*Pamukkale Üniversitesi*
*Mühendislik Bilimleri Dergisi*
*Cilt 16, Sayı 1, 2010, Sayfa 1-9*

# Ağsız Yöntemler ve Sınıflandırılması

## Meshfree Methods and Their Classification

**Mahmut PEKEDİS ve Hasan YILDIZ***

Ege Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 35100, İzmir

Geliş Tarihi/Received : 08.04.2009, Kabul Tarihi/Accepted : 07.10.2009

## ÖZET

Son yirmi yıl içinde birçok ağsız yöntem geliştirilmiş ve bu yöntemlerden bazıları zaman içerisinde kayda değer ilerlemeler göstermişlerdir. Bu çalışmada son zamanlarda geliştirilmekte olan nümerik metotlardan ağsız yöntemler hakkında temel bilgiler verilmiştir. Mühendislik problemlerinin çözümü için araştırmacılar tarafından önerilen çözüm prosedürü açısından ağsız yöntemler sonlu elemanlar yöntemiyle karşılaştırılmıştır. Ağsız yöntemler çeşitli özelliklerine göre sınıflandırılıp, en çok kullanılan tipleri tanıtılmıştır.

**Anahtar Kelimeler :** *Ağsız yöntemler, Sonlu elamanlar yöntemi, Çözüm prosedürü, Ağsız yöntemlerin sınıflandırılması.*

## ABSTRACT

Many meshless methods have been developed and improved remarkably during the last two decades. In this study, some fundamental information about meshless methods which are new and popular numerical methods in recent years is given. Meshless methods are compared with the finite element method in terms of the solution procedures proposed and used by researchers in engineering problems. Meshless methods are classified in terms of their properties and some popular types of these methods are described.

**Keywords :** *Meshless methods, Finite elements methods, Solution procedure, Classification of meshless methods.*

## 1. GİRİŞ

Fen ve mühendislik bilimleri problemlerinde karşılaşılan kompleks diferansiyel denklemler sayısal yöntemler kullanılarak çözülebilmektedirler. Günümüzde sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar metodu (SFM), gibi nümerik metotlar kullanılarak karmaşık diferansiyel denklemler çözülebilmektedir. Bu metotlarda problem bölgesi ağlara bölünmektedir. Ağ, önceden tanımlı düğümlerin birbirleriyle bağlantısı olarak ifade edilmektedir. Sonlu farklar yönteminde ağlar ızgara, sonlu hacimler yönteminde, hacim ve hücre, sonlu elemanlar yönteminde ise eleman olarak tanımlanmaktadır. Hacim, hücre ve elemanlar farklı fiziksel problemler için farklı tanımlandığından farklı fiziksel anlamlar taşımaktadırlar. Kısacası, ızgaralar, hacimler, hücreler ve elemanlar yukarıda tanımlanan ifadeye göre ağ olarak isimlendirilir. Ağ için önemli olan birbirleriyle etkileşimli olarak çözüm öncesinden tanımlanmış olmasıdır. Tüm problem bölgesi için aritmetik denklemler kullanılarak ağ boyunca sistem çözülür. Ağsız yöntemler de çözüm öncesinde ağ tanımlanmış olması gerekmemektedir. Ayrıca bu özellik tüm ağsız yöntemlerde ortaktır.

Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) son elli yıldır nümerik mekanik biliminde yaygın olarak kullanılmaktadır. Buna rağmen büyük deformasyonlu ve yüksek eleman sayısına sahip problemlerde SEY ile çözümünde sorunlar yaşanmaktadır. Yapısal çatlak simülasyonu problemlerinde, çatlak ilerlemesini incelemek için iterasyon yapıldığı aşamada tekrar ağ oluşturma zorlukları vardır. Sonlu elemanlar yönteminde alışılmış ağ tekniğiyle bu gibi zorlukların üstesinden gelmek ekstra efor gerektirmektedir. Ağsız yöntemlerin, sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sonlu hacimlerden ayrılan tarafı problem bölgesini alanlara bölmek yerine, alan içine bir takım düğüm noktaları yerleştirerek şekil (yaklaşık) fonksiyonlarını bu noktalarda türetilmesidir. Bu yöntemde ağ ve eleman oluşturulması gerekmemektedir. Ağ oluşturmada karşılaşılan zorluklar bu metotta görülmez. Ağsız yöntemler günümüzde de yaygın olarak araştırmacıların ilgisini çekmektedir. Esnek çözüm, güçlü performans ve verimli sonuçlarıyla araştırılacak çok zengin bir sayısal çözüm tekniğidir. Ayrıca büyük deformasyon analizleri gibi zaman gerektirecek problemler için etkili sonuçlar vaat etmektedir. Günümüzde geliştirilmiş yaygın ağsız

* Yazışılan yazar/Corresponding author. E-posta adresi/E-mail address : hasan.yildiz@ege.edu.tr (H. Yıldız)

yöntemler vardır ve hala bu metotların geliştirilmeleri devam edilmektedir.

### 1. 1. Ağsız Metotların Tanımı

Ağsız yöntem, tanımlanan alanda ağ yapısı oluşturmadan sistemin aritmetik denklemlerini kuran ve bu denklemleri çözerek bilinmeyenleri elde etmeye yarayan, iterasyon gerektiren çözümler içim çok uygun bir yöntemdir. Ağsız yöntemler problem bölgesinde tanımlı düğüm noktalarını kullanarak sınır koşulları uygulayıp problemi çözer. Bu bölgede dağılmış düğümlere alan düğümleri denir. Bu düğümlerin aralarında bağ oluşturan ağ yapısı yoktur (Liu, 2003). Ağsız yöntemler SEY ile karşılaştırıldığında, SEY ile elde edilebilen tüm çözümler ağsız yöntemler kullanılarak da elde edilebilmektedir.

