SAÜ. Fen Bil. Der. 17. Cilt, 3. Sayı, s. 371-379, 2013 SAU J. Sci. Vol 17, No 3, p. 371-379, 2013

Esnek çoklu topolojide bazı sonuçlar

İsmail Osmanoğlu, Deniz Tokat*

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Nevşehir

15.05.2012 Geliş/Received, 13.12.2012 Kabul/Accepted

ÖZET

Bu makalede ilk olarak esnek çoklu küme kavramı hatırlatılmıştır. Daha sonra esnek çoklu kümeler üzerinde elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada esnek çoklu topoloji kavramı tanıtılmış ve esnek çoklu topoloji üzerinde elde ettiğimiz bazı sonuçlar ve esnek çoklu baz kavramı sunulmuştur

Anahtar Kelimeler: esnek çoklu küme, esnek çoklu topoloji, esnek çoklu baz, esnek çoklu alt uzay

Some results on soft multi topology

ABSTRACT

In this article, at first we recall the concept of soft multiset. Then some results which we obtained on soft multisets were given. Moreover, in this paper, the notion of soft multi topology was introduced and some results on soft multi topology and the concept of the soft multi base were presented

Keywords: soft multiset, soft multi topology, soft multi base, soft multi subspace

* Sorumlu Yazar / Corresponding Author

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Molodtsov [1] tarafından ortaya atılan esnek çoklu küme teorisi, içerdikleri belirsizlikler yüzünden klasik metotlarla çözülemeyen karmaşık ekonomi, mühendislik ve çevre problemlerinin çözümüne yardımcı olacak matematiksel bir araçtır.

Molodtsov [1,2] ilk çalışmalarında esnek kümeler teorisini bir fonksiyonun pürüzsüzlüğü, oyun teorisi, Riemann integrali, Perron integrali ve ölçü teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır. Molodtsov'un çalışmalarından sonra bir çok yazar [3-7] esnek küme teorisini diğer alanlara ve gerçek hayatta karşılaştığımız problemlere uygulamamışlardır. Shabir ve Naz [8] esnek kümelerin topolojik yapılarını ve esnek topolojik uzaylardaki ayırma aksiyomlarını çalıştılar. Daha birçok yazar [9-14] esnek topoloji üzerinde çalışmalardır.

Klasik küme teorisinde kümenin elemanlarının tekrarına izin verilmez. Ancak bazı durumlarda elemanların tekrarı kullanışlı olabilmektedir. Eğer bir kümenin elemanlarının tekrarına izin verilirse bu küme teorisi çoklu küme olarak bilinir. Bu metot, güncel hayatta bilgisayar bilimleri, tıp, bankacılık, mühendislik, bilgi depolama ve bilgi analizi gibi bir çok konuda kullanılabilmektedir.

Çoklu küme teorisi, Cerf ve arkadaşları [15] tarafından ortaya konulmuştur. Peterson [16] ve Yager [17] çoklu küme teorisinin ilerlemesinde katkı sağlamışlardır ve birçok sonuç ortaya koymuşlardır. Bu çalışmışlar Jena ve arkadaşları [18] tarafından sürdürülmüştür. Manjunath ve John [19] çoklu küme bağıntısında ilk çalışma yapanlardır. Girish ve John [20] çoklu küme bağıntısı ve çoklu küme fonksiyonunu tanımlamışlardır. Bu yazarlar [21] çoklu küme bağıntılarını kullanarak çoklu kümeler üzerinde topoloji ve bazı topolojik yapıların tanımlarını vermişlerdir.

Esnek küme ve çoklu küme kavramlarını birleştirerek esnek çoklu küme kavramı ilk olarak Babitha ve John [22] tarafından tanımlanmıştır. [23] de esnek çoklu küme kavramının daha genel bir tanımı yapılarak bu küme üzerinde esnek çoklu topoloji inşa edilmiştir.

Biz bu çalışmada esnek çoklu kümeler üzerinde bazı yeni sonuçları, esnek çoklu kümenin içi, kapanışı, yığılma noktası ve esnek çoklu baz gibi esnek çoklu topolojinin önemli topolojik yapılarını inceleyeceğiz.

