PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
PAMUKKALE UNIVERSITY ENGINEERING COLLEGE
MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ
JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCES
YIL : 1996
CİLT : 2
SAYI : 1
SAYFA : 61-67

ÜÇGEN KESİTLİ HALKA SONLU ELEMANIN DİRENGENLİK MATRİSİ İÇİN BİR YÖNTEM

Durmuş GÜNAY*, Mehmet TEKELİOĞLU Alpay AYDEMİR***
*Sakarya Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü, Adapazarı
**Sakarya Üniversitesi,Teknik Eğitim Fakültesi, Adapazarı

ÖZET

Üçgen kesitli halka sonlu elemanların direngenlik matrisinin nümerik integrasyona başvurulmaksızın elde edilmesini sağlayan sabit matrisler, literatürde verilen ifadelerden hareketle bilgisayarda elde edilmiştir. Elemanın köşe düğümlerinin koordinatları ve malzeme özellikleri verildiği takdirde, halka sonlu elemanın direngenlik matrisi sözkonusu sabit matrisler yardımı ile kolayca elde edilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Üçgen halka elemanın direngenlik matrisi. Üçgen halka eleman. Eksenel simetrik cisimler.

A METHOD FOR STIFFNESS MATRIX OF TRIANGULAR TORUS ELEMENT

ABSTRACT

The matrices of constants for the stiffness matrices of triangular torus elements family are generated on computer by using the expression given in literature. After the matrices are generated once, it is easy to obtain the stiffness matrices for all member of family of triangular torus elements without need for numerical integration.

Key Words: Element stiffness matrix for triangular toroid. Triangular torus element. Axisymmetric solids.

1. GİRİŞ

Üçgen kesitli halka sonlu elemanın direngenlik matrisinin formülasyonu ilk olarak Utku (1968) tarafından yapılmıştır. Moser ve Swoboda (1978) düzlem üçgen sonlu elemanın direngenlik matrisinin açık ifadesini vermiştir. Bu ifade oldukça uzun terimlerden oluşmaktadır. Subramanian ve Bose (1982), düzlem üçgen elemanlar ailesine ait direngenlik matrisi ifadesini ve bu matrisi oluşturan matrisleri açık olarak vermiştir. Ancak halka elemanlar ailesi için yalnız direngenlik matrisi ifadesi verilmiştir. Bu çalışmada, halka sonlu elemanlar ailesinin direngenlik matrislerini oluşturmak için gerekli olan, sabitlerden oluşan matrisler bilgisayarda hesaplanarak açık olarak verilmiştir. Üçgen halka elemanlar ailesini, lineer (3-düğümlü), kuadratik (6-düğümlü) ve kübik (10-düğümlü) yerdeğiştirme fonksiyonlu elemanlar oluşturmaktadır.

2. DİRENGENLİK MATRİSİ

Kullanılan üçgen kesitli halka elemanlar ailesinde (şekil 1) elemanların her bir düğümü yerdeğiştirme cinsinden iki serbestlik derecelidir. Elemanın herhangi bir noktasının r ve z doğrultusundaki yerdeğiştirmeleri u ve v, şekil fonksiyonları yardımıyla, düğüm yerdeğiştirmeleri cinsinden,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & 0 \\ 0 & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Denk. (1) de **U** ve **V**, sırasıyla, elemanın düğümlerindeki, u ve v yerdeğiştirmelerinden oluşan vektörlerdir. **N**, alan koordinatları cinsinden şekil fonksiyonları vektörüdür. Kuadratik yerdeğiştirme elemanı için,

$\mathbf{U}^T = \{u_1, u_2, ..., u_6\}$

$\mathbf{V}^T = \{v_1, v_2, ..., v_6\}$

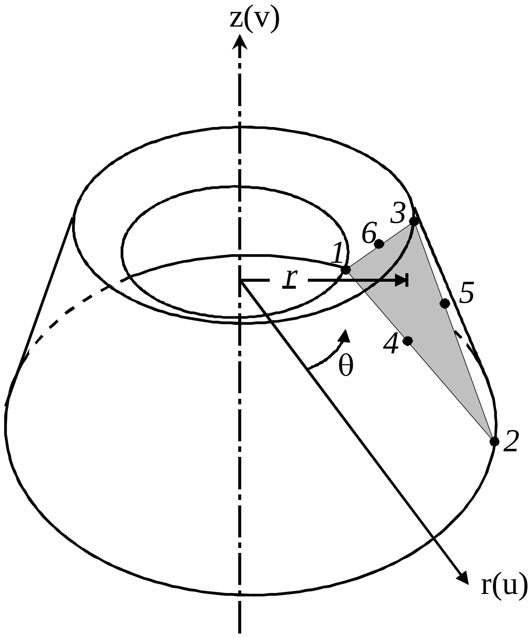
$\mathbf{N} = \{(2L_1 - 1)L_1, (2L_2 - 1)L_2, (3L_3 - 1)L_3, 4L_1L_2, 4L_2L_3, 4L_3L_1\}$