### 1. 2. Ağsız Yöntemlerin Tarihi Gelişimi

Bilimsel, teknoloji ve uygulamalarda yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar metodunun kompleks problemlerin çözümünde oluşturduğu olumsuzluklardan dolayı ağsız yöntemlerin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Ağsız yöntemler ilk olarak 1977 yılında Lucy, Gingold ve Monaghan tarafından düzgün parçacık hidrodinamiği metodu ile geliştirilmeye başlanmıştır. Öncelikle bu metot astrofizik ve daha sonra akışkanlar dinamiğinde kullanılmıştır. Daha sonraki dönemlerde Libersky ve arkadaşları (1993) düz parçacık hidrodinamiğini katı mekaniği problemlerine uygulamıştır. Babuska ve Melenk (1995) sonlu elemanlar çözüm sürecine benzeyen birimsel parçacık sonlu elemanlar yöntemini geliştirmiştir. Bu metot hp-toz bulutu metoduna oldukça benzerlik göstermektedir. Atluri ve Zhu, (1998) yılında yaptıkları çalışmada sayısal integrasyon işleminde hücre yapısı gerektirmeyen gerçek yapıda ağsız yöntem geliştirmişlerdir. Bu metotta alışılmış şekil ve ağırlık fonksiyonları yerine Petrov-Galerkin formülasyonu kullanılmıştır. Nayroles ve çalışma arkadaşları 1992 yılında difüze eleman Galerkin yöntemini geliştirmişlerdir. Bu yöntem sahip olduğu avantajlarından biri, ağ oluşturulmadan düğümler toplanabilmiştir. Diğeri ise düğümler arasındaki boşluğun çözüm hassasiyetini etkilememesidir. Ağsız yöntemlerin tarihsel gelişimi daha ayrıntılı bir biçimde Tablo 1'de verilmiştir.

**Tablo 1. Ağsız yöntemlerin tarihsel gelişimi.**

| Yöntem | Denklem Formu | Kullanılan Fonksiyon | Referans |
|---|---|---|---|
| Difüse eleman Yöntemi | Zayıf form | HEKY ve Galerkin Y. | Nayroles v.d., (1992) |
| Eleman bağımsız Galerkin yöntemi | Zayıf form | HEKY ve Galerkin Y. | Belytschko v.d., (1994) |
| Ağsız yerel Petrov Galerkin yöntemi | Yerel zayıf form | HEKY ve Petrov Galerkin Y. | Atluri ve Zhu., (1998) |
| Sonlu nokta yöntemi | Güçlü form | Sonlu türev açılımı (Taylor serisi), HEKY | Onate v.d., (1996) |
| Düzgün parçacık hidrodinamiği | Güçlü form | İntegral açılımı | Lucy (1977), Monaghan (1988) |
| Yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemi | Güçlü veya zayıf form | İntegral açılımı (YÜÇPY) | Liu v.d., (1995) |
| h-p bulutu | Zayıf form | Birimin parçalanması, HEKY | Duarte ve Oden (1995) |
| Birimin parçalanması yöntemi | Zayıf form | Birimin parçalanması, HEKY | Babuska ve Melenk (1995) |
| Nokta interpolasyon yöntemi | Zayıf form ve yerel zayıf form | Nokta interpolasyon | Liu ve Gu, (2001) |
| Sınır düğüm yöntemleri | Zayıf form ve yerel zayıf form | HEKY | Mukherjee, (1997) |

### 1. 3. Ağsız Yöntemlerin Kullanılmasının Nedenleri

Nümerik yöntemler alanında önemli gelişmeler 1950 yılından bu yana sonlu elemanlar ve diğer nümerik metotlar da olmuştur. Sonlu elemanlar yönteminde karmaşık şekle sahip yapılar elemanlara ayrılır. Ayrılan elemanlar birbirleriyle ağ adı verilen topolojik olarak birbirleriyle bağlanmışlardır. SEY karmaşık şekle sahip cisimler, lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünde hassas sonuçlar verdiğinden uygulamalarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca fen ve mühendislik problemlerin çözümünde sonlu elemanlar yöntemi çözüm prosedürüne göre tasarlanan SEY paketleri de yaygındır. Lakin SEY kullanılırken, bazı durumlarda zorluklarla karşılaşılmaktadır. Aşağıda bu zorluklardan bazıları sıralanmıştır.

#### 1. 3. 1. Ağ Oluşturma Süresinin Uzun Olması

Problem, sonlu elemanlar yönteminde çözülürken zamanın çoğunluğu ağ oluşturma sürecinde harcanmaktadır. Bu sürenin kısaltılabilmesi için de bilgisayar hızının yüksek tutulması gerekir.

### 1. 3. 2. Analize Uyarlanmanın Zor Olması

Sonlu elamanlar yönteminde arzu edilen en önemli parametrelerden birisi de çözüm sonucunda elde edilen değerlerin doğru olmasıdır. Bunun da elde edilebilmesi için (adaptive analysis) uyarlanma analizi gerçekleştirilmesi gerekir. Sonlu elemanlar yönteminde uyarlanma analizi yapılabilmesi için (sonuçların daha iyi yakınsamasını sağlamak için) geometri tekrardan daha çok elemana bölünmesi gerekir. Bu özellik hem süre hem de uyarlanma açısından negatif yönde etki etmektedir.

Yüksek deformasyon sonucu elemanların çarpılmasından dolayı elde edilen çözüm sonuçlarının arzu edilecek şekilde olmaması.

### 1. 3. 3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Bazı Problemlerde Kısıtlılığı

SEY ile katılarda çatlak simülasyonu yapmak oldukça zordur. Benzer şekilde yüksek yük altında malzeme kırılma simülasyonun SEY ile yapılması oldukça zordur.

Sonlu elemanlar yöntemi süreklilik prensibine göre temellendirilmiş olup elemanların dağılmazlık prensibine dayanmaktadır. Elemanlar arasındaki bağların kopması ile olumsuzluklar ortaya çıkmaktadır. Günümüzde kullanılan ağsız yöntemlerle incelenen problemlerdeki negatif durumlar ortadan kaldırılabilmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi ile ağsız yöntemler arasında temel farklıklar Tablo 2'de verilmiştir.

