
Araştırma Makalesi / Research Article

Üçüncü Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemin Homotopy Pertürbasyon Metodu ile Çözümü

Mahmut MODANLI^{1*}, Hüseyin EŞ¹

¹Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Şanlıurfa
(ORCID: [0000-0002-7743-3512](https://orcid.org/0000-0002-7743-3512)) (ORCID: [0000-0002-4860-0502](https://orcid.org/0000-0002-4860-0502))

Öz

Bu çalışmada, başlangıç değerlerine bağlı olarak verilen üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemin çözümü homotopy pertürbasyon metodu ile incelendi. Yöntemi test etmek için bir örnek problem kullanıldı. Bu örnek problem üzerinde elde edilen çözümün tam çözüme denk olduğu görüldü. Matlab programı kullanılarak tam çözümün grafiği elde edildi.

Anahtar kelimeler: Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklem, Homotopy pertürbasyon metodu, Tam çözüm, Yaklaşık çözüm.

Solution of Third Order Partial Differential Equation by Homotopy Perturbation Method

Abstract

In this study, the solution of the third-order partial differential equation given depending on the initial values is analyzed by homotopy perturbation method. An example problem is used to test the method. It is seen that the solution obtained on this example problem was equivalent to the exact solution. The graph of the exact solution is obtained using the Matlab program.

Keywords: Third order partial differential equation, Homotopy perturbation method, Exact solution, Approximate solution.

1. Giriş

Kısmi diferansiyel denklemler tıp, mühendislik, fizik, sismoloji, termodinamik, akışkan mekaniği gibi pek çok bilim dallarında uygulama alanına sahiptir. Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin tam ve yaklaşık çözümleri ile ilgili literatürde epey çalışma yapılmıştır. Fiber optik, iletişim teorisi ve taşıma gibi fiziksel ve mühendislik uygulamalarında kullanılabilecek Fisher benzeri lineer olmayanlığı içeren üçüncü mertebeden yarı lineer ve lineer olmayan dağılımlı denklemlerin, yani dağılım-tepkime modellerinin tam çözümleri elde edildi [1]. [2] de zaman değişkeninin üçüncü mertebeden bir türevi ile birleşen lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemi çalışıldı. Lineer olmayan dalga denklemlerinin yürüyen dalga çözümlerini elde etmedeki etkinliğini göstermek için, A. Degasperis, D. Holm ve A. Hone tarafından verilen bir üçüncü mertebeden dağılımlı kısmi diferansiyel denklemler ailesi incelendi [3]. Soliton tipi çözümleri belirlemek için üçüncü mertebeden evrim denklemini araştırmak için Hirota bilinear yöntemi kullanıldı [4]. Yarı-ayrıklaştırılmış adveksiyon difüzyon reaksiyonunun zaman entegrasyonu için yeni üç aşamalı W-yöntemleri verilip kısmi diferansiyel denklemler özellikle, komütatörle ilgili gerçekçi bir varsayım altında, üçüncü mertebeden W yöntemlerinin iki üç parametrik ailesi elde edildi [5]. Optik solitonların uzay-zamansal dağılım, parabolik yasa lineer olmama durumu (kübik-kuintik lineer olmama), detuning, modlar arası

*Sorumlu yazar: mmodanli@harran.edu.tr

Geliş Tarihi: 12.08.2021, Kabul Tarihi: 02.11.2021

dağılım, kendiliğinden dikleşme, Raman etkisi, lineer olmayan dağılım ve üçüncü mertebeden mevcudiyetinde lineer olmayan meta malzemeler aracılığıyla yayılmasını incelendi [6].

Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için sonlu fark metodu [7], en küçük kareler yöntemiyle birleştirilmiş üçüncü dereceden B-spline metodu [8], Sonlu elemanlar yöntemi [9] ve Homotopy pertürbasyon metodu [10, 11, 12, 13] kullanılmıştır.

