$\Delta I-$Limit Superior ve $\Delta I-$Limit Inferior

Hafize (Gok)[1]Gumus ve Fatih Nuray[2]
[1,2]*Afyon Kocatepe Üniversitesi, FEF, Matematik. Böl.,03200, Afyonkarahisar*
e-posta: hgok@aku.edu.tr, fnuray@aku.edu.tr

Geliş Tarihi: 13 Nisan 2011; Kabul Tarihi: 18Mayıs2011

Özet

Bu çalışmada, doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin bir ailesi yardımıyla tanımlanmış olan ideal kavramı ile oluşturulmuş olan I-yakınsaklık kavramı ve daha sonra çalışılmış olan I-limit superior ve I-limit inferior kavramları, 1981 de Kızmaz tarafından tanımlanmış olan fark dizi uzaylarına uygulanmıştır. Elde edilen Δ I-limit superior ve Δ I-limit inferior kavramları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca bu kavramların sırasıyla x reel sayı dizisinin Δ I-yığılma noktalarının en büyüğü ve en küçüğüne eşit olduğu fakat aynı durumun Δ I-limit noktaları için geçerli olmadığı gösterilmiştir.

*Anahtar Kelimeler:*Fark dizisi; Δ I-yakınsaklık;I-limit superior;I-limit inferior.

$\Delta I-$Limit Superiorand $\Delta I-$Limit Inferior

Abstract

In this study, I-convergence which is obtained from an ideal, family of a subset of natural numbers, and also I-limit superior ve I-limit inferiorareappliedfordifferencesequenceswhichwasintroducedby Kızmaz in 1981. Δ I-limit superiorand Δ I-limit inferiorareobtainedandrelationsbetweenthemareinvastigated. Andalso it is shownthattheseconceptsareequaltothebiggestandsmallest ΔI - clusterpoints of thesequence x but it is not truefor ΔI limit points.

*Key Words:*Difference sequence, Δ I-convergence;I-limit superior;I-limit inferior.

---

1. Giriş

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast(Fast, 1981) tarafından tanımlandı ve farklı adlar altında Fourieranaliz, ergodik teori ve sayı teorisi alanlarından tartışıldı. Bu kavram daha sonra Šalát (Šalát, 1980), Fridy (Fridy, 1985), Connor (Connor, 1988), Fridy ve Orhan (Fridy ve Orhan, 1997) tarafından çalışıldı.

Tanım 1.1. $A \subseteq \mathrm{N}$, $n \in \mathrm{N}$ ve χ_A fonksiyonu A kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere,

$$d_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_A(k)$$

olarak tanımlansın.

$$\underline{d}(A) = \lim_n \inf d_n(A)$$

ve

$$\overline{d}(A) = \lim_n \sup d_n(A)$$

ifadeleri sırasıyla A kümesinin alt ve üst asimptotik yoğunluğu olarak adlandırılır. Eğer

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} d_n(A)$$

limiti mevcut ise bu limite A kümesinin asimptotik yoğunluğu denir.

Tanım 1.2. Reel sayıların bir $x = (x_k)$ dizisi verilmiş olsun. A bir küme ve $|A|$ ifadesi A kümesinin kardinalitesi olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$d\{k \le n : |x_k - l| \ge \varepsilon\} = 0$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|k \le n : |x_k - l| \ge \varepsilon\right| = 0$$

oluyorsa x dizisi $l \in \Re$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. İstatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi S ile gösterilir.

Kostyrko, Mačaj ve Šalát, N doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin bir ailesinin I idealini kullanarak reel sayıların I-yakınsaklığını tanımlamışlardır (Kostyrko vd.,2000). I-yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir. Kostyrko, Šalát ve Wilezyński bu tanımı herhangi bir metrik uzayda çalışmışlar, aynı zamanda I-limit noktaları ve I-yığılma noktalarını tanımlamışlardır (Kostyrko vd., 2000) .

Tanım 1.3. N pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir I ailesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa I ailesine bir ideal denir(Kostyrko vd.,2000).

(i) $\phi \in I$

(ii) $Her\ A,\ B \in I\ için\ A \cup B \in I$

(iii) $Her\ A \in I\ ve\ her\ B \subseteq A\ için\ B \in I$ Eğer $I \subseteq 2^N$ ideali için $I \neq 2^N$ oluyorsa I idealine gerçek ideal; I gerçek ideali N nin her sonlu alt kümesini içeriyorsa I ya bir uygun ideal adı verilir.