dır. **N** şekil fonksiyonları vektörü, $L_3 = 1 - L_1 - L_2$ yazılarak L_1 ve L_2 cinsinden,

$$\mathbf{N} = \psi^T \mathbf{Q} \tag{2}$$

formunda düzenlenebilir. Burada ψ vektörü ve **Q** matrisi elemandaki düğüm sayısı, r, mertebesindedir. ψ her elemanı $L_1^{m_i} L_2^{n_i}$ formunda değişkenlerden oluşan bir vektör, **Q** ise sabit bir matristir (Bak. Ek).

Kuadratik yer değiştirme elemanı için, (m_i, n_i) çifti (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2) dir.



Şekil 1 Üçgen kesitli halka sonlu eleman

Eksenel simetrik bir yükleme etkisindeki halka eleman için verilen zorlanma-yerdeğiştirme bağıntıları, u/r yerine $\varepsilon_\theta = u/\underline{r}$ yaklaşımı yapılarak,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial r \\ \partial v / \partial z \\ \partial u / \partial z + \partial v / \partial r \\ u / \underline{r} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

şeklindedir. Burada, $\underline{r} = (r_1 + r_2 + r_3) / 3$ dür.

(3) bağıntısından üçgen kesitli eleman üzerindeki herhangi bir noktanın zorlanmaları,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\Delta}\mathbf{Pg} \tag{4}$$

olarak ifade edilebilir. Burada,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & z_{23} & z_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{32} & r_{13} \\ 0 & r_{32} & r_{13} & z_{23} & z_{31} \\ (2\Delta/\underline{r}) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4a}$$

$$\mathbf{g}^T = \{u, \partial u/\partial L_1, \partial u/\partial L_2, \partial v/\partial L_1, \partial v/\partial L_2\} \tag{4b}$$

ve Δ, üçgen kesitli elemanın alanı olup

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

bağıntısından hesaplanır. Yukarıda, $r_{ij} = r_i - r_j$ ve $z_{ij} = z_i - z_j$ dir.

Eleman denklemleri çıkarılırken minimum potansiyel enerji prensibi kullanılacaktır. Potansiyel enerji, Π,

$$\Pi = U_p - V_p \tag{5}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Zorlanma enerjisi, U_p,

$$U_p = (1/2)(2\pi\underline{r})\iint \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}\ dr\ dz \tag{6}$$

dir. Denk. (6) da ε yerine Denk. (4) deki ifadesi ve koordinat dönüşümü yapılarak, dr dz = 2Δ dL_1 dL_2 yazılıp $\mathbf{G} = \mathbf{P}^T \mathbf{DP}$ tanımı kullanılarak,

$$U_p = \frac{\pi\ \underline{r}}{2\Delta} \int_0^1 \int_1^{1-L_1} \mathbf{g}^T \mathbf{G} \mathbf{g}\ dL_1\ dL_2 \tag{7}$$

elde edilir. Burada **G**, 5x5 boyutunda, elemanın malzemesine ve kesitinin geometrisine bağlı olan fakat üçgenin mertebesine bağlı olmayan, sabitlerden oluşan simetrik bir matristir.

g vektörünü, u ile u ve v nin türevleri oluşturmaktadır. u ve v nin L_1 ve L_2 ye göre türevleri, Denk. (2) deki **N** matrisi, Denk. (1) de kullanılarak kolayca hesaplanabilir. Örneğin,

$$\frac{\partial u}{\partial L_1} = \frac{\partial}{\partial L_1}(\psi^T \mathbf{Q}\,\mathbf{U}) = \Sigma_i \Sigma_j m_i Q_{ij} L_1^{m_i - 1} L_2^{n_i} U_j \tag{8}$$

olur. Toplama işlemi, i ve j, 1 den başlamak üzere elemanın düğüm sayısı r ye kadar arttırılarak yapılır.

