OKU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
5(1):56-65, 2022

OKU Journal of The Institute of Science and Technology 5(1):56-65, 2022

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi

Osmaniye Korkut Ata University Journal of The Institute of Science and Technology

Relatif İki-Ağırlıklı $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-Lineer Kodlar

Basri ÇALIŞKAN[1*], Veysel ÇELİK[2]

[1]Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 80000, Osmaniye
[2]MEB Kahta Bist Anadolu Lisesi, 02400, Adıyaman

[1]https://orcid.org/0000-0003-0512-4208
[2]https://orcid.org/0000-0001-7062-6402
*Sorumlu yazar: bcaliskan@osmaniye.edu.tr

Araştırma Makalesi

Makale Tarihçesi:
Geliş tarihi: 13.07.2021
Kabul tarihi:20.09.2021
Online Yayınlanma:08.03.2022

Anahtar Kelimeler:
Bir-ağırlıklı kod
Gray dönüşümü
$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kod

ÖZ

α ve β sıfırdan farklı pozitif tamsayılar olmak üzere, $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ nın alt grupları olarak tanımlanan $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodlar araştırmacılar tarafından son yıllarda oldukça ilgi görmüştür. Bu kod ailesine benzer bir kod sınıfı $\mathbb{Z}_2^r \times (\mathbb{Z}_2 + u\mathbb{Z}_2)^s$ üzerindeki kodlardır. Bu kodlar $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodlara göre bazı avantajlara sahiptir. Bir kodun sıfırdan farklı tüm kodsözleri aynı ağırlığa sahipse bu kod bir-(sabit) ağırlıklı kod olarak tanımlanır. Bu çalışmada, $\mathbb{Z}_2^r \times (\mathbb{Z}_2 + u\mathbb{Z}_2)^s$ üzerindeki relatif iki-ağırlıklı kodlar çalışılmıştır. İlk olarak, iki-mesafeli bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kodun Gray görüntüsünün ikili iki-mesafeli bir kod olduğu gösterilmiştir. Daha sonra relatif iki-ağırlıklı bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kodun Gray görüntüsün ikili relatif iki-ağırlıklı bir kod olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, bu kodların duallerinin genellikle relatif iki-ağırlıklı kod olmadıkları örneklerle gösterilmiştir. Son olarak, relatif iki-ağırlıklı bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kodun yapısı belirlenmiştir.

Relative Two-Weight $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-Linear Codes

Research Article

Article History:
Received: 13.07.2021
Accepted: 20.09.2021
Published online:08.03.2022

Keywords:
One-weight code
Gray map
$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-linear code

ABSTRACT

$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-additive codes, defined as subgroups of $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ where α and β are positive integers, have been considered by researchers in the last decades. The family of these codes are similar to the class of codes over $\mathbb{Z}_2^r \times (\mathbb{Z}_2 + u\mathbb{Z}_2)^s$. These codes have some advantages compared to $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-additive codes. A code is called constant weight (one-weight) if all the nonzero codewords have the same weight. In this study, relative two-weight codes over $\mathbb{Z}_2^r \times (\mathbb{Z}_2 + u\mathbb{Z}_2)^s$ are considered. Firstly, it is shown that the Gray image of a two-distance $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-linear code is a binary two-distance code. Then, it is proved that the Gray image of a relative two-weight $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-linear code, with nontrivial binary part, is a binary relative two-weight code. Also, it is shown that the duals of these codes are not relative two-weight codes generally by using examples. Finally, the structure of relative two-weight $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-linear codes are determined.

To Cite: Çalışkan B., Çelik V. Relatif İki-Ağırlıklı $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-Lineer Kodlar. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2022; 5(1):56-65.

1. Giriş

$\mathbb{Z}_m$, modülo m kalan sınıflar halkası olmak üzere $\mathbb{Z}_m^n$ nin boş kümeden farklı herhangi bir alt kümesi C ye bir kod ve alt modülüne ise $\mathbb{Z}_m$ üzerinde n uzunluklu bir lineer kod denir. Özel olarak $m = 2$ ise ikili (binary) kod ve $m = 4$ ise dörtlü (quaternary) kod denir.