**Tablo 2. SEY ile ağsız yöntemler arasındaki farklılıklar (Liu ve Gu, 2005).**

| Özellik | SEY | Ağsız yöntem |
|---|---|---|
| Ağ | Evet | Hayır |
| Şekil fonksiyonu oluşturma | Önceden tanımlanmış elemanlar üzerinde tanımlı | Yerel destek bölgesi üzerinde tanımlı |
| Katılık matrisi | Birleşik, simetrik | Birleşik, kullanılan metoda bağlı olarak iyileştirmeler gerekir |
| Esas sınır koşulları uygunluğu | Basit ve standart | Kullanılan yönteme göre iyileştirmeler gerekir |
| Hesaplama hızı | Hızlı | Kullanılan yönteme göre SEY'den daha yavaştır |
| Doğruluğu | SFY'ye göre daha hızlı | SEY'e göre çözüm sonuçları daha iyi |
| Uyarlanmış analiz (3D) | 3 boyutlu yapılar için uyarlanması zor | Daha kolay |
| Gelişim aşaması | İyi derecede geliştirilmiştir. | Az geliştirilmiştir. |
| Ticari yazılım paketleri | Çok | Nadir |

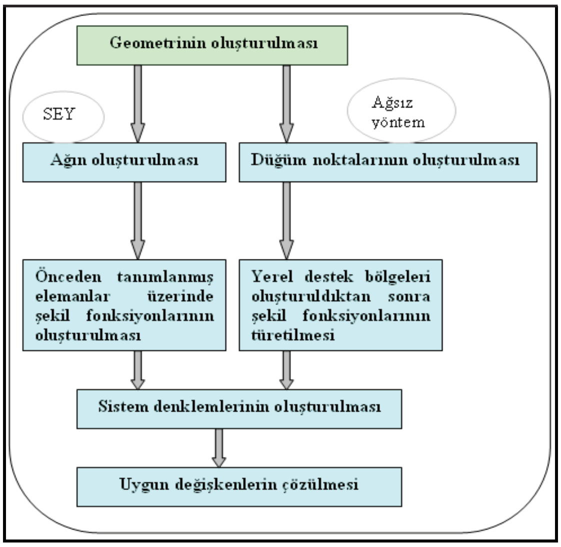
### 1. 4. Ağsız Yöntemlerin Çözüm Prosedürü

Bu kısımda temel olarak ağsız metotların çözüm aşamaları incelenmiştir.

Her iki metotta şekil fonksiyonları ve türetilmesi değişkenlik gösterir. Sonlu elemanlar yönteminde şekil fonksiyonları önceden tanımlanmıştır. Belirlenen şekil fonksiyonlar tüm elemanlar için aynıdır. Fakat ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonları seçilen yerel düğüm noktaları üzerinde genellikle sadece incelenen özel bir nokta için türetilir, ve incelenen nokta değiştikçe şekil fonksiyonları da değişir. Sonlu elamanlar yöntemi ile ağsız yöntemlere ait problem çözüm akış şeması Şekil 1'de verilmiştir. Ağsız yöntemler ile sonlu elemanlar yöntemi arasındaki temel farklılıklar dört özelliğe göre sınıflandırılmıştır.

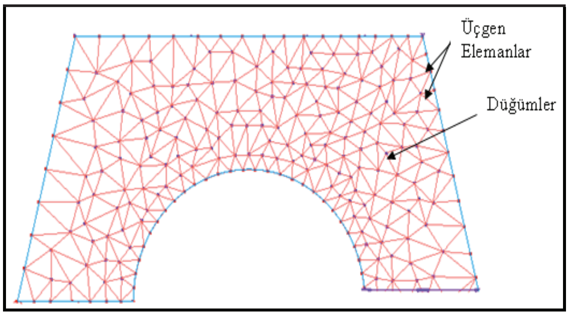
#### 1. 4. 1. Bölge Gösterimi

Yapılar, bileşenler veya bölgeler genellikle kompleks olup çeşitli yöntemlerle çözülebilmesi için uygun bir geometrik şekilde tanımlanması gerekir. Sonlu elemanlar yönteminde geometrik elemanının eğri yüzeyleri, eğri yüzeyli yüksek dereceli elemanlar kullanılarak modellenebilir. Bununla birlikte elemanlar sıralanarak geometri oluşturulmuş olur. Eğer lineer elemanlar kullanılarak modellenmiş bir bölgedeki düz kullanılırsa elemanların yüzeyleri düz çizgiler veya düz yüzeylerden oluşur. Şekil 2'de üçgen elemanlar çizgiler ve yüzeyler görülmektedir. Eğri yüzeylerinin gösterim doğruluğu elemanların sayısı ile kontrol edilmektedir.



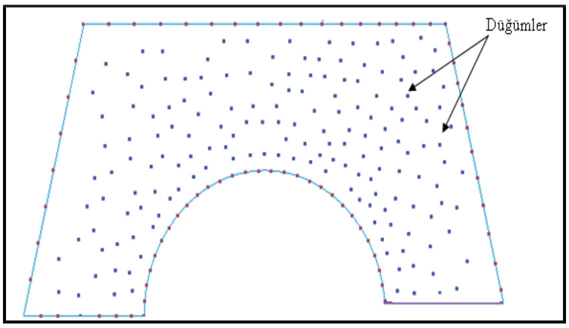

**Şekil 1. SEY ve ağsız yöntemler için problem çözüm akış şeması.**

Uygun dağıtılmış elemanlar daha hassas sonuçlar vermektedir. Ayrıca çözüm sonucunun doğruluk ve verimliliği kullanılan bilgisayar donanımı ve programına göre değişkenlik göstermektedir. Eleman sayısı ile çözüm süresi (CPU time) arasında orantı ilişkisi bulunmaktadır. Bu durumda tüm geometri boyunca değil, sadece daha hassas sonuçlar elde edilmek istenilen bölgelerde ağ bölgesinin, yani eleman sayısının artırılması gerekir. Ayrıca bölge, özel şekilli, üçgen veya dikdörtgen şekilli elemanlara düzgün olarak bölünmesi gerekir. Elemanlar arasında hiçbir boşluğun veya birbirleri üzerinde çakışmanın olmaması gerekir. Bunun yanında ağ türetme süresinde, elemanlar sahip oldukları süreklilerini koruyabilmeleri gerekir. Sayılan koşulların yerine getirilebilmesi için otomatik ağ oluşturan paket programlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Lakin günümüzde tüm bu olumsuzlukları karşılayan hazır bir paket programı bulunmamaktadır.