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_1} L_1^p L_2^q \, dL_1 dL_2 = p!q!/(p+q+2)!$$

olduğu göz önüne alınarak Denk. (6) entegre edilirse,

$$U_P = \frac{1}{2}\{\mathbf{U}^T \ \ \mathbf{V}^T\}[\mathbf{K}^e]\begin{Bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{V}\end{Bmatrix} \tag{9}$$

elde edilir. Dış kuvvetler vektörü $\mathbf{f}^e$ olmak üzere, dış kuvvetlerin yaptığı iş,

$$\mathbf{V}_p = \{\mathbf{U}^T \ \ \mathbf{V}^T\}\{\mathbf{f}^e\} \tag{10}$$

şeklindedir. Minimum potansiyel enerji prensibi,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \begin{Bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{V}\end{Bmatrix}} = 0 \tag{11}$$

şartıyla ifade edilmiştir. Denk. (5), (9), (10) ve Denk. (11) gözönüne alındığında,

$$\frac{\partial}{\partial \begin{Bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{V}\end{Bmatrix}}\left(\frac{1}{2}\{\mathbf{U}^T \ \ \mathbf{V}^T\}[\mathbf{K}^e]\begin{Bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{V}\end{Bmatrix} - \{\mathbf{U}^T \ \ \mathbf{V}^T\}\{\mathbf{f}^e\}\right) = 0$$

olur. Türev alarak,

$$[\mathbf{K}^e] \begin{Bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{V}\end{Bmatrix} = \{\mathbf{f}^e\} \tag{12}$$

elde edilir. $[\mathbf{K}^e]$, elemanının direngenlik matrisi olup,

$$[\mathbf{K}^e] = \frac{\pi r}{\Delta}\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Y}^T & \mathbf{Z}\end{bmatrix} \tag{13}$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada,

$\mathbf{X} = G_{11}\,\mathbf{E} + G_{12}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + G_{13}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T) + G_{22}\,\mathbf{A} + G_{23}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) + G_{33}\,\mathbf{C}$

$\mathbf{Y} = G_{14}\,\mathbf{H} + G_{15}\,\mathbf{J} + G_{24}\,\mathbf{A} + G_{25}\,\mathbf{B} + G_{34}\,\mathbf{B}^T + G_{35}\,\mathbf{C}$

$\mathbf{Z} = G_{44}\,\mathbf{A} + G_{45}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) + G_{55}\,\mathbf{C}$

ve **A**, **C**, **E** simetrik kare matrisler; **B**, **H**, **J** simetrik olmayan kare mastrisler olup ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} m_k m_\ell Q_{ki} Q_{\ell j} F(m_k + m_\ell - 2,\ n_k + n_\ell)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} m_k n_\ell Q_{ki} Q_{\ell j} F(m_k + m_\ell - 1, n_k + n_\ell - 1)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} n_k n_\ell Q_{ki} Q_{\ell j} F(m_k + m_\ell, n_k + n_\ell - 2)$$

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} Q_{ki} Q_{\ell j} F(m_k + m_\ell, n_k + n_\ell)$$

$$H_{ij} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} m_\ell Q_{ki} Q_{\ell j} F(m_k + m_\ell - 1, n_k + n_\ell)$$

$$J_{ij} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} n_\ell Q_{ki} Q_{ij} F(m_k + m_\ell, n_k + n_\ell - 1)$$

$$F(m,n) = m!\,n!\,/\,(m + n + 2)! \tag{14}$$

Yukarıdaki G_{11} , G_{12} v.d. simetrik **G** matrisinin elemanlarıdır. Sabit matrisler bir kez elde edildikten sonra aynı matrisler kullanılarak her elemanın $[\mathbf{K}^e]$ matrisi oluşturulabilir. Elemanlara göre değişen sadece **G** matrisidir.

Elde edilen $[\mathbf{K}^e]$, elemanının düğüm yerdeğiştirmeleri vektörünün {**U** **V**} düzenine göredir. $[\mathbf{K}^e]$ yi alışılmış düzene yani yerdeğiştirme vektörünün $\{u_1, v_1, u_2, v_2 \ldots\}^T$ sırasına uygun şekle getirmek basit bir programlama mantığı ile gerçekleştirilir. $\{\mathbf{f}^e\}$ düğüm kuvvetleri vektörünün de buna uygun düzende olacağı açıktır.