Eğer bir koddaki sıfırdan farklı her kodsöz aynı Hamming (Lee) ağırlığa sahip ise bu koda bir-ağırlıklı kod, herhangi iki kodsöz arasındaki mesafe sabit ise bu koda eş-mesafeli kod denir. Lineer eş-mesafeli bir kod bir-ağırlıklı bir koddur (Dougherty ve ark., 2016).

Cisimler üzerindeki bir-ağırlıklı lineer kodların yapısı Bonisoli tarafından belirlenmiştir (Bonisoli, 1984). Bu çalışmada, her eş-mesafeli kodun Hamming kodların dualleri olan simpleks kodların bir dizisi olduğu ispatlanmıştır. Halkalar üzerindeki bir-ağırlıklı lineer kodlar ile ilgili bazı çalışmalara örnek verilecek olunursa, $\mathbb{Z}_4$ üzerindeki bir-ağırlıklı lineer kodlar (Carlet, 2000) de ve $\mathbb{Z}_m$ üzerindeki bir-ağırlıklı lineer kodların çeşitli ağırlıkları (Wood, 2002) de araştırılmıştır.

α ve β birer pozitif tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}_2^{\alpha} \times \mathbb{Z}_4^{\beta}$ nın bir C alt grubuna $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kod denir. $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodların cebirsel yapısı (Borges ve ark., 2010) da incelenmiş ve bu makalede $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodların standart haldeki üreteç ve kontrol matrisleri belirlenmiştir. Bu çalışmayla beraber $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodlar birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve bugüne kadar bu konuyla ilgili olarak çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Borges ve ark., 2010; Bilal ve ark., 2011).

Bir-ağırlıklı $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodlar (Dougherty ve ark., 2016) da sınıflandırılmıştır. Yine bir-ağırlıklı $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kodların yapısı (Aydogdu, 2018) de belirlenmiştir. Bir-ağırlıklı $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodlarla ilgili bazı sonuçlar (Çalışkan, 2021) de elde edilmiştir. Cisimler üzerindeki relatif bir-ağırlıklı lineer kodlar ilk kez (Liu ve Chen, 2010) ve (Liu ve ark., 2011) de tanıtılmıştır. Relatif iki-ağırlıklı $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodların yapısı (Annamalai ve Durairajan, 2016) da çalışılmıştır.

Yukarıda bahsedilen araştırmalardan yola çıkılarak, bu çalışmada, r ve s birer pozitif tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}_2^r \times (\mathbb{Z}_2 + u\mathbb{Z}_2)^s$ üzerindeki relatif iki-ağırlıklı kodların cebirsel yapısı araştırılmış ve relatif iki-ağırlıklı bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kodun yapısı belirlenerek bazı örnekler verilmiştir.

2. Materyal ve Metot

2.1. $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-Lineer Kodlar

$\mathbb{Z}_4$ gibi dört elemanlı önemli halkalardan biri olan $\mathbb{Z}_2[u]$ halkası (Aydogdu ve ark., 2015) de verilmiştir. Bu halka $u^2 = 0$ olmak üzere $R = \mathbb{Z}_2 + u\mathbb{Z}_2 = \{0,1,u,1+u\}$ elemanlarına sahiptir ve kısaca $R = \mathbb{Z}_2[u]$ ile gösterilir. $\mathbb{Z}_2$ nin R halkasının bir alt halkası olduğu açıktır. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_2$ deki çarpanlara ayırma R de geçerlidir.

$$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u] = \{(a|b) | a \in \mathbb{Z}_2, b \in R\}$$

şeklinde tanımlanan küme bilinen çarpma işlemi altında R halkasındaki u elemanına göre kapalı değildir. Dolayısıyla standart çarpma işlemine göre bir modül değildir.

$$\eta: R \to \mathbb{Z}_2$$

$$\eta(e + uq) = e$$

dönüşümü $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 1$, $\eta(u) = 0$ ve $\eta(1+u) = 1$ olarak tanımlansın. η dönüşümü yardımıyla skaler çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır. Herhangi bir $d \in R$ ve $v = (a_0, a_1, \dots, a_{r-1} | b_0, b_1, \dots, b_{s-1}) \in \mathbb{Z}_2^r \times R^s$ için

$$d \cdot v = (\eta(d)a_0, \eta(d)a_1, \dots, \eta(d)a_{r-1} | db_0, db_1, \dots, db_{s-1})$$

işlemi altında $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ halkası bir R modüldür (Aydoğdu, 2014).