Tanım 1.4. N pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir F ailesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa F ailesine bir süzgeç denir (Kostyrko vd., 2000) .

(i) $\phi \notin F$

(ii) $Her\ A,\ B \in F\ için\ A \cap B \in F$

(iii) $Her\ A \in F\ ve\ her\ B \supseteq A\ için\ B \in F$

Önerme 1.1. $I \subseteq 2^N$ bir gerçek ideal olmak üzere,

$$F(I) = \{M \subseteq \mathrm{N} : M = \mathrm{N} \setminus \mathrm{A},\ \mathrm{A} \in \mathrm{I}\}$$

kümesi N de bir süzgeçtir(Kostyrko vd.,2000).

Yukarıdaki önerme göz önüne alınırsa, süzgeç kavramını idealin duali olarak düşünmek mümkündür.

Tanım 1.5. $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi ve $I \subseteq 2^N$ bir uygun ideal olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathrm{N} : |x_k - l| \ge \varepsilon\}$$

kümesi I idealinin elemanı oluyorsa x dizisi $l \in \Re$ sayısına I -yakınsaktır denir. I -yakınsak tüm dizilerin kümesi c_I ile gösterilir.

I -yakınsaklık, I -limit noktaları ve I -yığılma noktaları ile ilgili çalışmalardan sonra Demirci, I -limit superior ve I -limit inferior kavramlarını tanımlamıştır (Demirci, 2001).

Tanım 1.6. $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi ve $I \subseteq 2^N$ bir uygun ideal olsun.

$$B_x = \{b \in \Re : \{k \in \mathrm{N} : x_k > b\} \notin I\}$$

ve

$$A_x = \{a \in \Re : \{k \in \mathrm{N} : x_k < a\} \notin I\}$$

olmak üzere,

$$I - \limsup x = \begin{cases} \sup B_{x,} & B_x \neq \phi\ ise \\ -\infty, & B_x = \phi\ ise \end{cases}$$

ve

$$I - \liminf x = \begin{cases} \inf A_{x,} & A_x \neq \phi\ ise \\ +\infty, & A_x = \phi\ ise \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Demirci, 2001).

$l_\infty, c\ ve\ c_0$ uzayları sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak diziler kümesini göstersin. Kızmaz (Kızmaz 1981), $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$ için

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in X\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK uzayı olduğunu gösterdi. Bu kavram Et ve Çolak (Et ve Çolak, 1995) tarafından genelleştirildi.

Tanım 1.7. $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi ve $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olsun. $I \subseteq 2^N$ bir uygun ideal olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\mathrm{d}\{k \le n : |\Delta x_k - l| \ge \varepsilon\} = 0$$

ise x dizisi $l \in \Re$ sayısına Δ -istatistiksel yakınsaktır denir. Δ -istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi $S(\Delta)$ ile gösterilir (Başarır, 1995).

Tanım 1.8. $x=(x_k)$ reel sayı dizisi için $\forall \varepsilon > 0$ verilsin.

$$\{k \in \mathrm{N} : |\Delta x_k - l| \geq \varepsilon\} \in I$$

ise x dizisi $l \in \Re$ sayısına ΔI -yakınsaktır denir. ΔI -yakınsak tüm dizilerin kümesi $c_I(\Delta)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1. $I_f = \{A \subseteq \mathrm{N} : A\ sonlu\}$ kümesi N de bir uygun ideal ve $c_{I_f}(\Delta) = c(\Delta)$ dır.

Örnek 1.2. $I_d = \{A \subseteq \mathrm{N} : d(A) = 0\}$ kümesi N de bir uygun idealve $c_{I_d}(\Delta) = S(\Delta)$ dır.

2. ΔI −Limit Superior ve ΔI −Limit Inferior

Tanım 2.1. $I \subseteq 2^N$ bir uygun ideal, $x=(x_k)$ bir reel sayı dizisi ve $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olsun.

$$B_{\Delta x} = \{b \in \Re : \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > b\} \notin I\}$$

ve

$$A_{\Delta x} = \{a \in \Re : \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < a\} \notin I\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda,

$$\Delta I - \limsup x = \begin{cases} \sup B_{\Delta x,} & B_{\Delta x} \neq \phi\ ise \\ -\infty, & B_{\Delta x} = \phi\ ise \end{cases}$$

ve

$$\Delta I - \liminf x = \begin{cases} \inf A_{\Delta x,} & A_{\Delta x} \neq \phi\ ise \\ +\infty, & A_{\Delta x} = \phi\ ise \end{cases}$$

dır.