**Şekil 2. Üçgen elemanlarla modellenmiş bir çözüm bölgesi.**

Ağsız yöntemlerde problem bölgesi elemanlara bölünmeksizin, kritik kısımlarda sayıları rahatça artırılabilecek şekilde düğüm noktaları dağıtılarak modellenir (Şekil 3).



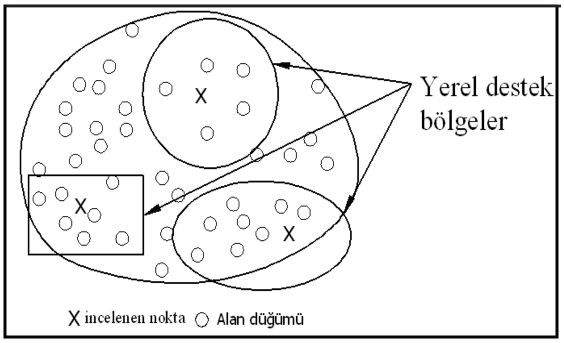

**Şekil 3. Düğümler ile modellenmiş bir çözüm bölgesi.**

### 1.4.2. İnterpolasyon Fonksiyonlarının Oluşturulması

Ağsız yöntemlerde, ağ oluşturulmadığından dolayı alan değişkenleri, yer değiştirme elemanları x=[*x,y,z*] problem geometrisinde yerel destek bölgesinin interpolasyon değerlerini kullanır.

$$u(x) = \Phi_i(x)u_i = \Phi^T(x)u_s \qquad i = 1, n \tag{1}$$

Denklem (1)'de n, yerel destek bölgesindeki düğüm sayısını, $u_i$, *i* nci düğüm noktasındaki tanımlı nodal alan değişkenini, $u_s$, *n* düğümlerindeki tüm alan değişkenlerini içeren vektörü, $\Phi_i(x)$, destek bölgesinde tanımlı düğüm noktalarını kullanarak oluşturulan *i.* nci düğüm noktasındaki şekil fonksiyonunu (interpolasyon fonksiyonunu) belirtir. *x* noktasının yerel destek bölgesi, o noktadaki interpolasyon fonksiyonun oluşturulmasına katkıda bulunacak düğüm noktalarını belirtir. Destek bölgesindeki her değişken *x* noktasında farklı boyut ve şekil özelliğine sahiptir. Yerel destek bölgeleri Şekil 4'te görüldüğü gibi genel olarak dairesel veya dikdörtgen olarak seçilir. Diğer taraftan SEY'de şekil fonksiyonları önceden tanımlanmış elemanlar üzerine inşa edilir. Eğer doğal koordinat sistemi kullanılırsa, şekil fonksiyonları bütün elemanlar için aynı özelliği teşkil etmektedir.




**Şekil 4. Ağsız metotlarda şekil fonksiyonlarının türetilmesinde kullanılan yerel destek bölgeleri.**

### 1. 4. 3. Sistem Denklemlerin Oluşturulması

Ağsız yöntemlerde, şekil fonksiyonları ve diferansiyel denklemin zayıflatılmış veya güçlü formları kullanarak, sistem denklemleri oluşturulur. Bu denklemler öncelikle yerel matris formunda, sonradan da tüm problem geometrisi için global matris formatında yazılır. Yerel denklemler birleştirilerek tüm sistem için denklem takımının oluşturulması SEY'deki gibidir. Tek fark olan simetrik olma veya olmama durumu kullanılan yönteme göre değişkenlik gösterir.

### 1. 4. 4. Global Ağsız Denklemlerin Çözülmesi

Bu aşama SEY ile aynı olup sadece çözüm için antisimetrik matrislere ihtiyaç duyulmaktadır.

## 2. AĞSIZ YÖNTEMLERİN ÇEŞİTLERİ

Ağsız yöntemlerin tarihsel gelişiminde 1977'den beri devam eden çalışmaların izleri görülmektedir. Bu tarihte Lucy (1977), Gingold ve Monaghan (1977) yıldızların ve toz bulutlarının araştırılmasında, sınırları kullanmayarak astrofiziksel doğanın modellenmesinde, Düzgün Parçacık Hidrodinamiği yöntemini (DPH) kullanmışlardır.

Ağsız yöntemlerle ilgili özellikle ağsız zayıf form metotları hakkında kayda değer gelişmeler 1990 yılından sonra görülmüştür. İlerleyen tarihlerde geniş araştırmalar yapılarak farklı metotlar geliştirilmiştir. Genel Sonlu Farklar Metodu (GSFM) (Liszka ve Orkizs, 1980), Difüze Eleman Yöntemi (DEY) (Nayroles v.d., 1992), Hücre Metod Partikülü (HMP) (Sulsky v.d., 1992), Yeniden Üretilen Çekirdek Parçacığı Yöntemi (YÜÇPY) (Liu v.d., 1995), Eleman Bağımsız Galerkin (EBG) (Belytschko v.d., 1994), Birim Parçacık Yöntemi (BPY) (Babuska ve Melenk, 1995;1997), h-p toz bulutu (Duarte ve Oden, 1995;1996), Sonlu Nokta Metodu (SNM) (Onate v.d., 1996), Bağımsız Ağ Metodu (BAM) (Yagawa ve Furukawa, 2000), Ağsız Yerel Sınır İntegrasyon Denklem Metodu (AYSİDM) ve Ağsız Yerel Petrov Galerkin Metodu (AYPGM) (Atluri ve Zhu, 1998) gibi ağsız metotlar geliştirilmiştir. Bu metotlar alan değişken interpolasyonları için ağa gereksinim duymazlar. Bir takım keyfi düğüm noktaları kullanılarak yaklaşık fonksiyonlar türetilir. Bu fonksiyonların türetilmesi için herhangi bir elemanın tanımlanmasına veya düğümler arasıdaki bağlantıların olmasına gerek yoktur.

