman (10)

(11) $\neg$ (Küm $x \wedge Gx) \wedge$ Küm x'e dönüşür. Oysa, Gx'i varsaymıştık. Gx ve (11) çelişir. Buradan da (9)'un informal, "sezgisel" kanıtını vermiş olduğumuzu söyleyebiliriz.

Peki, nedir, güzeller kümesinin güzel olmadığının anlamı? Bu soru Batı düşüncesinde Platon'a dek götürülebilir.[1] Hepsi de F özelliği taşıyan şeylere bu özelliğini veren bir "F'lik" formu olmalıdır ki, bu sayede nesneleri F özelliğiyle algılayabileyim. Bu form tek olmalıdır. Birden fazla olsaydı (diyelim ki 2) o zaman 3. formu, 4. formu... olurdu. (Platon, *Devlet*, 597c). Form eğer nesnelere benzeseydi, onu da sağlayacak bir başka form gerekecekti, bu da sonsuza dek (ad infinitum) böyle sürüp gidecekti.[2]

Çağımızda, örneğin Heidegger'de "şeyin şeyliğinin" şey olamayacağı ya da varlıkların varlığının varlık olamayacağı savlarıyla farklı bir bağlamda tartışılıyor.[3] Ayrıca, Doğu düşüncesinde örneğin Chuang Tzu tarafından "şeylere şeyliğini verenin kendisinin şey olamayacağı" savı ortaya atılmıştır.[4]

Bir küme kendi kendisinin üyesi olsa ne olur? O zaman kümenin büyüklüğünü "denetlemek", sınırlandırmak zorlaşır. Kümeler kendi kendilerinin elemanı olarak sürekli büyüyebilirler.

Konuya ayrıca yapay zeka sorunları, dilbilim çalışmaları açısından baktığımızda, kendi kendinin içinde kalan "durum"lardan söz edebilme olanağımız var. Bu çalışmaların, felsefe açısından, güzeller kümesinin güzel olmayışı üzerinde ne denli açıklayıcı olduğu tartışmalıdır.[5]

Kümeler kuramı açısından $\forall x\,(x \notin x)$ savı bizi $\forall x\,(x \in x')$ sonucuna götürür. Her küme, tümleyeninin elemanıdır! Size şaşırtıcı gelmiyor mu?

Yeniden 9. sava dönersek, eğer x, güzel değilse $\{x\}$ de güzel değildir!

($\{x\} \notin x$, olduğu için!) x'in üyesi olmayan her küme güzel değildir.

Bir topluluğu oluşturan üyelerin ortak özelliği, o topluluğun özelliğinden

1 Bu konuda Gregory Vlastos'un *Studies in Greek Philosophy*, (Vol. II, Princeton University Press, Princeton, 1995.) adlı kitabında "3. Adam Tartışması" (Third Man Argument) adıyla yapılan tartışmasına bakılabilir. (s. 166-219).

2 Bu tartışmaları izlemek isteyen okur, Platon'un şu diyaloglarına bakabilir: *Timaios* 31a4, *Devlet* 597c, *Parmenides* 132, *Phaedo* 100d, *Protagoras* 329c-332a.

3 *Sein und Zeit*, Max Niemayer, Tübingen, 1927, s. 6.

4 Chuang Tzu, *Das Wahre Buch vom Südlichen Blütenland*, Almancaya çeviren Richard Wilhelm, Düsseldorf/Cologne, 1972.

5 Bkz. Barwise, J. ve Perry, J., *Situations and Attitude*, MIT Press, Cambridge, 1983; Barwise, J., *The Situation in Logic*, Center for the Study of Language and Information, Stanfort, CA, 1989.