Bu çalışmada, üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denkleminin çözümü homotopy pertürbasyon metodu kullanılarak

$$\begin{cases} U_{ttt}(t, x) + \alpha U_{tt}(t, x) + \beta U_t(t, x) + kU(t, x) = \lambda U_{txx}(t, x) \\ + U_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t, \\ U(0, x) = \varphi_0(x), \quad U_t(0, x) = \varphi_1(x), \quad U_{tt}(0, x) = \varphi_2(x) \end{cases} \quad (1)$$

incelendi. (1) denklemi; $\lambda = 0$ için üçüncü mertebeden zamanla değişen sistem [14], $\lambda \neq 0$ için denklem üçüncü mertebeden pseudo kısmi diferansiyel denklemi olarak adlandırılabilir. (1) problemi ile ilgili literatürde herhangi bir çalışma yapılmadığından bu problemi çözmek büyük öneme sahiptir. Dolayısıyla homotopy pertürbasyon metodu kullanılarak bu problemin çözümünü elde edildi. Elde edilen bu çözümün tam çözüme karşılık geldiği görüldü. Fakat bu problemin tam çözümünün bilinen Laplace dönüşüm metodu ile elde edilmesi mümkün olmamaktadır. Çünkü $U_{txx}(t, x)$ kısmi türevinden dolayı daha fazla başlangıç ve sınır değerlerine gereksinim duymaktadır. Bu da homotopy pertürbasyon metodunun bu problemin çözümü için daha avantajlı ve etkili olduğunu gösterir.

Özellikle bu problem ağ tasarımı, akışkan dinamiğinde, dalga hareketi, telekomünikasyon, elektromanyetik, dalga dağılımı ve elektronik dinamiğinde kullanılır [15, 16].

2. Materyal ve Metot

2.1. Homotopy Pertürbasyon Metodu

İlk olarak, homotopy pertürbasyon yöntemini [17,18] çalışmalarında olduğu gibi homotopynin yeni modifikasyonunun algoritmasını elde edeceğiz. Bunun için, bu metodu aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemini

$$L(u) + N(u) = f(r), \quad r \in \Omega, \quad (2)$$

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma$$

sınır değerleri için elde edelim. Burada L bir lineer operatör, N lineer olmayan bir operatör, B bir sınır, Γ Ω bölgesinin sınır operatörü ve $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyondur. Homotopy tekniğiyle,

$$v(r, p) : \Omega \rightarrow \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$$

olmak üzere,

$$H(v, p) = (1 - p) [L(v) - L(U_0)] + p [L(v) + N(v) - f(r)] = 0 \quad (3)$$

dir. Burada $p \in [0, 1]$ bir parametre ve U_0 ise sınır değerlerini karşılayan başlangıç koşuludur. O halde (2) ve (3) denklemlerinden

$$H(v, 0) = L(v) - L(U_0) = 0, \quad (4)$$

$$H(v, 1) = L(v) + N(v) - f(r) = 0 \quad (5)$$

formülleri elde edilir.

Bu yüzden 0'dan 1'e p nin değişim işlemi, $v(r, p)$ nin $U_0(r)$ den $U(r)$ dönüşümüdür. Topolojide $L(v) - L(U_0)$ ve $L(v) + N(v) - f(r)$ homotopyktir. Bu varsayım (3) denkleminin çözümüdür ve (4) denkleminin p kuvvet serisi ifadesi

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \tag{6}$$

şeklindedir. Bu da $p = 1$ alınırsa (1) denkleminin yaklaşık çözümü

$$v = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \tag{7}$$

formülü gibi olur. (7) serisinin yakınsaklığının ispatı [17, 18] te verilmiştir.