2.ESNEK ÇOKLU KÜMELER (SOFT MULTISETS)

2.1. Esnek Çoklu Kümeler (Soft Multisets)

Tanım 2.1.1 [1] U evrensel küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $P(U)$, U nun kuvvet kümesini ve A, E nin boştan farklı bir alt kümesini göstersin. (F, A) sıralı ikilisi U üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır.

Burada F, $F: A \to P(U)$ şeklinde bir dönüşümdür.

Bir başka deyişle, U üzerinde bir esnek küme, U evrensel kümesinin alt kümelerini parametrize edilmiş bir ailesidir. $e \in A$ için $F(e)$, (F, A) esnek kümesinin e-yaklaşık elemanlarının kümesi olarak düşünülebilir.

Örnek 2.1.2 Kabul edelim ki, U, göz önüne alınan şartlar altındaki evlerin kümesi ve E, parametrelerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime ya da cümledir.$E = \{pahalı,\ güzel,\ ahşap,\ ucuz,\ bahçeli,\ modern,\ iyi\ durumda,\ kötü\ durumda\}$

Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, pahalı evler, güzel evler ve diğerlerini belirtmek anlamına gelir.

(F, E) esnek kümesi Mr. X in satın alacağı "evlerin çekiciliği" ni belirtiyor.

Kabul edelim ki, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ ile verilen U evrenselinde 6 ev olsun ve e_1 '$pahalı$' parametresini, e_2 '$güzel$' parametresini, e_3 '$ahşap$' parametresini, e_4 '$ucuz$' parametresini, e_5 '$bahçeli$' parametresini göstermek üzere, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şeklinde verilsin. Kabul edelim ki, $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$, $F(e_5) = \{h_1\}$ olsun. (F, A) esnek kümesi U kümesinin alt kümelerinin $\{F(e_i) : i = 1,2, \dots, 5\}$ parametrize edilmiş bir ailesidir ve bir nesnenin yaklaşık tanımlarının bir koleksiyonunu verir.

Bu nedenle, biz (F, A) esnek kümesini aşağıdaki gibi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterebiliriz:

$$(F, A) = \{pahalı\ evler = \{h_2, h_4\}, güzel\ evler = \{h_1, h_3\}, ahşap\ evler = \{h_3, h_4, h_5\}, ucuz\ evler = \{h_1, h_3, h_5\},\ bahçeli\ evler = \{h_1\}\}$$

Tanım 2.1.3 [18] U kümesinden alınan bir M *çoklu kümesi* $C_M: U \to \mathbb{N}$ fonksiyonu ile temsil edilir.

$U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinde bir M çoklu kümesi $M = \{k_1/x_1, k_2/x_2, \dots, k_n/x_n\}$ şeklinde gösterilir. Burada k_i, x_i nin tekrar sayısıdır. Bu $x_i \in^{k_i} M$ şeklinde gösterilir.

$C_M(x)$, M çoklu kümesindeki x in tekrar sayısını gösterir. M çoklu kümesinin elemanı olmayan elemanlar için sıfır olarak yazılır. Yani, $x \notin \mathrm{U}$ için $C_M(x) = 0$ dır.

Örnek 2.1.4 $U = \{a, b, c\}$ kümesinden alınan bir M çoklu kümesi $M = \{3/a, 2/b, 5/c\}$ şeklinde verilsin. Burada $C_M(a) = 3$, $C_M(b) = 2$, $C_M(c) = 5$ dir.

Tanım 2.1.5 [18] M ve N, U kümesinden alınan iki çoklu küme olsun. O halde her $x \in U$ için
$\boldsymbol{i}$) $C_M(x) = C_N(x)$ ise $M = N$ dir.
$\boldsymbol{ii}$) $C_M(x) \leq C_N(x)$ ise $M \subseteq N$ dir.
$\boldsymbol{iii}$) $C_P(x) = \max\{C_M(x), C_N(x)\}$ ise $P = M \cup N$ dir.
$\boldsymbol{iv}$) $C_P(x) = \min\{C_M(x), C_N(x)\}$ ise $P = M \cap N$ dir.