Tanım 2.1.1. C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer C yukarıda tanımlanan skaler çarpma işlemine göre $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ nin bir R-alt modülü ise, C ye bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kod denir. $n = r + 2s$ olmak üzere her $a = (a_0, a_1, \dots, a_{r-1}) \in \mathbb{Z}_2^r$ ve $b = (b_0, b_1, \dots, b_{s-1}) \in R^s$ için Gray dönüşümü

$$\Phi: \mathbb{Z}_2^r \times R^s \to \mathbb{Z}_2^n$$

$$\Phi(a|b) = (a_0, a_1, \dots, a_{r-1} | \phi(b_0), \phi(b_1), \dots, \phi(b_{s-1}))$$

$$\phi: R \to \mathbb{Z}_2^2$$

$$\phi(0) = (0,0), \phi(1) = (0,1), \phi(u) = (1,1), \phi(1+u) = (1,0)$$

şeklinde tanımlanır (Aydogdu ve ark., 2015).

Bir x kodsözündeki sıfırdan farklı koordinatların sayısına ise (Hamming) ağırlık denir ve $wt_H(x)$ ile gösterilir. $(x|y)$ nin Lee ağırlığı $wt_L(x|y)$ ile gösterilir ve $wt_L(x|y) = wt_H(x) + wt_H(\phi(y))$ olarak tanımlanır. $(x|y), (x'|y') \in \mathbb{Z}_2^r \times R^s$ olsun. $(x|y)$ ile $(x'|y')$ arasındaki Hamming mesafesi

$$d_H((x|y), (x'|y')) = wt_H(x - x' | y - y')$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $(x|y)$ ile $(x'|y')$ arasındaki Lee mesafesi

$$d_L((x|y), (x'|y')) = wt_H(x - x') + wt_H(\phi(y - y'))$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.2. C, $(r, s; k_0, k_1, k_2)$ tipinde bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kod olsun. C kodunun üreteç matrisinin standart hali, aşağıdaki gibi verilen $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer koda permütasyon denktir

$$G = \left(\begin{array}{cc|ccc} I_{k_0} & A_1 & 0 & 0 & uT \\ 0 & S & I_{k_1} & A & B_1 + uB_2 \\ 0 & 0 & 0 & uI_{k_2} & uD \end{array}\right).$$

Burada A, A_1, B_1, B_2, S ve D matrisleri $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki matrislerdir (Aydoğdu, 2014).

Tanım 2.1.3. $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ üzerindeki herhangi iki v, w elemanının iç çarpımı

$$\langle v, w \rangle = u\left(\sum_{i=1}^{r} v_i w_i\right) + \sum_{j=r+1}^{r+s} v_j w_j \in (\mathbb{Z}_2 + u\mathbb{Z}_2)$$

biçiminde tanımlanır (Aydoğdu, 2014).

Tanım 2.1.4. C, $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kodunun duali $C^{\perp}$ sembolüyle gösterilir ve

$$C^{\perp} = \{w \in \mathbb{Z}_2^r \times R^s | \text{her } v \in C \text{ için } \langle v, w \rangle = 0\}$$

biçiminde tanımlanır (Aydoğdu, 2014).

Teorem 2.1.5. $(r, s; k_0, k_1, k_2)$ tipindeki C $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kodunun duali $C^{\perp}$ nin standart formdaki üreteç matrisi (C kodunun kontrol matrisi)

$$H = \left(\begin{array}{cc|ccc} -A_1^t & I_{r-k_0} & -uS^t & 0 & 0 \\ -T^t & 0 & -(B_1 + uB_2)^t + D^t A^t & -D^t & I_{s-k_1-k_2} \\ 0 & 0 & -uA^t & uI_{k_2} & 0 \end{array}\right)$$

şeklindedir (Aydoğdu, 2014).