2.2. Üçüncü Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklem için Homotopy Pertürbasyon Metodu

Şimdi (1) denkleminin çözümü için Homotopy pertürbasyon metodunu oluşturalım. (1) probleminin Laplace dönüşümü alınırsa

$$U(s, x) = \frac{1}{s^3} [s^2\varphi_0(x) + s\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + F(s, x)] + L\{pU_{ttx}(t, x) + U_{xx}\} + F(s, x) + L[-\alpha U_{tt}(t, x) - \beta U_t(t, x) - kU(t, x)]$$

bulunur. Burada $U(s, x)$, $U(t, x)$ ifadesinin ve $F(s, x)$, $F(t, x)$ ifadesinin Laplace dönüşümüdür. $U(s, x)$

$$U(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k U_k(s, x)$$

formunda bulunabilir. Burada $i = 0, 1, 2, \dots$ için $U_i(s, x)$ in bilinmeyen fonksiyonudur. Bu durumda

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i U_i(s, x) = \frac{1}{s^3} [s^2\varphi_0(x) + S\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + F(s, x)] - \frac{p}{s^3} L\{\alpha U_{tt}(t, x) + \beta U_t(t, x) + kU(t, x) - \lambda U_{ttx}(t, x) - U_{xx}(t, x)\}$$

formülü elde edilebilir. p 'nin kuvvetlerinin katsayılarının karşılaştırılması ile

$$p^0: U_0(s, x) = \frac{1}{s^3} [s^2\varphi_0(x) + S\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + F(s, x)],$$

$$p^1: U_1(s, x) = \frac{1}{s^3} L\{\alpha(U_0)_{tt}(t, x) + \beta(U_0)_t(t, x) + k(U_0)(t, x) - \lambda(U_0)_{ttx}(t, x) - (U_0)_{xx}(t, x)\},$$

$$p^2: U_2(s, x) = \frac{1}{s^3} L\{\alpha(U_1)_{tt}(t, x) + \beta(U_1)_t(t, x) + k(U_1)(t, x) - \lambda(U_1)_{ttx}(t, x) - (U_1)_{xx}(t, x)\},$$

⋮

$$p^{n+1}: U_{n+1}(s, x) = (-1)^{n+1} \frac{1}{s^3} L\{\alpha(U_n)_{tt}(t, x) + \beta(U_n)_t(t, x) + k(U_n)(t, x) - \lambda(U_n)_{ttx}(t, x) - (U_n)_{xx}(t, x)\} \tag{8}$$

formülleri bulunur.

$p \rightarrow 1$ iken, (1) probleminin çözümü

$$H_n(s, x) = \sum_{i=0}^n p^i U_i(s, x) \tag{9}$$

olarak bulunur. (9) formülünün ters Laplace dönüşümü alınır,

$$U(t, x) \cong U_n(t, x) = L^{-1}\{H_n(s, x)\} \tag{10}$$

yazılır. Burada

$$U_n(t, x) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^{2p} d_i H_n \left(i \frac{\ln 2}{t}, x \right), \quad p > 0$$

ve

$$d_i = (-1)^{i+p} \sum_{j=\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^{\min(i,p)} \frac{i^p (2j)!}{(p-j)! (j-1)! (i-1)! (2j-1)!}$$

dır.

3. Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde homotopy pertürbasyon metodunu kullanarak üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümünü bir örnek problem ile test edeceğiz. Bu metodu kullanarak aşağıdaki örneği çözmeye çalışalım.

3.1. Örnek Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denkleminin çözümünü

$$\begin{cases} U_{ttt}(t, x) + 3U_{tt}(t, x) + 3U_t(t, x) + U(t, x) = U_{txx}(t, x) + U_{xx}(t, x) \\ U(0, x) = \sin x, \quad U_t(0, x) = -2\sin x, \quad U_{tt}(0, x) = 4\sin x, \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0 \end{cases}$$

homotopy pertürbasyon metodu ile bulalım. Verilen denklemin her tarafının Laplace dönüşümü alınır

$$L\{U_{ttt}(t, x)\} = -3L\{U_{tt}(t, x)\} - 3L\{U_t(t, x)\} - 3L\{U(t, x)\} + L\{U_{txx}(t, x)\} + L\{U_{xx}(t, x)\}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem açılırsa