Tanım 2.1.6 [23] U bir çoklu küme evrenseli, E parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. (F, A) ikilisine bir esnek çoklu küme denir. Burada F dönüşümü $F: A \to P^*(U)$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\forall e \in A$ için $F(e)$ çoklu kümesi $C_{F(e)} : U^* \to \mathbb{N}$ fonksiyonu ile temsil edilir.

U çoklu küme evrenseli, çoklu kümelerin oluşturduğu kümedir. $P^*(U)$ kümesi $P(U)$ kümesinin destek kümesini göstermektedir. Herhangi bir $U = \{1/x, 2/y, 3/z, 4/\mathrm{w}\}$ esnek kümesinin destek kümesi $U^* = \{x, y, z, \mathrm{w}\}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.1.7 $U = \{2/x, 4/y, 1/z, 3/\mathrm{w}\}$ ve $E = \{p, q, r\}$ olsun. $F: A \to P^*(U)$ dönüşümü

$$F(p) = \{1/x, 2/y, 1/z\},$$
$$F(q) = \{2/\mathrm{w}\},$$
$$F(r) = \{3/y, 1/z, 2/\mathrm{w}\},$$

şeklinde tanımlansın. O halde (F, A) bir esnek çoklu kümedir. $\forall e \in A$ için $F(e)$ çoklu kümesi $C_{F(e)} : U^* \to \mathbb{N}$ fonksiyonu ile

$C_{F(p)}(x) = 1, C_{F(p)}(y) = 2, C_{F(p)}(z) = 1, C_{F(p)}(w) = 0,$
$C_{F(q)}(x) = 0, C_{F(q)}(y) = 0, C_{F(q)}(z) = 0, C_{F(q)}(w) = 2,$
$C_{F(r)}(x) = 0, C_{F(r)}(y) = 3, C_{F(r)}(z) = 1, C_{F(r)}(w) = 2$
şeklinde tanımlıdır. O halde

$(F, A) = \{F(p), F(q), F(r)\} = \{\{1/x, 2/y, 1/z\}, \{2/\mathrm{w}\}, \{3/y, 1/z, 2/\mathrm{w}\}\}$
dır.

Tanım 2.1.8 [23] U üzerindeki (F, A) ve (G, B) esnek çoklu kümeleri için, eğer

i) $A \subseteq B$
ii) $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x), \forall x \in U^*, \forall e \in A$

ise (F, A) esnek çoklu kümesine (G, B) esnek çoklu kümesinin esnek çoklu alt kümesi denir ve $(F, A) \,\tilde{\subseteq}\, (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Eğer $C_{F(e)}(x) = C_{G(e)}(x), \forall x \in U^*, \forall e \in A$ ise (F, A) esnek çoklu kümesine (G, B) esnek çoklu kümesinin tam esnek çoklu alt kümesi denir.

Tanım 2.1.9 [23] U üzerinde herhangi iki esnek çoklu küme (F, A) ve (G, B) olsun.

Eşitlik: $(F, A) = (G, B) \Leftrightarrow (F, A) \,\tilde{\subseteq}\, (G, B)\ ve$
$(G, B) \,\tilde{\subseteq}\, (F, A)$

Birleşim: $(H, D) = (F, A) \,\tilde{\cup}\, (G, B)$ Burada $D = A \cup B$ ve $C_{H(e)}(x) = \max\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\}, \forall x \in U^*, \forall e \in D$ dir.

Kesişim : $(H, D) = (F, A) \,\tilde{\cap}\, (G, B)$ Burada $D = A \cap B$ ve $C_{H(e)}(x) = \min\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\}, \forall x \in U^*, \forall e \in D$ dir.

Fark : $(H, D) = (F, A) \backslash (G, A)$ Burada $C_{H(e)}(x) = \max\{C_{F(e)}(x) - C_{G(e)}(x), 0\}, \forall x \in U^*, \forall e \in A$ dır.

Tümleyen : $(F, A)^c = (F^c, A)$ Burada $F^c: A \to P^*(U)$ dönüşümü $\forall e \in A$, $F^c(e) = U \backslash F(e)$ şeklinde tanımlıdır ve $C_{F^c(e)}(x) = C_U(x) - C_{F(e)}(x),\ \forall x \in U^*, \forall e \in A$dır.