Örnek 2.1.6. C, $G = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1+u & 1 & 1+u \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & u \end{array}\right)$ üreteç matrisi ile üretilen $\mathbb{Z}_2^7 \times R^4$ üzerinde $(7,4; 1,1,0)$ tipinde bir kod olsun. C kodunun üreteç matrisinin standart hali

$$G_S = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1+u & 1+u \end{array}\right)$$

olup, $C^{\perp}$ nin standart formdaki üreteç matrisi

$$H = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+u & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+u & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

şeklindedir. Açıkça görülmektedir ki, $|C||C^{\perp}| = 2^7 4^4$ dir.

3. Bulgular ve Tartışma

3.1. $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ Üzerinde Relatif İki-Ağırlıklı Kodlar

Bu bölümde, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ deki relatif iki-ağırlıklı kodların yapısı çalışılmıştır.
C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de bir kod olsun. Eğer C nin sıfırdan farklı tüm kodsözleri aynı Lee ağırlığına sahip ise C ye bir-ağırlıklı bir kod denir.

Tanım 3.1.1. C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de sıfırdan farklı bir kod olsun. $c, c' \in C$ herhangi iki kodsöz için $d_L(c, c') \in \{m, m_1\}$ olacak şekilde farklı m, m_1 pozitif tamsayıları varsa C ye iki-mesafeli kod denir. Eğer C nin sıfırdan farklı tüm kodsözleri iki farklı Lee ağırlığına sahip ise C ye iki-ağırlıklı bir kod denir.

C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de bir kod ise, C nin relatif iki-ağırlıklı bir kod olabilmesi için gerek yeter koşulun C nin iki-mesafeli bir kod olması gerektiği açıktır.

Tanım 3.1.2. C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de bir kod ve C_1, C nin bir alt kodu olsun. Eğer C_1 ve $C \setminus C_1$ bir-ağırlıklı kod iseler, C ye C_1 alt koduna göre relatif iki-ağırlıklı bir kod denir. Her $c_1 \in C_1$ için $wt_L(c_1) = m_1$ olacak şekildeki bir $m_1 > 0$ tamsayısı ve her $c \in C \setminus C_1$ için $wt_L(c) = m$ olacak şekildeki bir $m > 0$ tamsayısı ile birlikte C_1 alt koduna göre relatif iki-ağırlıklı bir C kodu, $C(m_1, m)$ olarak gösterilir.

Örnek 3.1.3.. $\mathbb{Z}_2^7 \times R^4$ üzerinde verilen C kodu, $C_1 = \langle (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 | 1 \quad 1+u \quad 1+u \quad 1) \rangle$ alt koduna göre (8,7) relatif iki-ağırlıklı bir koddur.

Teorem 3.1.4. C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de mesafeleri m ve m_1 olan iki-mesafeli bir kod olsun. Bu durumda C nin Gray görüntüsü $\Phi(C)$ de aynı m ve m_1 mesafelerine sahip ikili iki-mesafeli bir koddur.

İspat: $c, c' \in C$ için $\Phi(c) \neq \Phi(c')$ olmak üzere $\Phi(c), \Phi(c') \in \Phi(C)$ olsun. C, $C(m_1, m)$ kod olduğundan $d_L(c, c') \in \{m, m_1\}$ dir. [5] den Gray dönüşümü Φ nin bir izometri olmasından dolayı

$$d_H\big(\Phi(c),\Phi(c')\big) = d_L(c,c') \in \{m, m_1\}$$

dir. Dolayısıyla, $\Phi(C)$ aynı m ve m_1 mesafelerine sahip ikili iki-mesafeli bir koddur.

Teorem 3.1.5. C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de bir kod olsun. Eğer $C(m_1, m)$, C_1 alt koduna göre relatif iki-ağırlıklı bir kod ise m_1 çift olmak zorundadır.

İspat: $C(m_1, m)$, C_1 alt koduna göre relatif iki-ağırlıklı bir kod ve $c_1 = (x_1|y_1) \in C_1$ olsun. C_1 bir-ağırlıklı $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kod olduğundan

$$u \cdot c_1 = (\eta(u)x_1|uy_1) = (0|uy_1) \in C_1$$

dir. $uy_1 \in R^s$ deki her koordinat ya 0 ya da u olduğundan dolayı, bu $wt_L(uy_1)$ nin çift olmasını gerektirir ve $wt_L(0|uy_1)$ nin çift olduğu elde edilir. C_1, ağırlığı m_1 olan bir-ağırlıklı bir kod olduğundan C_1 deki sıfırdan farklı her kodsöz için $wt_L(c_1) = wt_L(uc_1)$ dir. Dolayısıyla m_1 çifttir.