Teorem 2.1. Eğer $\Delta I - \limsup x = \beta$ sonlu ise her ε>0 için,

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > \beta - \varepsilon\} \notin I$$

ve

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > \beta + \varepsilon\} \in I$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki $\Delta I - \limsup x = \beta$ olsun. Bu durumda β sayısı, $b \in \Re$ olmak üzere

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > b\} \notin I \ (1)$$

şartını sağlayan en büyük elemandır. $\beta + \varepsilon > \beta$ olduğundan (1) şartını sağlayamaz. Yani,

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > \beta + \varepsilon\} \in I$$

olmak zorundadır. Diğer yandan $\beta - \varepsilon < \beta$ olduğundan

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > b'\} \notin I$$

olacak şekilde bir $b' \in (\beta - \varepsilon, \beta)$ elemanı bulunabilir.

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > \beta - \varepsilon\} \supseteq \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > b'\}$$

yazılabileceğinden ve ifadenin sağ tarafı ideale ait olmadığından,

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > \beta - \varepsilon\} \notin I$$

elde edilir.

Teorem 2.2. Eğer $\Delta I - \liminf x = \alpha$ sonlu ise her ε>0 için,

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < \alpha + \varepsilon\} \notin I$$

ve

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < \alpha - \varepsilon\} \in I$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki $\Delta I - \liminf x = \alpha$ olsun. Bu durumda α sayısı, $a \in \Re$ olmak üzere

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < a\} \notin I \ (2)$$

şartını sağlayan en küçük elemandır. $\alpha - \varepsilon < \alpha$ olduğundan (2) şartını sağlayamaz. Yani,

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < \alpha - \varepsilon\} \in I$$

olmak zorundadır. Diğer yandan $\alpha + \varepsilon > \alpha$ olduğundan

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < a'\} \notin I$$

olacak şekilde bir $a' \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$ elemanı bulunabilir.

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < \alpha + \varepsilon\} \supseteq \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < a'\}$$

yazılabileceğinden ve ifadenin sağ tarafı ideale ait olmadığından,

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < \alpha + \varepsilon\} \notin I$$

elde edilir.

Bu iki teorem gereğince $\Delta I - \limsup x$ ve $\Delta I - \liminf x$ noktalarının, x dizisinin ΔI-yığılma noktalarının sırasıyla en büyüğü ve en küçüğü olduğu söylenebilir. Fakat bu durum ΔI-limit noktaları için geçerli değildir.

Örnek2.1. $I = I_d$ ve u dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$u = \left\{0,1,0,\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1,0,...\right\}$$

Δx dizisini $\Delta x_k = \begin{cases} 0, & k \ tek \\ u_k, & k \ çift \end{cases}$ olarak seçelim.

Bu durumda

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > 1\} \notin I_d$$

olduğundan

$$\Delta I_d - \limsup x = 1$$

fakat $\Delta I(\Lambda_x) = \{0\}$ dır.

Teorem 2.3. Herhangi bir x dizisi için

$$\Delta I - \liminf x \le \Delta I - \limsup x \qquad (3)$$

dir.

İspat: İspatı $\Delta I - \limsup x$ ifadesinin üç durumu için yapacağız. Öncelikle kabul edelim ki $\Delta I - \limsup x = -\infty$ olsun. Bu durumda $B_{\Delta x} = \phi$ yani $\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > b\} \notin I$ olacak şekilde bir b sayısı yoktur. O zaman $\forall b \in \Re$ için $\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \le b\} \notin I$ dır. b<a için,

$$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < a\} \supseteq \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \le b\}$$

olduğundan ifadenin sağ tarafı ideale ait değildir yani $\forall a \in \Re$ için $\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < a\} \notin I$ dır. Böylece $A_{\Delta x} = \Re$ ve dolayısıyla $\Delta I - \liminf x = -\infty$ elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $\Delta I - \limsup x = +\infty$ olsun. Bu durumda ispat açıktır.

Son olarak varsayalım ki $\Delta I - \limsup x = \beta$ ve $\Delta I - \liminf x = \alpha$ olsun. Tanımdan dolayı $\forall$ ε>0 için,

$$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I$$

ve dolayısıyla

$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \le \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \notin I$ yazılabilir.

$$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \le \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subseteq \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < \beta + \varepsilon\}$$

ve ifadenin sol tarafı ideale ait olmadığından sağ tarafı da ideale ait değildir. Bu durumda $\beta + \varepsilon \in A_{\Delta x}$ olur.