2.1. Gerilme Hesabı

Gerilme zorlanma bağıntısı,

$\sigma = \mathbf{D}\,\varepsilon$

şeklinde tanımlanmıştır. ε yerine Denk. (4) deki ifade yazılırsa, elemanın herhangi bir noktasındaki gerilmeler,

$$\sigma = \frac{1}{2\Delta}\mathbf{DPg} \qquad (15)$$

ifadesiyle hesaplanır. Burada,

$$\sigma = \{\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_\theta\}^T \qquad (16)$$

dır. **P** Denk. (4a) da verilmiştir. **P**, elemanın derecesine bağımlı değildir.

Elemanın yerdeğiştirme fonksiyonunun derecesine göre değişen, **g** vektörüdür. Denk. (4b) de görüldüğü gibi **g**, yerdeğiştirme fonksiyonunun bileşenleri ve türevlerinden oluşmaktadır. Bu yüzden **g** vektörünün terimlerinin lineer, kuadratik ve kübik yerdeğiştirme fonksiyonu için gösterilmesi gerekli olacaktır.

a) Lineer yerdeğiştirme elemanı için **g** vektörünün elemanları, u, $\partial u/\partial L_1$, $\partial u/\partial L_2$, $\partial v/\partial L_1$, $\partial v/\partial L_2$ nin açık ifadeleri:

Denk. (1) ve (2) den,

$u = \mathbf{N\,U}$ veya $u = \psi^T\,\mathbf{Q\,U}$

şeklinde yazılabilir. Burada:

$\psi = \{1, L_1, L_2\}^T$

$\mathbf{U} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$

$$u = \{1, L_1, L_2\}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}$$

$$u = u_1\,L_1 + u_2\,L_2 + u_3\,(1 - L_1 - L_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial L_1} = \frac{\partial}{\partial L_1}(\psi^T\mathbf{Q\,U})$$

Q ve **U**, L_1 ve L_2 ye bağımlı olmadığından, türev işlemi sadece ψ de yapılarak diğer terimler bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial L_1} = \{0,1,0\}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix} = u_1 - u_3$$

$$\frac{\partial u}{\partial L_2} = \{0,0,1\}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix} = u_2 - u_3$$

$$\frac{\partial v}{\partial L_1} = \{0,1,0\}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix} = v_1 - v_2$$

$$\frac{\partial v}{\partial L_2} = \{0,0,1\}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix} = v_2 - v_3$$

b) Kuadratik yerdeğiştirme elemanı için **g** vektörünün elemanları:

$u = \psi^T\ \mathbf{Q\,U}$

Burada,

$\psi = \{1, L_1, L_2, L^2{}_1, L_1 L_2, L^2{}_2\}^T$

$\mathbf{U} = \{u_1, u_2, ..., u_6\}^T$

$\mathbf{V} = \{v_1, v_2, ..., v_6\}^T$

olup lineer yerdeğiştirme elemanında yapılana benzer şekilde **g** vektörünün terimleri bulunabilir:

$$\frac{\partial u}{\partial L_1} = \{0,\ 1,\ 0,\ 2L,\ L,\ 0\}[\mathbf{Q}]\{\mathbf{U}\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial L_2} = \{0,\ 0,\ 1,\ 0,\ L_1,\ 2L_2\}[\mathbf{Q}]\{\mathbf{U}\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial L_1} = \{0,\ 1,\ 0,\ 2L_1,\ L_2,\ 0\}[\mathbf{Q}]\{\mathbf{V}\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial L_2} = \{0,\ 0,\ 1,\ 0,\ L_1,\ 2L_2\}[\mathbf{Q}]\{\mathbf{V}\}$$

c) Kübik yerdeğiştirme elemanı için **g** vektörünün elemanları yukardakilere benzer şekilde belirlenebilir. Burada,

$u = \{1, L_1, L_2, L^2{}_1, L_1 I_2, L^2{}_2, L^3{}_1, L^2{}_1 L_2, L_1 L^2{}_2,$

$L^3_2\}[\mathbf{Q}]\ \{\mathbf{U}\}$

olup yerdeğiştirme vektörü

$\mathbf{U}^T = \{u_1, u_2, \ldots, u_{10}\}$

şeklindedir.