neden farklı olsun? Kırmızı nesneler kümesi neden kırmızı olmasın? Kırmızılar aynı kümede olduğu için, onların kümesi de kırmızı olursa, küme kendi içinde olmak zorunda kalacaktır. Oysa düzenlilik aksiyomu gereği, hiç bir küme kendisinin üyesi olamaz. Burada, bir küme, örneğin $\{x: Gx\}$ olarak tanımlanıyorsa, her öğesi G'dir. G' olan her "şey", bu kümenin üyesidir. Bir "şey"in, bu yazıda izlediğimiz aksiyomatik düzen gereği, bir "sınıf"ın, belli bir özellik taşıması, bir diğer sınıfın üyesi olması demektir. Bir şey, bir sınıfın üyesi olarak, o sınıfın üyeleriyle ortak özelliği paylaşır, sınıfın üyeliği, ona özellik kazandırır. Böylece üye olanlar, özellik kazanır, özellik "alır". Üyesi oldukları sınıf onlara özellik "verir". Bir küme üyelerine özellik *verir*, üyeleri kümeden özellik alır. Bir küme kendi kendisinin üyesi olamadığı için üyelerinin özelliğini taşıyamıyor.

***

Bir sınıfın, örneğin iki üyesi güzelse, kesişimleri ya da bileşimleri de güzel midir? Güzellerin kesişimi ya da birleşimi neden güzel olmasın? Sezgisel olarak, ilk adımda söyleyebileceklerimiz, bunların kesişimlerinin de, birleşimlerinin de güzel olacağıdır.

(12) $\forall x\, \forall y\,(\text{Küm}\, x \wedge \text{Küm}\, y \wedge Fx \wedge Fy \rightarrow Fx \cap y \wedge Fx \cup y)$

İlk bakışta (12)'nin doğru olacağı düşünülse de yanlışlayıcı örneği bulunabilir. Örneğin $x = \{\{\Phi\}\}$, $y = \{\Phi\}$ olsun; diyelim ki, ikisi de F özelliği taşıdığı için aynı kümenin, Z'nin elemanı olsun. Z, burada $\{\{\{\Phi\}\}, \{\Phi\}\}$ olarak alınabilir. $x \cap y$, Φ'e eşit olacaktır. $x \cup y$ ise Z'ye. Dikkat edilirse ne Φ ne de Z'nin kendisi Z'nin üyesidir!

Hangi koşullarda, güzeller kümesinin elemanlarının kesişimi ve birleşimi güzel olabilir? Böyle bir kümeye *yetkin* küme diyelim. Eğer Z kümesi yetkinse şu özellikleri taşıyacaktır. (Yetkin kümenin tanımı!)

(13) $\forall z\,[\text{Yet}\, z \leftrightarrow ([\text{Küm}\, z \wedge \cap z \neq \_] \rightarrow [\cap z \in z \wedge \cup z \in z])]$

Bir kümenin yetkin olabilmesi için elemanlarının kesişimi boş olmamalıdır, kesişim boş değilse, birleşim de boş değildir; böyle bir kümede elemanların kesişimi ve birleşimi de kümenin elemanıdırlar. İşte bir küme yetkinse, elemanlarının taşıdığı özellik, kesişimleri ve birleşimleri tarafından da taşınır.

(14) $\forall x\, \forall y\, \forall z\,[([\text{Yet}\, z \wedge x \in z \wedge y \in z] \rightarrow Fx \wedge Fy) \rightarrow Fx \cap y \wedge Fx \cup y]$

Yetkin kümeye bir örnek:

$z = \{\{\{\Phi\}\}, \{\{\Phi\}, \Phi\}\}$ z'nin elemanları $x = \{\{\Phi\}\}$, $y = \{\{\Phi\},\Phi\}$

$x \cap y = \{\{\Phi\}\}$

$x \cup y = \{\{\Phi\}, \Phi\}$

Hem $x \cap y$ hem de $x \cup y$, z'nin elemanıdır!

Matematikçiler açısından, $\cap$, $\cup$, $\subseteq$, ~, =, gibi tanımlar, kümenin (kümelerin) üyesi olmayla yapılır. Örneğin,

(15) $x \cap y = \{z: z \in x \wedge z \in y\}$

Burada x'in ve y'nin birlikte üyesi olma, $x \cap y$'yi verir. Oysa, yüklemler açısından x'in ve y'nin elemanları değil, ilgimizi çeken; x ve y'nin hangi kümenin elemanları olduğu daha düşündürücü görünüyor. x ve y'nin ait oldukları kümenin elemanları, elemanlarının arasındaki "ilişkiler", o kümenin yetkin olup olmadığını belirleyecektir.