Ağsız yöntemlerin kullanılmasıyla, uyarlanma analizi ve simülasyon için daha etkili ve kolay olup geleneksel sonlu elemanlar çözüm yönteminde karşılaşılan olumsuzluklar minimize edilmesi amacıyla ağsız yöntemlerin gelişimi devam etmektedir. Son yirmi yıldır birçok ağsız yöntem önerilmiş olup bu metotlarda zaman içerisinde kayda değer ilerlemeler görülmüştür. Ağsız yöntemler özelliklerine göre aşağıda üç temel gruba ayrılmışlardır.

### 2. 1. Formülasyon Prosedürüne Göre Sınıflandırma

Formülasyon prosedüre göre ağsız yöntemler üç ana kategoriye ayrılır.

#### 2. 1. 1. Zayıflatılmış Formlar Üzerine Temellendirilmiş Ağsız Yöntemler

Fiziksel problemi matematiksel olarak ifade eden diferansiyel denklemler, türevlendirilmiş sınır koşullarıyla farklı teknikler kullanılarak zayıflatılmış integral denklemlerine dönüştürülür. Zayıflatılmış formlar yardımıyla problem bölgesinde global veya yerel olarak oluşturulmuş arka plandaki hücreler kullanılarak nümerik integrasyon işlemleriyle birkaç cebirsel denklemlerle çözülür. Zayıflatılmış formlar üzerine kurulu ağsız yöntemler 1990 yılları başlarında geliştirilmiş olup gelişimi halen devam etmektedir. Bu metotlar hakkında birçok önemli makale yayınlanmıştır. 1992 yılında Nayroles difüzyon elemanlar metodunu kullanarak Galerkin zayıflatılmış formunu oluşturmuştur. 1994 yılında Belytschko eleman bağımsız Galerkin yöntemi hakkında makale yayınlamıştır. Belytschko ve çalışma arkadaşları birçok mekanik problemlerin çözümünde EBG metodunu kullanıp geliştirilmesine önemli katkılar sağlamışlardır. Zayıf form temelli ağsız yöntemler üzerinde 1994 yılından sonra hızlı bir şekilde incelemeler yapılmıştır, ve şu an birçok ağsız yöntem geliştirilmiştir. Temel olarak EBG ve Radyal Nokta İnterpolasyon yöntemi (RNİM) bu gruba girmektedirler. Diğer önemli zayıflatılmış formlar üzerine kurulu ağsız yöntem, yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemidir. YÜÇPY 1995 yılında Liu ve arkadaşları tarafından önerilip lineer olmayan ve yüksek deformasyon problemlerinde kullanılmıştır (Chen v.d., 1996). Aynı yöntem, elastik olmayan yapılar (Chen v.d., 1997), yapısal akustik (Uras v.d., 1997) ve akışkanlar mekaniği (Liu v.d., 1997) problemlerinde de kullanılmıştır. Diğer zayıf form temelli ağsız yöntemler hp-bulutu (Armando ve Oden, 1995), birimsel parçacık sonlu elemanlar metodu (Melenk ve Babuska, 1996), sonlu küresel metodu (De ve Bathe, 2000) gibi ağsız yöntem metotlarıdır (Yagawa ve Yamada, 1996).

##### 2. 1. 1. 1. Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi 1994 yılında Belytschko, Liu ve Gu tarafından önerilmiştir. Yöntem şekil fonksiyonları olarak hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları yaklaşımını kullanmaktadır. Temel olarak difuse eleman yöntemiyle aşağıda belirtilen üç fark dışında aynı yapıdadırlar.

Bu metotta, Gauss kuadratik noktalarında sayısal integrasyon işlemi için hücre yapısı kullanılır. Belytschko 1994 yılında yaptığı incelemede bu metodun doğruluk ve verimliliğinin sonlu elemanlarla karşılaştırıldığında daha iyi olduğunu öne sürmüştür. Fakat bu metod kuadratik noktalarda sayısal integrasyon işlemi için hücreler oluşturulması gerektiğinden gerçek ağsız metod olarak kabul edilmemektedir. Ayrıca çözüm süresi diğer metotlara nazaran daha fazladır. Aynı düğüm sayısı kullanıldığında problem çözme süresi eleman bağımsız Galerkin yöntemi, sonlu elemanlara göre 4 ile 20 katı arasında değişiklik göstermektedir. Bu metotta difüze eleman bağımsız Galerkin yönteminden farklı olarak sınır koşullarının uygulanması aşamasında Lagrange çarpanları kullanılmaktadır. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları kullanılırken, difüse eleman Galerkin yönteminde şekil fonksiyonları olarak ağırlıklı hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları kullanılmaktadır (Belytschko v.d., 1994).

#### 2. 1. 1. 2. Yeniden Üretilen Çekirdek Parçacığı Yöntemi

Düzgün parçacık hidrodinamiğinin gelişim aşamasında olduğu zamanda Liu ve çalışma arkadaşları bu metodu önermişlerdir. Yöntem temel olarak çekirdek fonksiyonu için düzenleyici bir çekirdeğin oluşturulmasıdır. Yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemi için *u(x)* yaklaşık fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$u^h(x) = \int C(x, x-y)\Phi_\alpha(x-y)u(y)d\Omega y \qquad (2)$$

Burada; $C(x, x-y)$, sınır koşulları uygulanacak yöntem için düzeltme fonksiyonu, $\alpha$ ifadesi ise kernel fonksiyonu için genişletme parametresidir. Yeniden üretilen denklem, lineer temel fonksiyonlarının polinom değerleri ile ifade edilmesi gerekmektedir. Ayrıca bu metotta çözüm yapılabilmesi için çekirdek etrafındaki noktaların değerlerinin bilinmesi de gerekir. Formülasyon için nümerik integrasyon yöntemi uygulanırsa aşağıdaki bağıntı elde edilmiş olur.

$$u^h(x) = \sum_I \Phi_a(x, x-\bar{x}_I)u(x_I)\Delta V_I = \sum_I \Phi_I(x)u_I \qquad (3)$$

Bu yaklaşımda sınır koşulları tam olarak uygulanamamaktadır. Bunun için bir takım dönüşümlerin yapılması gerekmektedir. Bu metod daha sonra frekans çözümü ve çift denge partikül metodu olarak genişletilmiştir (Liu v.d., 1995).