2.2 ψ Vektörleri, Sabit Q ve A, B, C, E, H, J Matrisleri

$\psi^T = \{1, L_1, L_2, L^2_1, L_1 L_2, L^2_2, L^3_1, L^2_1 L_2, L_1 L^2_2,$

$L^3_2\}$

$(m_i, n_i) \rightarrow (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2),$
$(3,0), (0,1), (1,2), (0,3)$

ψ vektörü, kübik yerdeğiştirme fonksiyonuna aittir. Ancak baştan ilk üç terim lineer, ilk altı terim kuadratik yerdeğiştirme elemanının ψ vektörünü oluşturmaktadır. Yani ψ vektöründe eleman düğüm sayısı kadar terim bulunmaktadır.

Benzer şekilde yukarıdaki (m_i, n_i) çiftinde de ilk üç çift lineer, ilk altı çift kuadratik yerdeğiştirme elemanının (m_i, n_i) çiftleri olmaktadır. **Q** matrisleri

ile lineer, kuadratik ve kübik yerdeğiştirme elemanlarının direngenlik matrislerinin hesaplanması için gerekli olan **A**, **B**, **C**, **E**, **H**, **J** matrisleri ekte verilmiştir. Bu sabit matrislerde alt indisler 1, 2 ve 3, sırasıyla ilgili matrisin lineer, kuadratik ve kübik yerdeğiştirmeye ait olduğunu göstermektedir

3. SONUÇ

Malzeme özellikleri ve halka elemanın kesiti ile üçgenin köşe düğümlerinin koordinatları verildiğinde **G** matrisi hesaplandıktan sonra, bu çalışmada (Ek)te verilen **A**, **B**, **C**, **E**, **H**, **J** matrisleri kullanılarak halka kesitli elemanlar ailesinin her elemanı için eleman direngenlik matrisi nümerik integrasyona gerek kalmaksızın kolayca hesaplanabilmektedir. Bu yöntem eksenel simetrik disk problemine uygulanarak test edilmiştir (Günay, 1989).

4. KAYNAKÇA

Bathe, Klaus-Jurgen, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.

Günay, D., "The Study of the Stress Distribution in Orthotropic Rotating Disks by the Finite Element Method", Dokuz Eylül University, Institute of Science and Engineering, *Research Papers*, FBE/MAK–89 AR–75, İzmir.

Moser, K. and Swoboda, G., "Explicit Stiffness Matrix of The Linearly Varying Strain Triangular Element" Computers and Structures, 8, 311-314 (1978), Pergamon Press, Britain.

Subramanian, G. and Bose, C.J., "Convenient Generation of Stiffness Matrices For The Family of Plane Triangular Elements", Computers and Structures, 15, 85-89 (1982), Pergamon Press, Britain.

Utku, Ş., "Explicit Expressions for Triangular Torus Element Stiffness Matrix", Journal AIAA, 6, ll74-1176 (1968).

EK

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -11 & 0 & 0 & -9 & 18 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & -45 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & -9 & -9 & 9 & -45 & -45 & 9 & 54 \\ 0 & -9 & 18 & 0 & 0 & 36 & -45 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & 27 & 0 & 0 & 27 & 54 & -27 & -54 \\ 0 & 0 & -27 & 0 & 27 & -27 & 54 & 27 & 0 & -54 \\ 0 & 9 & -9 & 0 & 0 & -27 & 27 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 0 & \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 8 & & \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 & \\ -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 3 & & & & \\ 0 & 1 & 3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 8 & & \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 8 & \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_1 = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_1 = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \frac{1}{180}\begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ 0 & 3 & & & & \\ 0 & 0 & 3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 16 & & \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 16 \end{bmatrix} \qquad H_2 = \frac{1}{180}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 18 \\ 18 & 0 & 6 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 24 \\ 18 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_2 = \frac{1}{180}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 6 \\ 0 & 18 & 6 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{160}\begin{bmatrix} 68 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ -14 & 0 & 68 & & & & & & & \\ 6 & 0 & -6 & 270 & & & & & & \\ 6 & 0 & -6 & -54 & 270 & & & & & \\ -6 & 0 & 6 & 54 & -270 & 270 & & & & \\ -6 & 0 & 6 & 54 & 54 & -54 & 270 & & & \\ 54 & 0 & -108 & 0 & 0 & 0 & 0 & 270 & & \\ -108 & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 & -216 & 270 & \\ 0 & 0 & 0 & -324 & 0 & 0 & -324 & 0 & 0 & 648 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{1}{160}\begin{bmatrix} 0 & 14 & -14 & 114 & -48 & 0 & 0 & 48 & -114 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 68 & -6 & -6 & 54 & -108 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -48 & -6 & 135 & 135 & 27 & 27 & 27 & -135 & -162 \\ 0 & 114 & -6 & -27 & 135 & -135 & 27 & 27 & 27 & -162 \\ 0 & -114 & 6 & 27 & -135 & 135 & -27 & -27 & -27 & 162 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
0 & 48 & 6 & 27 & 27 & -189 & 135 & 135 & -27 & -162 \\
0 & 0 & -108 & 27 & 27 & -27 & 135 & 135 & -27 & -162 \\
0 & 0 & 54 & -135 & 27 & -27 & -27 & -189 & 135 & 162 \\
0 & 0 & 0 & -162 & -162 & 162 & -162 & -162 & 162 & 324
\end{vmatrix}
$$