$$\begin{aligned} s^3 U(s, x) - s^2 U(0, x) - s U_t(0, x) - U_{tt}(0, x) \\ = L\{-3 U_{tt}(t, x) - 3 U_t(t, x) - 3 U(t, x) + U_{txx}(t, x) + U_{xx}(t, x)\} \end{aligned}$$

denklemini ve buradan da verilen başlangıç değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} s^3 U(s, x) - s^2 \sin x + 2s \sin x - 4 \sin x \\ = L\{-3 U_{tt}(t, x) - 3 U_t(t, x) - 3 U(t, x) + U_{txx}(t, x) + U_{xx}(t, x)\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} s^3 U(s, x) = s^2 \sin x - 2s \sin x + 4 \sin x \\ + L\{-3 U_{tt}(t, x) - 3 U_t(t, x) - 3 U(t, x) + U_{txx}(t, x) + U_{xx}(t, x)\} \end{aligned}$$

olup buradan da

$$U(s, x) = \frac{\sin x}{s} - \frac{2\sin x}{s^2} + \frac{2\sin x}{s^3} + \frac{1}{s^3} L\{-3 U_{tt}(t, x) - 3U_t(t, x) - 3U(t, x) + U_{txx}(t, x) + U_{xx}(t, x)\} \quad (11)$$

denklemi elde edilir. (8) ve (11) formülleri kullanılırsa

$$U_0(s, x) = \left\{ \frac{\sin x}{s} - \frac{2\sin x}{s^2} + \frac{2\sin x}{s^3} \right\} \quad (12)$$

yazılabilir. (12) denkleminin ters Laplace dönüşümü alınır

$$L^{-1}\{U_0(s, x)\} = L^{-1}\left\{ \frac{\sin x}{s} - \frac{2\sin x}{s^2} + \frac{2\sin x}{s^3} \right\}$$

olup buradan da

$$U_0(t, x) = \sin x - 2t\sin x + 2t^2\sin x$$

ve

$$U_0(t, x) = (1 - 2t + 2t^2)\sin x$$

bulunur. (8) formülünden

$$U_{n+1}(t, x) = \frac{1}{s^3} L\{-3 (U_n)_{tt}(t, x) - 3(U_n)_t(t, x) - 3(U_n)(t, x) + (U_n)_{txx}(t, x) + (U_n)_{xx}(t, x)\}$$

formülü yazılabilir. Bu son formülden,

$$\begin{aligned} U_1(t, x) &= \frac{1}{s^3} L\{-3 (U_0)_{tt}(t, x) - 3(U_0)_t(t, x) - 3(U_0)(t, x) + (U_0)_{txx}(t, x) + (U_0)_{xx}(t, x)\} \\ &= \frac{1}{s^3} L\{-3.4 - 3(-2 + 4t) - 3(1 - 2t + 2t^2) + (2 - 4t) - (1 - 2t + 2t^2)\} \sin x \end{aligned}$$

ve

$$U_1(s, x) = \left(-\frac{8}{s^4} - \frac{8}{s^5} - \frac{16}{s^6} \right) \sin x$$

bulunur. Son formülün ters Laplace dönüşümü alınır

$$L^{-1}\{U_1(s, x)\} = L^{-1}\left\{ \left(-\frac{8}{s^4} - \frac{8}{s^5} - \frac{16}{s^6} \right) \sin x \right\}$$

olup buradan da

$$U_1(t, x) = -\left(\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{2}{15}t^5 \right) \sin x$$