### 2. 1. 2. Sıralama Teknikleri Üzerine Temelli Ağsız Yöntemler

Bu çeşit ağsız yöntemlere ağsız kolakasyon metotları veya ağsız güçlü formlar denilmektedir. Ağsız güçlü formlar uzun bir geçmişe sahiptirler. Sonlu farklar metodu (SFY) (Girault, 1974; Liszka ve Orkisz, 1977; Snell v.d., 1981; Krok ve Orkisz, 1989), ağsız kolakasyon metotları, (Kansa, 1990, Wu, 1992; Liu, 2003) ve Sonlu Nokta Metodu (SNM) (Onate, 1996; 1998, 2001) tipik ağsız yöntemleri teşkil etmektedir.

### 2. 1. 3. Zayıf Form ve Kolakasyon Tekniklerin Bileşimi Üzerine Temelli, Ağsız Yöntemler

Bu çeşit metoda Ağsız Zayıf-Güçlü Formlar (AZGF) metodu denilmektedir. AZGF metodu 2001 yılında Liu ve Gu tarafından geliştirilmiştir. AZGF metodunda, sistem denklemlerini oluştururken hem zayıf, hem de yerel zayıf formlar aynı problem içinde kullanılır. Ama farklı düğüm noktalı gruplar için farklı denklemler ve sınır koşulları kullanılır. AZGF metodu integrasyon için en küçük hücreleri kullanır. Aynı zamanda kararlı ve mekanik denklemlerin çözümünde doğruluk payının yüksek olduğundan dolayı çözüm için ideal bir yöntemdir.

## 2. 2. Yaklaşık Fonksiyon Uyumuna Göre Sınıflandırma

Keyfi düğüm noktaları üzerine temellendirilen yaklaşık fonksiyon metodu, ağsız yöntemlerde en çok kullanılan sınıftır. Çünkü; fonksiyon yaklaşık olarak tanımlanıp değerlere göre sonuçlar alır. Bu sınıflandırma dört farklı şekilde tanımlanabilir.

### 2. 2. 1. Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımına Göre Temellendirilen Ağsız Yöntemler

Hareketli en küçük kareler yaklaşımı 1981 yılında matematikçi Lancaster ve Salkausnas tarafından yüzey konstrüksiyon amacıyla kullanılıp geliştirilmiştir (Lancaster ve Salkausnas, 1981). Hareketli en küçük kareler yöntemi kullanılarak birçok ağsız metodun zayıf formları geliştirilmiştir. Çünkü HEKY tüm problemin geometrisinde alan fonksiyonu için süreklilik yaklaşımını sağlayabilmektedir. Günümüzde de ağsız şekil fonksiyonları türetilmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Nayroles v.d., 1992 yılında, ilk olarak difüzyon elemanlar yönteminde HEKY şekil fonksiyonlarını kullanmıştır. Birçok metotta, şekil fonksiyonlarının türetilmesinde bu yaklaşım kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden bazıları eleman bağımsız Galerkin (Belytschko v.d., 1994) ve ağsız yerel Petrov Galerkin metotlarıdır.

#### 2. 2. 1. 1. Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi

1999 yılında Zhu, 2000 yılında Atluri ve Zhu iki çeşit ağsız yöntem önermişlerdir. Ağsız Yerel Sınır İntegral Denklem (AYSİD) metodu ve Ağsız Yerel Petrov Galerkin (AYPG) metodudur. Her iki metotta da şekil fonksiyonlarının türetilmesinde hareketli en küçük kareler yaklaşımı kullanılır. AYSİD metodu yerel sınırsal integral denklem formülasyonunu kullanırken AYPG metodu ise yerel simetrik zayıf formu kullanır. Her iki metotta da integraller düzgün şekillendirilmiş bölgelerde ve sınırlarda hesaplanır. Çözüm için herhangi bir ağ veya arka plan hücrelerinin tanımlanması gerekmemektedir. Bundan dolayı bu metot gerçek ağsız metot olarak isimlendirilir (Atluri ve Zhu, 1998).

### 2. 2. 2. Yaklaşık Fonksiyon için İntegral Gösterimli Metotlara Göre Temellendirilen Ağsız Yöntemler

Bu çeşit ağsız yöntemler, yaklaşık fonksiyonların integral formlarını kullanır. Yaygın olarak kullanılan Düzgün Parçacık Hidrodinamiği (DPH) (Lucy, 1977; Gingold ve Monaghan, 1977; Liu, 2003) ve YÜÇPY

(Liu v.d., 1995) olarak sıralanabilir. DPH ilk olarak üç boyutlu açık uzayda özel astrofiziksel problemlerin çözümü için geliştirilmiştir. DPH yaklaşımı, problemin kısmi diferansiyel denklemini oluşturmak için güçlü formları kullanır. Son zamanlarda DPH metodu yüksek hızlı çarpışma problemlerin simüle edilmesi amacıyla uygulanmaktadır. Liu ve çalışma arkadaşları patlama ve sızma uygulamalarının simüle edilmesi amacıyla DPH metodunu kullanmışlardır. Bu metot ayrıca şok dalgaları uygulamalarında da kullanılmıştır (Lam v.d., 2000).

#### 2. 2. 2. 1. Düzgün Parçacık Hidrodinamiği

Düzgün parçacık hidrodinamiği (DPH) en eski metot olup Gingold ve Monaghan tarafından (1977) yılında geliştirilmiştir. $\Omega$ problem bölgesinde *u(x)* tek fonksiyonun türetilmesi çekirdek yaklaşımına dayanır. Bu yaklaşım aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$u^h(x) = \int w(x-y)u(y)d\Omega \tag{4}$$

Burada; $u^h(x)$ ifadesi yaklaşık fonksiyonu gösterirken, *w(x-y)* ifadesi de bir çekirdek veya ağırlık fonksiyonunu belirtir. *h* parametresi de destek bölgesinin büyüklüğünü gösterir. Bu formülasyona nümerik kuadratik yöntem uygulanırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$u^h(x) = \sum_i w(x-x_i)U_i\Delta V_i = \sum_i \Phi_i(x)u_i \tag{5}$$

Burada; $\Delta V_i$, 3 boyutlu hacmi ifade eder. (i.nci düğüm noktası için), $\Phi_i(x)=w(x-x_i)\ \Delta V$, bağıntısı da yaklaşık fonksiyon için şekil fonksiyonunu göstermektedir (Chen v.d., 2006).