$$
\mathbf{C}_3 = \frac{1}{160}
\begin{vmatrix}
0 & & & & & & & & & \\
0 & 68 & & & & & & & & \\
0 & -14 & 68 & & & & & & & \\
0 & 6 & -6 & 270 & & & & & & \\
0 & 6 & -6 & -54 & 270 & & & & & \\
0 & -108 & 54 & 0 & 0 & 270 & & & & \\
0 & 54 & -108 & 0 & 0 & -216 & 270 & & & \\
0 & -6 & 6 & 54 & 54 & 0 & 0 & 270 & & \\
0 & -6 & 6 & -270 & 54 & 0 & 0 & -54 & 270 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -324 & 0 & 0 & -324 & 0 & 648
\end{vmatrix}
$$

$$
\mathbf{E}_3 = \frac{1}{10^5}
\begin{vmatrix}
565 & & & & & & & & & \\
82 & 565 & & & & & & & & \\
82 & 82 & 565 & & & & & & & \\
134 & 0 & 201 & 4018 & & & & & & \\
0 & 134 & 201 & 0 & 4018 & & & & & \\
201 & 134 & 0 & 0 & 2009 & 4018 & & & & \\
201 & 0 & 134 & 0 & 0 & 0 & 4018 & & & \\
0 & 201 & 134 & 0 & 0 & 0 & 2009 & 4018 & & \\
134 & 201 & 0 & 2009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4018 & \\
268 & 268 & 268 & 1205 & 1205 & 1205 & 1205 & 1205 & 1205 & 14464
\end{vmatrix}
$$

$$
\mathbf{H}_3 = \frac{1}{10^5}
\begin{vmatrix}
3810 & 0 & 0 & 0 & 1339 & 0 & 0 & 3482 & 0 & 1607 \\
1131 & 0 & 0 & 0 & 5893 & 0 & 2143 & 0 & 0 & 0 \\
1131 & 0 & 0 & 1339 & 1339 & 0 & 268 & 6161 & 0 & 0 \\
6161 & 0 & 0 & 19286 & 0 & 7232 & 4821 & 4821 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2411 & 19286 & 0 & 7232 & 2411 & 2411 & 0 \\
1339 & 0 & 3482 & 0 & 19286 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9643 \\
1339 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7232 & 0 & 9643 & 0 & 24107 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2411 & 0 & 0 & 9643 & 14464 \\
6161 & 0 & 3482 & 9643 & 0 & 2411 & 4821 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1607 & 24107 & 9643 & 0 & 0 & 0 & 14464 & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
\mathbf{J}_3 = \frac{1}{10^5}
\begin{vmatrix}
0 & 1131 & 0 & 5893 & 0 & 0 & 0 & 2143 & 0 & 0 \\
0 & 3810 & 0 & 1339 & 0 & 0 & 3482 & 0 & 0 & 1607 \\
0 & 1131 & 0 & 1339 & 1339 & 0 & 6161 & 268 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 19286 & 2411 & 2411 & 2411 & 7232 & 0 & 0 \\
0 & 6161 & 0 & 0 & 19286 & 0 & 4821 & 4821 & 7232 & 0 \\
0 & 6161 & 3482 & 0 & 9643 & 0 & 0 & 4821 & 2411 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9643 & 0 & 0 & 2411 & 14464 \\
0 & 1339 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9643 & 0 & 7232 & 24107 \\
0 & 1339 & 3482 & 19286 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9643 \\
0 & 0 & 1607 & 9643 & 24107 & 14464 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$