Teorem 3.1.6. C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de bir $C(m_1, m)$ kod olsun. Bu durumda C nin Gray görüntüsü $\Phi(C)$ de $\mathbb{Z}_2$ üzerinde relatif iki-ağırlıklı bir $\Phi(C)(m_1, m)$ koddur.

İspat: $w \in \Phi(C) \setminus \Phi(C_1)$ olsun. O zaman $w = \Phi(c)$ olacak şekilde en az bir $c \in C \setminus C_1$ vardır. Her $v \in C$ için

$$wt_H(\Phi(v)) = wt_L(v)$$

olduğundan,

$$wt_H(w) = wt_H(\Phi(c)) = wt_L(c) = m$$

dir. $w \neq 0$ için $w \in \Phi(C_1)$ olsun. Bu durumda

$$w = \Phi(c_1),$$
$$wt_H(w) = wt_H(\Phi(c_1)) = wt_L(c_1) = m_1$$

olacak şekilde en az bir $c_1 \neq 0 \in C_1$ vardır. Dolayısıyla $\Phi(C)(m_1, m)$, $\mathbb{Z}_2$ üzerinde relatif iki-ağırlıklı bir koddur.

Teorem 3.1.7. C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de relatif iki-ağırlıklı bir $C(m_1, m)$ kod olsun. Bu durumda herhangi bir t pozitif tamsayısı için $\mathbb{Z}_2^{tr} \times R^{ts}$ de en az bir $D(tm_1, tm)$ relatif iki-ağırlıklı kodu vardır.

İspat: C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de C_1 alt koduna göre bir relatif iki-ağırlıklı kod olsun.

$$D = \left\{ \left(\overbrace{x \cdots x}^{t-tane} \middle| \overbrace{y \cdots y}^{t-tane} \right) \middle| (x|y) \in C \right\} \subseteq \mathbb{Z}_2^{tr} \times R^{ts}$$

$$D_1 = \{(x \cdots x|y \cdots y) \in D|(x|y) \in C_1\}$$

D_1 in $\mathbb{Z}_2^{tr} \times R^{ts}$ de bir kod olduğu ve $D_1 \subseteq D$ olduğu açıktır. $\left(\overbrace{x \cdots x}^{t-tane} \middle| \overbrace{y \cdots y}^{t-tane} \right) \in D \setminus D_1$ olsun. Bu durumda $(x|y) \in C \setminus C_1$ ve $wt_L(x|y) = m$ dir ve dolayısıyla

$$wt_L \left(\overbrace{x \cdots x}^{t-tane} \middle| \overbrace{y \cdots y}^{t-tane} \right) = tm$$

dir. $(x \cdots x|y \cdots y) \in D_1$ olsun. Bu durumda $(x|y) \in C_1$ dir. C_1 bir-ağırlıklı bir kod olduğundan $wt_L(x|y) = m_1$ ve dolayısıyla

$$wt_L(x \cdots x|y \cdots y) = tm_1$$

elde edilir. Bu yüzden $D(tm_1, tm)$, D_1 alt koduna göre bir relatif iki-ağırlıklı koddur.

Eğer C relatif iki-ağırlıklı bir kod ise, C nin duali $C^{\perp}$ relatif iki-ağırlıklı bir kod olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.8. $C = \langle(1|1+u \quad u)\rangle$, $C_1 = \langle(0|u \quad 0)\rangle$ alt koduna göre relatif iki-ağırlıklı bir koddur. Fakat C nin duali $C^{\perp} = \langle(1|u \quad 0), (0|u \quad 1)\rangle$ relatif iki-ağırlıklı bir kod değildir.