$\alpha = \inf A_{\Delta x}$ olduğundan $\alpha \le \beta + \varepsilon$ ve böylece keyfi ε>0 için $\alpha \le \beta$ elde edilir.

Tanım 2.2. $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\{k : |\Delta x_k| > B\} \in I$$

olacak şekilde bir B sayısı varsa x dizisine ΔI-sınırlıdır denir.

Teorem 2.4. Bir ΔI-sınırlı x reel sayı dizisinin ΔI-yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta I - \liminf x = \Delta I - \limsup x$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $\Delta I - \lim x = l$ olsun.x, ΔI-sınırlı olduğundan $\Delta I - \liminf x$ ve $\Delta I - \limsup x$ sonludur. $\Delta I -$yakınsaklık tanımı gereğince,

$$\{k \in \mathrm{N} : |\Delta x_k - l| \ge \varepsilon\} \in I$$

ve dolayısıyla,

$$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \ge l + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I$$

ve

$$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \le l - \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I$$

dir.

$$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \ge l + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \supseteq \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > l + \varepsilon\}$$

ve

$$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \le l - \frac{\varepsilon}{2}\right\} \supseteq \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < l - \varepsilon\}$$

olduğundan,

$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > l + \varepsilon\} \in I$

ve

$\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < l - \varepsilon\} \in I$

elde edilir. $\Delta I - \limsup$ tanımı gereğince $\beta \le l + \varepsilon$ ve dolayısıyla $\beta \le l$; $\Delta I - \liminf$ tanımı gereğince $\alpha \ge l - \varepsilon$ ve dolayısıyla $l \le \alpha$ olduğundan $\beta \le \alpha$ elde edilir. (3) gereğince $\alpha \le \beta$ olduğu bilindiğinden $\alpha = \beta$ elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $\Delta I - \liminf x =$ $\Delta I - \limsup x$ olsun.Buna göre,

$$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k > l + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I$$

ve

$$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < l - \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I$$

dir. Buradan,

$$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < l + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \supseteq \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \ge l + \varepsilon\}$$

ve

$$\left\{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k < l - \frac{\varepsilon}{2}\right\} \supseteq \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \le l - \varepsilon\}$$

bağıntıları düşünülürse ifadelerin sağ tarafları ideale aittir.

$$\{k \in \mathrm{N} : |\Delta x_k - l| \ge \varepsilon\} = \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \ge l + \varepsilon\} \cup \{k \in \mathrm{N} : \Delta x_k \le l - \varepsilon\}$$

olduğundan $\Delta I - \lim x_k = l$ elde edilir.

6. Sonuç

Bu çalışmada, daha önce reel sayı dizileri için tanımlanmış olan $I -$ limit supremum ve $I -$ limit infimum kavramları, Kızmaz tarafından tanımlanmış olan fark dizilerine uygulanmıştır.

Kaynaklar

Başarır, M., 1995,"On the Δ-Statisticalconvergence ofsequences, Fırat Univ.,Journal of Sci - enceandEnginering, 7(2), 1-6.

Connor, J., 1988, "Thestatisticalandstrong p-Cesároconvergence of sequences", Analysis 8, 47-63.

Demirci,K.,2001,I-limit superiorand limit inferior, Math. Commun. 6, 165-172.

Et, M., Çolak, R., 1995,On some generalized difference sequence spaces, Soochow Journal Of Mathematics,Volume 21, No.4, pp. 377-386.

Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, Coll. Math.2 , 241-244.

Fridy, J.A., 1985,On statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.

Fridy, J. A., Orhan, C., 1997, Statistical limit superior and limit inferior, Proceedings of the American MathematicalSociety Volume 125, Number 12, 3625-3631.

(Gök) Gümüş, H., Fark Dizilerinin I-Yakınsaklığı ve Asimptotik I-Denkliği, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyon Kocatepe Üniversitesi, basımda.

Kızmaz, H., 1981,On certain sequence spaces, Canad.Math. Bull. Vol. 24(2).

KostyrkoP.,Mačaj, M., Šalát,T.,2000, Statistical convergenceand I-convergence, The International Scientific Conference, 16th Summer School on Real Functionstheory.

Kostyrko, P.,Šalát, T.,W.Wilezyński, 2000,I-Convergence, Real Analysis Exchange, Vol. 26(2), 2000/2001, pp.669-680.

Šalát, T., 1980, "On statistically convergent sequences of real numbers", Math.Slov., 30, 139 - 150.