elde edilir. Yukarıdakine benzer prosedür uygulanır

$$U_2(t, x) = \frac{1}{s^3} L\{-3 (U_1)_{tt}(t, x) - 3(U_1)_t(t, x) - 3(U_1)(t, x) + (U_1)_{txx}(t, x) + (U_1)_{xx}(t, x)\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{s^3} L \left\{ \left(24t^1 + 12t^2 + 8t^3 + 12t^2 + 4t^3 + 2t^4 + 4t^3 + t^4 + \frac{2}{5}t^5 + 4t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{2}{15}t^5 \right) \sin x \right\} \\
 &= \frac{1}{s^3} L \left\{ \left(\frac{8}{15}t^5 + 4t^4 + \frac{56}{3}t^3 + 28t^2 + 24t^1 \right) \sin x \right\} \\
 &= \left(\frac{64}{s^9} + \frac{96}{s^8} + \frac{112}{s^7} + \frac{56}{s^6} + \frac{24}{s^5} \right) \sin x
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu denklemin de ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\{U_2(s, x)\} = L^{-1} \left\{ \left(\frac{64}{s^9} + \frac{96}{s^8} + \frac{112}{s^7} + \frac{56}{s^6} + \frac{24}{s^5} \right) \sin x \right\}$$

$$U_2(t, x) = \left(\frac{1}{630}t^8 + \frac{2}{105}t^7 + \frac{7}{45}t^6 + \frac{7}{15}t^5 + t^4 \right) \sin x$$

aynı şekilde devam edilir ve $i = 3, 4, \dots$ için $U_i(t, x)$ bulunup

$$U(t, x) = U_0(t, x) + U_1(t, x) + U_2(t, x) + \dots$$

hesaplanabilir. (9) ve (10) formülleri kullanılarak

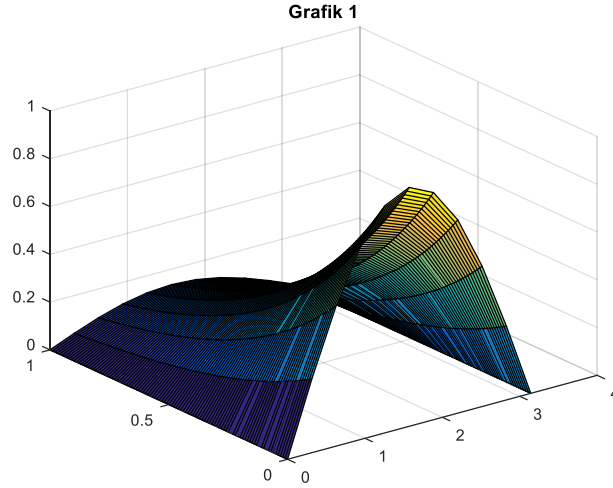
$$\begin{aligned}
 U(t, x) &= (1 - 2t + 2t^2) \sin x + - \left(\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{2}{15}t^5 \right) \sin x \\
 &\quad + \left(\frac{1}{630}t^8 + \frac{2}{105}t^7 + \frac{7}{45}t^6 + \frac{7}{15}t^5 + t^4 \right) \sin x + \dots
 \end{aligned}$$

$$U(t, x) = (1 - 2t + 2t^2 + -\frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{630}t^8 + \frac{2}{105}t^7 + \frac{7}{45}t^6 + \frac{7}{15}t^5 + t^4) \sin x + \dots$$

$$U(t, x) = \left(1 - 2t + 2t^2 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{7}{45}t^6 + \frac{2}{105}t^7 + \frac{1}{630}t^8 + \dots \right) \sin x$$

$$U(t, x) = e^{-2t} \sin x$$

bulunur ki bu da Örnek 3.1 in tam çözümüne karşılık gelir. Bu çözüm ile ilgili grafik aşağıda verilmiştir.



Şekil 1. Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemin $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi$ aralığındaki grafiğidir.

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, homotopy pertürbasyon metodu kullanılarak üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemin çözümü elde edildi. Hem homotopy pertürbasyon metodunun genel formu hem de bu denklemin çözümü için kullanılan formu oluşturuldu. Bu metot kullanılarak bir örnek problem üzerinde denklemin çözümü hesaplandı. Elde edilen bu çözümün tam çözüme denk olduğu görüldü. Bu nedenle bu metodun bu problem için uygun ve elverişli bir metot olduğu görüldü. Matlab programı kullanılarak tam çözüm için grafik verildi. Örnek 3.1 probleminin tam çözümü olan $U(t, x) = e^{-2t} \sin x$ fonksiyonu için bu grafik elde edildi. Bu grafikten $x = 0$ ve $x = \pi$ de $U(t, x) = 0$ olduğu görülür.