Örnek 3.1.9. C, $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ üreteç matrisi ile üretilen $\mathbb{Z}_2^2 \times R^2$ de $C_1 = \langle(1 \quad 1|1+u \quad 1)\rangle$ alt koduna göre (4,3) relatif iki-ağırlıklı bir koddur. C nin duali $C^{\perp} = \langle(0 \quad 1|0 \quad u), (1 \quad 0|1 \quad 1+u)\rangle$, $E_1 = \langle(1 \quad 1|1 \quad 1)\rangle$ alt koduna göre (4,3) relatif iki-ağırlıklı bir koddur.

3.2. Relatif İki-Ağırlıklı $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-Lineer Kodların Yapısı

Bir halkada $xy = 1$ olacak şekilde en az bir y elemanı bulunuyorsa, x elemanına birimsel eleman denir. Ayrıca, sıfırdan farklı bir a elemanı için $ab = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir b elemanı bulunuyorsa, a elamanına sıfır bölen denir.

Teorem 3.2.1. C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de C_1 alt koduna göre relatif iki-ağırlıklı bir $C(m_1, m)$ kod, G_1, C_1 alt kodunun üreteç matrisi ve $G = \binom{G'}{G_1}$ de $C(m_1, m)$ nin üreteç matrisi olsun. Eğer $(v|w)$, G_1 in bir satırı ise w daki birimsellerin sayısı ya 0 ya da $\frac{m_1}{2}$ dir.

İspat: $c = (v|w)$, G_1 in bir satırı olsun. Bu durumda $u \cdot c = (0|uw)$ dir. Eğer $u \cdot c = 0$ ise w da birimsel yoktur. Eğer $u \cdot c \neq 0$ ise,

$$wt_L(u \cdot c) = wt_L(0|uw) = wt_H(0) + wt_L(uw)$$

dir. Her $c \in C_1$ için $wt_L(c) = m_1$ olduğundan $wt_L(uw) = m_1$ olmalıdır. w da birimsellerin bulunduğu koordinatların yerlerinin sayısı ile uw da sıfırdan farklı koordinatların yerlerinin sayısı aynı olduğundan ve uw da sıfırdan farklı koordinatlarda u bulunacağından

$$wt_L(u \cdot c) = 2 \times (\ w \text{ daki birimsellerin sayısı})$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$2 \times (w \text{ daki birimsellerin sayısı}) = m_1$$

elde edilir. Buradan w daki birimsellerin sayısı $\frac{m_1}{2}$ olarak bulunur.

Örnek 3.2.2. $C = \langle(1 \quad 0 \quad 1|1+u \quad u)\rangle \in \mathbb{Z}_2^3 \times R^2$, $C_1 = \langle(0 \quad 0 \quad 0|u \quad 0)\rangle$ alt koduna göre $C(2,5)$ relatif iki-ağırlıklı bir koddur. C nin elemanları

$$C = \{(1 \quad 0 \quad 1|1+u \quad u), (0 \quad 0 \quad 0|u \quad 0), (1 \quad 0 \quad 1|1 \quad u), (0 \quad 0 \quad 0|0 \quad 0)\}$$

olup, görüldüğü gibi R li kısımda 1 tane birimsel bulunmaktadır.

Teorem 3.2.3. C, $\mathbb{Z}_2^r \times R^s$ de C_1 alt koduna göre relatif iki-ağırlıklı bir $C(m_1, m) = \langle(v|w)\rangle$ kod olsun. Eğer v nin k tane birimsel pozisyonu, w nun l tane birimsel pozisyonu ve t tane de sıfır bölen pozisyonu bulunuyorsa, $m_1 = 2l$, $m = k + 2t + l$ dir.

İspat: $0 \neq c \in C_1$ olsun. $C = \langle(v|w)\rangle$ ve $C_1 \subseteq C$ olduğundan, $c = u \cdot (v|w)$ olmak zorundadır, aksi halde $C = C_1$ olurdu. Bu yüzden

$$wt_L(c) = wt_L\big(u \cdot (v|w)\big) = wt_L(0|uw) = m_1$$

elde edilir. w nun l tane birimsel pozisyonu bulunduğundan uw nun l tane sıfır bölen pozisyonu vardır. Bu yüzden $wt_L(0|uw) = 2l$ dir. Dolayısıyla $m_1 = 2l$ dir. $(v|w) \in C \setminus C_1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} wt_L\big((v|w)\big) &= wt_H(v) + wt_H\big(\phi(w)\big) \\ &= r + wt\big(\phi(w)\big) \end{aligned}$$

dır. w nun l tane birimsel pozisyonu ve t tane de sıfır bölen pozisyonu bulunduğundan $\phi(w)$, $l + 2t$ tane birimsel pozisyonuna sahiptir. Dolayısıyla, $wt_H\big(\phi(w)\big) = 2t + l$ ve $wt_L\big((v|w)\big) = k + 2t + l$ elde edilir. Bu yüzden $m = k + 2t + l$ bulunur.