Bu metotla akışkan mekaniği problemlerinden galaksilerin dizilimi, nötron yıldızları, kara deliklerin birleşimi, süpernovaların, hatta evrenin modellenmesine kadar çok ilginç alanlarda kullanılmıştır (Gingold ve Monaghan, 1977).

#### 2. 2. 3. Nokta İnterpolasyon Metoduna Dayanan Ağsız Yöntemler

Nokta interpolasyon yöntemi (NİM), ağsız interpolasyon tekniği olup Liu ve çalışma arkadaşları ağsız zayıf form metotlarında, yerel olarak dağılan düğüm noktalarını kullanarak çeşitli fonksiyonları türetmek için bu yöntemi kullanmışlardır. HEKY'den ayrılan farkı Kronecker delta özelliği kullanılarak şekil fonksiyonlarının türetilebilmesidir.

#### 2. 2. 4. Diğer İnterpolasyon Metotlara Dayanan Ağsız Yöntemler

Bu metotlar temel olarak h-p bulutu (Duarte ve Oden, 1995) ve birimin parçalanması yöntemi olarak Melenk ve Babuska, (1997) gösterilebilir. 1995 yılında, Babuska ve Melenk, (1995;1996) yıllarında Duarte ve Oden hareketli en küçük kareler yaklaşımının birimsel parçacık özelliklerini taşıdıklarını göstermişlerdir. Duarte ve Oden birimin parçalanması yöntemi ile yeni fonksiyonlar türetmeyi amaçlarken h-p bulutu adı verilen yeni bir ağsız metod elde etmişlerdir. Duarte ve Oden p dereceli polinomları kullanarak ağsız yöntemler interpolantlarını bulmuşlardır. Aynı şekilde Babuska ve Melenk, klasik sonlu elemanlar yönteminin çözüm prosedürünü, geliştirdikleri yönteme uygulayarak birimsel parçacık sonlu elemanlar yöntemini (BPSEY) elde etmişlerdir (Babuska ve Melenk, 1995; Melenk ve Babuska, 1996; Duarte ve Oden, 1995;1996).

### 2. 3. Bölge Gösterimine Göre Sınıflandırma

Sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemlerinde olduğu gibi ağsız yöntemler de bölge tanımına göre bölge tipi ve sınır tipi ağsız yöntemler olmak üzere ikiye ayrılırlar.

#### 2. 3. 1. Bölge Tipi Ağsız Yöntemler

Bu yöntemlerde hem problem bölgesi hem de problemin sınırları, alan düğümleriyle gösterilir. Sistemin denklemleri tüm geometri için zayıf veya güçlü formlar kullanılarak yazılır.

#### 2. 3. 2. Sınır Tipi Ağsız Yöntemler

Sınır tipi ağsız metodları formüle etmek için sınır integral denklemleri kullanılır. Bu çeşit ağsız metotlarda, geometrinin sınırlarında düğüm noktaları yerleştirilmesiyle problem çözülür. Sınır integral denklemi, başlangıçta fonksiyonlar türetilmesiyle oluşturulur. Sistem denklemleri de ağsız şekil fonksiyonlarından yararlanılarak sınır düğüm noktalarından bulunur. Mukherjee ve çalışma arkadaşları sınır düğüm metodunu önermişlerdir. (Mukherjee, 1997; Kothnur v.d., 1999). Sınır tipi ağsız yöntemde, saçılan düğümlere bağlı kalarak problem bölgesi gösterilir.

## 3. SONUÇLAR

Bu çalışmada yaygın olarak kullanılan ağsız yöntemler hakkında temel bilgiler verilmiştir. Ağsız yöntemler tanıtılıp zaman içerisinde tarihsel gelişimleri incelenmiş, sonlu elemanlar yöntemiyle karşılaştırılmıştır. Ağsız yöntemler formülasyon prosedürüne, interpolasyon yaklaşımına ve bölge gösterimine göre üç ana kategoriye göre sınıflandırılıp günümüzde yaygın olarak kullanılan ağsız metotların bir kısmı incelenmiştir (Tablo 3).

**Tablo 3. Ağsız metotların sınıflandırılması (Liu ve Gu, 2005).**

| Sınıflandırma | Kategoriler | Ağsız Yöntem Örneği |
|---|---|---|
| Formülasyon prosedürüne göre | Güçlü form türetilmesine göre ağsız yöntemler | Ağsız sıralama metodu, NİM |
| | Zayıf form türetilmesine göre ağsız yöntemler | EBG, RNİM, AYPG, LRNİM |
| | Hem zayıf form hem de güçlü formların türetilmesine göre ağsız yöntemler | Ağsız zayıf güçlü form metotları |
| İnterpolasyon/ yaklaşık metoda göre | HEKY'ni kullanan ağsız yöntemler | EBG, AYPG |
| | Yaklaşık fonksiyon için integral açılımına kullanan ağsız yöntemler | DPH |
| | NİM'i kullanan ağsız yöntemler | RNİM, LRNİM |
| | Diğer interpolasyon gösterimini kullanan ağsız yöntemler | BPSEY, h-p bulutu |
| Bölge gösterimine göre | Bölge tipi ağsız yöntemler | DPH, EBG, RNİM, AYPG, LRNİM |
| | Sınır tipi ağsız yöntemler | YİSM, SRNİM, HSRNİM |

## 4. KISALTMALAR

AYPG : Ağsız yerel Petrov Galerkin
AYSİD : Ağsız yerel sınır integral denklemi
AZGF : Ağsız zayıf güçlü form
BPSEY : Birimin parçalanması yöntemi
BPY : Birimin parçalanması yöntemi
DPH : Düz parçacık hidrodinamiği
EBG : Eleman bağımsız Galerkin
GSFM : Genel sonlu fark metodu
HEKY : Hareketli en küçük kareler yaklaşımı
NİM : Nokta interpolasyon metodu
RNİM : Radyal nokta interpolasyon metodu
SEY : Sonlu elemanlar yöntemi
SİM : Sonlu interpolasyon metodu
SNM : Sonlu nokta metodu
YÜÇPY : Yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemi.