Tanım 2.1.10 [23] Eğer $\forall e \in A$ için $F(e) = \emptyset$ ise U üzerindeki (F, A) esnek çoklu kümesine boş esnek çoklu küme denir ve Φ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.11 [23] (F, E), U üzerinde bir esnek çoklu küme ve $a \in U^*$. $a \in (F, E)$ olması demek $\forall e \in E$ için $a \in F(e)$ olması anlamına gelir. Yani,

$$a \in (F, E) \Leftrightarrow \forall e \in E \text{ için } a \in F(e)$$
dır. Ancak bazı $e \in E$ için $a \notin F(e)$ ise $a \notin (F, E)$ dır.

Not 2.1.12 $\forall e \in E$ ve $a \in U^*$için $C_{F(e)}(a) = n\ (1 \leq n)$ ise $a \in^n F(e)$ şeklinde yazılır. Aksi belirtilmediği sürece $a \in^n F(e)$ ifadesinin yerine $a \in F(e)$ ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 2.1.13 [23] U çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi V olsun. $\forall e \in E$ için $V(e) = V$ ise (V, E) esnek çoklu kümesi $\tilde{V}$ şeklinde gösterilir. Açıkça (U, E) esnek çoklu kümesi $\tilde{U}$ şeklinde gösterilir. $\tilde{U}$ esnek çoklu kümesi U üzerinde tanımlanan en geniş esnek çoklu kümedir.

Tanım 2.1.14 [23] $a \in U^*$ olsun. O zaman (a, E) bir esnek çoklu kümedir. Burada $\forall e \in E$ için $a(e) = \{a\}$ dır.

Örnek 2.1.15$U = \{4/x, 3/y, 2/z\}$ ve $E = \{p, q, r, k\}$ olsun. (x, E) esnek çoklu kümesi $(x, E) = \{x(p) = \{1/x\},\ x(q) = \{1/x\},\ x(r) = \{1/x\},\ x(k) = \{1/x\}\} = \{\{x\}, \{x\}, \{x\}, \{x\}\}$ şeklinde tanımlıdır. Aslında (x, E) esnek çoklu kümesi bir esnek kümedir.

Tanım 2.1.16 [23] (F, E), U üzerinde bir esnek çoklu küme ve U çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi V olsun. V üzerinde (F, E) esnek çoklu kümesinin alt esnek çoklu kümesi $\left({}^{V}F, E\right)$ şeklinde gösterilir ve $\forall e \in E$ için ${}^{V}F(e) = V \cap F(e)$ şeklinde tanımlanır.Burada $C_{{V}_{F(e)}}(x) = min\{C_V(x), C_{F(e)}(x)\}, \forall x \in V^*$dır.
Başka bir ifadeyle $\left({}^{V}F, E\right) = \tilde{V} \tilde{\cap} (F, E)$ dir.

2.2. Esnek Çoklu Kümelerde Bazı Sonuçlar (Some Results on Soft Multisets)

Önerme 2.2.1 U üzerinde bir esnek çoklu küme (F, A) olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F, A) \tilde{\cup} (F, A) = (F, A)$,
(2) $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$,
(3) $(F, A) \tilde{\cup} \Phi = (F, A)$ [24],
(4) $(F, A) \tilde{\cap} \Phi = \Phi$ [24],
(5) $(F, A) \tilde{\cup} \tilde{X} = \tilde{X}$ [24],
(6) $(F, A) \tilde{\cap} \tilde{X} = (F, A)$ [24].

Önerme 2.2.2 U üzerinde üç esnek çoklu küme (F, A), (G, B) ve (H, D) olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ve $(G, B) \tilde{\subseteq} (H, D) \Rightarrow (F, A) \tilde{\subseteq} (H, D)$,
(2) $(F, A) \tilde{\cup} \left((G, B) \tilde{\cup} (H, D)\right) = \left((F, A) \tilde{\cup} (G, B)\right) \tilde{\cup} (H, D)$,
(3) $(F, A) \tilde{\cap} \left((G, B) \tilde{\cap} (H, D)\right) = \left((F, A) \tilde{\cap} (G, B)\right) \tilde{\cap} (H, D)$,
(4) $(F, A) \tilde{\cup} \left((G, B) \tilde{\cap} (H, D)\right) = \left((F, A) \tilde{\cup} (G, B)\right) \tilde{\cap} ((F, A) \tilde{\cup} (H, D))$,
(5) $(F, A) \tilde{\cap} \left((G, B) \tilde{\cup} (H, D)\right) = \left((F, A) \tilde{\cap} (G, B)\right) \tilde{\cup} ((F, A) \tilde{\cap} (H, D))$ [24].