4. Sonuçlar

Bilindiği üzere kodlama teorisinde bir (sabit)-ağırlıklı kodlar birçok önemli uygulamalara sahiptir. Örneğin, veri depolama, hataya dayanıklı devre tasarımı ve hesaplama, devre testi için desen üretimi, kimlik kodlaması ve optik kaplama ağlar gibi çok çeşitli uygulama alanları bulunmaktadır. Bu çalışmada, dört elemanlı $\mathbb{Z}_4$ halkasına göre bazı avantajlara sahip olan önemli diğer bir halka $\mathbb{Z}_2[u]$ halkası ile belirlenen relatif iki-ağırlıklı $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[u]$-lineer kodların bazı özellikleri araştırılmıştır. Bu kodların Gray görüntülerinin de relatif iki-ağırlıklı kod olduğu gösterilmiş ve cebirsel yapısı ile ilgili teorem ispatlanmıştır.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makalenin yazarları herhangi bir çıkar çatışması bulunmadığını beyan ederler.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Makalenin yazarları olarak bu çalışmaya eşit oranda katkı sağladığımızı beyan ederiz.

Kaynakça

Annamalai N., Durairajan C. Relative two-weight $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$- additive codes. International Journal of Computer & Mathematical Sciences 2016; 5(11): 30-34.

Aydogdu I. The structure of one-weight linear and cyclic codes over $\mathbb{Z}_2 + \mathrm{u}\mathbb{Z}_2$ codes. An International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications 2018; 8(1): 92-101.

Aydogdu I., Abualrub T., Siap I. On $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2[\mathrm{u}]$-additive codes. International Journal of Computer Mathematics 2015; 92: 1806-1814.

Aydoğdu İ. Bazı özel modüller üzerinde toplamsal kodlar. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, sayfa no: 78, İstanbul, Türkiye, 2014.

Bilal M., Borges J., Dougherty ST., Fernàndez-Córdoba C. Maximum distance separable codes over $\mathbb{Z}_4$ and $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Desings, Codes and Cryptography 2011; 61: 31-40.

Bonisoli A. Every equidistant linear code is a sequence of dual Hamming codes. Ars Combinatoria 1984; 18: 181-186.

Borges J., Fernàndez-Córdoba C., Pujol J., Rifà J., Villanueva M. $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-linear codes: generator matrices and duality. Desings, Codes and Cryptography 2010; 54(2): 167-179.

Carlet C. One-weight $\mathbb{Z}_4$-linear codes. In: Buchmann, J., Hoholdt, T., Stichtenoth, H., Tapia-Recillas, H. (eds.) Coding Theory, Cryptography and Related Areas, Springer, Berlin, 2000, 57-72.

Çalışkan B. On one-weight and acd codes in $\mathbb{Z}_2^r \times \mathbb{Z}_4^s \times \mathbb{Z}_8^t$. Filomat 2021; 35(3): 871-882.

Dougherty ST., Liu H., Yu L. One weight $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-additive codes. Applicable Algebra in Engineering Communication and Computing 2016; 27(2): 123-138.

Fernàndez-Córdoba C., Pujol J., Villanueva M. $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-linear codes:rank and kernel. Desings, Codes and Cryptography 2010; 56: 43-59.

Liu Z., Chen W. Notes on the value function. Desings, Codes and Cryptography 2010; 54(1): 11-19.

Liu Z., Chen W., Sun Z., Zeng X. Further results on support weights of certain subcodes. Desings, Codes and Cryptography 2011; 61(2): 119-129.

Wood JA. The structure of linear codes of constant weight. Transactions of the American Mathematical Society 2002; 354: 1007-1026.