## KAYNAKLAR


Armando, D.C and Oden, J.T. 1995. Hp clouds-a meshless method to solve boundary value problems. TICAM Report 95-05, University of Texas at Austin.

Atluri, S.N. and Zhu, T. 1998. A new meshless local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics. Comp. Mech. (22), 117-127.

Babuska, I. and Melenk, J.M. 1995. The partition of unity finite element method, Technique Report BN-1185, Institute for Physics, Science and Technology, University of Maryland, Maryland.

Babuska, I. and Melenk, J.M. 1997. The partition of unity method, Int. J. Numer. Meth. Eng. 40 (4), 727-758.

Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. 1994. Elements-free Galerkin methods. Int. J. Numerical Methods Eng. (37), 229-256.

Chen, J., Pan, C., Wu, C. and Liu, W.L. 1996. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. (139), 195-227.

Chen, Y., Lee, J. and Eskandarian, A. 2006. Meshless Methods in Solid Mechanics, Springer New York.

Chen, J.S., Pan, C. and Wu, C.T. 1997. Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method. Comp. Mech., (19), 153-168.

De, S. and Bathe, K.J. 2000. The method of finite spheres. Computational Mechanics. (25), 329-345.

Duarte, C.A.M. and Oden, J.T. 1995. Hp clouds-A meshless method to solve boundary value problems, TICAM Report.

Duarte, C.A.M. and Oden, J.T. 1996. Hp adaptive method using clouds. Comput. Methods App. Mech. Eng. (139), 237-262.

Gingold, R.A. and Monaghan, J.J. 1977. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, Monthly Notices R. Astron. Soc. (181), 375–389.

Girault, V. 1974. Theory of a GDM on irregular networks. SIAM, J. Num. Anal. (11), 260-282.

Kansa, E.J. 1990. Multiquadrics-A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid dynamics. Computers Math. Applic., 19 (8/9), 127-145.

Kothnur, V.S., Mukherjee, S. and Mukherjee, Y.X. 1999. Two dimensional linear elasticity by the boundary node method. Int. J. of Solid and Structures. (36), 1129-1147.

Krok, J. and Orkisz, J. 1989. A Unified Approach to the FE and Generalized Variational FD in Nonlinear Mechanics, Concepts and Numerical Approach, Int. Symp. on Discretization Methods in Structural Mechanics IUTAM/IACM, Vienna, Austria,. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. 353-362.

Lam, K.Y, Liu G.R, Liu M.B and Zong, Z. 2000. Numerical simulation of underwater shock using SPH methodology. Computational Mechanics and Simulation of Underwater Explosion Effects- US/Singapore workshop, pp. 1-6, November 2000, Washington D.C.

Lancaster, P. and Salkausnas, K. 1981. Surfaces generated by moving least squares methods, Math. Comput. (37), 141-158.

Libersky, L.D., Petscheck, A.G., Carney, T.C., Hipp, J.R. and Allahdadi, F.A. 1993. High strain Lagrangian hydrodynamics, J. Comput. Phys. (109), 67–75.

Liszka, T. and Orkisz, J. 1977. Finite difference methods of arbitrary irregular meshes in non-linear problems of applied mechanics, In Proc. 4th Int. Conf. on Structural Mech. In Reactor Tech, San Francisco, USA.

Liszka, T. and Orkisz, J. 1980. The finite difference method for arbitrary meshes, Comp. Struct. (5), 45-58.

Liu, W.K., Jun, S. and Zhang, Y.F. 1995. Reproducing Kernel Particle Methods, Int. J. Numerical Methods Eng. (20), 1081-1106.

Liu, W.K., Jun, S. Sihling, D.T., Chen, Y. Hao, W. 1997. Multiresulution reproducing kernel particle for computational fluid dynamics, Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 24 (12), 1391-1415.

Liu, G.R. and Gu, Y.T. 2001. A Point Interpolation Method for two Dimensional Solids, Int. J. Numerical Methods Eng. (50), 937-951.

Liu, G.R. 2003. Mesh free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, CRC Press, Florida.

Liu, G.R. and Gu, Y.T. 2005. An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming, Springer, Netherlands.

Lucy, L.B. 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, Astron. J. 8 (12), 1013-1024.

Melenk, J.M. and Babuska, I. 1996. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, Comp. Meth. In Appl. Mech. Eng. (139), 289-314.

Monaghan, J.J. 1988. An introduction to SPH, Comput. Phys. Commun. 48 (1), 89–96.

Mukherjee, Y.X. ve Mukherjee, S. 1997. Boundary node method for potential problems. Int. J. Num. methods in Eng. (40), 797-815.

Nayroles, B. Touzot, G. and Villon, P. 1992. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Comp. Mech. (10), 307-318.

Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. 1996. A Finite point method in computational Mechanics. Applications to convective transport and fluid flow Int. J. Numer. Methods Eng. (39), 3839-3866.

Onate, E. 1998. Deviation of stabilized equations for numerical solution of advective-diffusive transport and fluid flow problems, Comp. Meth. Appl. Mecha. Eng. (151), 233-265.

Onate, E. 2001. Possibilities of Finite Calculus in Computational Mechanics, The First Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics, APCOM'01 Sydney, Australia, Nov. 20–23.

Snell, C., Vesey, D.G. and Mullord, P. 1981. The application of a general fFDM to some boundary value problems. Comp. Struct. (13), 547-552.

Sulsky, D., Chen, Z. and Schreyer, H.L. 1992. The application of a material-spatial numerical method to penetration, New Methods in transient Analysis, AMD-Vol. 143/AVP-Vol. ASME, New York.

Wu, Z. 1992. Hermite-Birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions. Approx. Theory Appl. (8), 1-10.

Yagawa, G. and Yamada, T. 1996. Free mesh method, a kind of meshless finite element method. Comput. Mech. (18),383-386.

Yagawa, G. and Furukawa, T. 2000. Recent devolopment of mesh free method, Int. J. Numer. Eng. (47), 1419-1443.

Uras, RA, Chang, CT, Chen, Y. and Liu, W.K. 1997. Multiresolution reproducing kernel particle method in acoustics. J. Comp. Acoustics. (5), 71-94.