Yazarların Katkısı

Yazarların makaleye olan katkıları eşittir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

- [1] Pinar Z., Kocak H. 2018. Exact solutions for the third-order dispersive-Fisher equations. *Nonlinear Dynamics*, 91 (1): 421-426.
- [2] Ding L., Ma W. X., Chen Q., Huang Y. 2021. Lump solutions of a nonlinear PDE containing a third-order derivative of time. *Applied Mathematics Letters*, 112, 106809.
- [3] Rui W., He B., Long Y., Chen C. 2008. The integral bifurcation method and its application for solving a family of third-order dispersive PDEs. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69 (4): 1256-1267.
- [4] Manafian J., Mohammed SA, Alizadeh AA, Baskonus H. M., Gao W. 2020. Sığ su üzerinde uzun dalgaların yayılmasından kaynaklanan üçüncü dereceden evrim denklemi için yumru ve etkileşiminin araştırılması. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 84: 289-301.

- [5] González-Pinto S., Hernández-Abreu D., Pérez-Rodríguez S., Weiner R. 2016. A family of three-stage third order AMF-W-methods for the time integration of advection diffusion reaction PDEs. *Applied Mathematics and Computation*, 274: 565-584.
- [6] Zhou Q., Liu L., Liu Y., Yu H., Yao P., Wei C., Zhang H. 2015. Exact optical solitons in metamaterials with cubic–quintic nonlinearity and third-order dispersion. *Nonlinear Dynamics*, 80 (3): 1365-1371.
- [7] Mary D. S.1985. Analysis of an implicit finite-difference scheme for a third-order partial differential equation in three dimensions. *Computers & Mathematics with Applications*, 11 (7-8): 873-885.
- [8] Loghmani G. B., Ahmadiania M. 2006. Numerical solution of third-order boundary value problems.
- [9] Gordon R. K., Hutchcraft W. E. 2001. Higher Order Wavelet-like Basis Functions in the Numerical Solution of Partial Differential Equations Using the Finite Element Method. In *Proceedings of the 33rd Southeastern Symposium on System Theory (Cat. No. 01EX460)*, 391-394. IEEE.
- [10] Chavan S. S., Panchal M. M. 2014. Solution of third order Korteweg-De Vries equation by homotopy perturbation method using Elzaki transform. *Int J Res Appl Sci Eng Tech.*,2: 366-9.
- [11] He J. H., El-Dib Y. O., Mady A. A. 2021. Homotopy perturbation method for the fractal Toda oscillator. *Fractal and Fractional*, 5 (3): 93.
- [12] Karimiasl M., Ebrahimi F., Mahesh V. 2021. Postbuckling analysis of piezoelectric multiscale sandwich composite doubly curved porous shallow shells via Homotopy Perturbation Method. *Engineering with Computers*, 37 (1): 561-577.
- [13] Rezapour B., Fariborzi Araghi M. A., Vázquez-Leal H. 2021. Application of homotopy perturbation method for dynamic analysis of nanotubes delivering nanoparticles. *Journal of Vibration and Control*, 27 (7-8): 802-814.
- [14] Koksall M., Koksall M. E. 2015. Commutativity of cascade connected discrete-time linear time-varying systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 37 (5): 615-622.
- [15] Koksall M. E. 2019. Time and frequency responses of non-integer order RLC circuits, *AIMS Mathematics*, 4 (1).
- [16] Misra D. K. *Radio-Frequency and Microwave Communication Circuits: Analysis and Design*, Wiley-Interscience, 2004.
- [17] He J.H. 1999. Homotopy perturbation technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 178: 257.
- [18] He J.H. 2000. A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, *Int. J. Non-linear Mech.* 35 (1).