İspat : Burada sadece (1) ifadesinin ispatını vereceğiz. Diğerleri aşikardır.

(1) $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ve $(G, B) \tilde{\subseteq} (H, D)$ olsun. O halde $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A$ için $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x)$ ve $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in B$ için $C_{G(e)}(x) \leq C_{H(e)}(x)$ dır. Dolayısıyla $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A$ için $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x) \leq C_{H(e)}(x)$ dır. Bu da $(F, A) \tilde{\subseteq} (H, D)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 2.2.3 U üzerinde bir esnek çoklu küme (F, A) ve $\{(F_i, A_i)\}_{i \in I}$ esnek çoklu küme ailesi olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F, A) \tilde{\cup} [\tilde{\cap}_{i \in I} (F_i, A_i)] = \tilde{\cap}_{i \in I} [(F, A) \tilde{\cup} (F_i, A_i)]$,
(2) $(F, A) \tilde{\cap} [\tilde{\cup}_{i \in I} (F_i, A_i)] = \tilde{\cup}_{i \in I} [(F, A) \tilde{\cap} (F_i, A_i)]$ [24].

Önerme 2.2.4 [24] U üzerinde iki esnek çoklu küme (F, A) ve (G, B) olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.
(1) $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B) \Leftrightarrow (F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (G, B)$,
(2) $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B) \Leftrightarrow (F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (F, A)$,
(3) $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = \Phi \Rightarrow (F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)^c$,
(4) $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B) \Rightarrow (G, B)^c \tilde{\subseteq} (F, A)^c$.

Önerme 2.2.5 [23] U üzerinde iki tam esnek çoklu küme (F, A) ve (G, B) olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $((F, A) \tilde{\cup} (G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cap} (G, B)^c$,
(2) $((F, A) \tilde{\cap} (G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c$.

Sonuç 2.2.6 U üzerinde tam esnek çoklu küme ailesi $\{(F_i, A_i)\}_{i \in I}$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.
(1) $[\tilde{\cup}_{i \in I} (F_i, A_i)]^c = \tilde{\cap}_{i \in I} (F_i, A_i)^c$,
(2) $[\tilde{\cap}_{i \in I} (F_i, A_i)]^c = \tilde{\cup}_{i \in I} (F_i, A_i)^c$.

3.ESNEK ÇOKLU TOPOLOJİ (SOFT MULTI TOPOLOGY)

Tanım 3.1 [23] X çoklu küme evrenseli ve E parametrelerin kümesi olsun. X üzerinde tanımlı bütün esnek çoklu kümelerin koleksiyonuna esnek çoklu sınıf denir ve X_E ile gösterilir.

Yani, X çoklu küme evrenselinden alınan çoklu kümeler ile E kümesinden alınan parametrelerin oluşturduğu bütün esnek çoklu kümeler X_E sınıfının içerisinde kalır.

Tanım 3.2 [23] $\tau \subseteq X_E$ ve $A \subseteq E$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X_E, τ) ikilisine de X üzerinde bir topolojik uzay denir.
$i.\, \Phi, \tilde{X} \in \tau$.

$ii.\, \tau$ sınıfındaki sonlu sayıda esnek çoklu kümenin kesişimi τ sınıfına aittir.

Yani, $(F_1, A), \ldots, (F_2, A), (F_n, A) \in \tau$ için $\tilde{\cap}_{i=1}^{n} (F_i, A) \in \tau$ dır.

$iii.\tau$ sınıfındaki esnek çoklu kümelerin birleşimi τ sınıfına aittir.
Yani, $\forall i \in I, (F_i, A) \in \tau$ için $\tilde{\cup}_{i\in I} (F_i, A) \in \tau$ dır.

(X_E, τ) topolojik uzayında τ sınıfının her bir elemanına esnek çoklu açık küme ve tümleyeni açık olan esnek çoklu kümeye esnek çoklu kapalı küme denir.

Örnek 3.3 [23] $X = \{2/x, 3/y, 4/z, 5/w\}$, $E = \{p, q\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E)\}$ olsun. Buradaki $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E)$ esnek çoklu kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$F_1(p) = \{1/x, 2/y, 3/z\}, \quad F_1(q) = \{4/w\}$$
$$F_2(p) = X, \quad F_2(q) = \{1/x, 5/w\}$$
$$F_3(p) = \{2/x, 3/y, 3/z, 1/w\}, \quad F_3(q) = \{1/x, 4/w\}$$
$$F_4(p) = \{2/y\}, \quad F_4(q) = \{2/w\}$$
$$F_5(p) = \{3/y, 3/z, 1/w\}, \quad F_5(q) = \{1/x, 4/w\}$$

O halde τ sınıfı X üzerinde bir esnek çoklu topoloji tanımlar ve (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzaydır.

Örnek 3.4 [23] $\tau = \{\Phi, \tilde{X}\}$ olsun.τ sınıfı X üzerinde bir esnek çoklu topoloji tanımlar. τ sınıfına esnek çoklu ayrık olmayan topoloji denir.

Eğer $\tau = X_E$ iseτ sınıfına esnek çoklu ayrık topoloji denir.

Tanım 3.5 (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve $\mathfrak{B}$ esnek çoklu açık kümelerin bir sınıfı olsun. τ sınıfının her elemanı $\mathfrak{B}$ sınıfına ait olan bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\mathfrak{B}$ sınıfına τ topolojisinin bir esnek çoklu bazı denir.Yani

[B1] $\mathfrak{B} \subseteq \tau$.
[B2] Her $(F, A) \in \tau$ için $(F, A) = \tilde{\cup}_{i\in I} (G_i, B)$ olacak şekilde $(G_i, B) \in \mathfrak{B}$ vardır.

Not 3.6 $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ ise $\Phi = \tilde{\cup}_{i\in\emptyset} (G_i, B)$ olur.

Örnek 3.7 $X = \{1/x, 2/y, 4/z\}, E = \{p, q\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), (F_6, E)\}$ olsun. Buradaki $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), (F_6, E)$ esnek çoklu kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$F_1(p) = \{1/x\}, \quad F_1(q) = \{1/x\}$$
$$F_2(p) = \{2/y\}, \quad F_2(q) = \{2/y\}$$
$$F_3(p) = \{4/z\}, \quad F_3(q) = \{4/z\}$$
$$F_4(p) = \{1/x, 2/y\}, \quad F_4(q) = \{1/x, 2/y\}$$
$$F_5(p) = \{1/x, 4/z\}, \quad F_5(q) = \{1/x, 4/z\}$$
$$F_6(p) = \{2/y, 4/z\}, \quad F_6(q) = \{2/y, 4/z\}$$

O halde τ sınıfı X üzerinde bir esnek çoklu topoloji tanımlar ve (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzaydır.

$\mathfrak{B} = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ alalım.

$$(F_1, E) \,\tilde{\cup}\, (F_2, E) = (F_3, E), \quad (F_1, E) \,\tilde{\cup}\, (F_3, E) = (F_5, E),$$
$$(F_2, E) \,\tilde{\cup}\, (F_3, E) = (F_6, E), \quad (F_1, E) \,\tilde{\cup}\, (F_2, E) \,\tilde{\cup}\, (F_3, E) = \tilde{X}$$

olur. Yani $\mathfrak{B}$ sınıfı τ esnek çoklu topolojisi için bir esnek çoklu bazdır. Gerçekten τ sınıfının her bir elemanı $\mathfrak{B}$ sınıfının elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir.

Önerme 3.8 Eğer $\mathfrak{B}$ sınıfı X üzerindeki τ ve σ esnek çoklu topolojileri için ayrı ayrı birer esnek çoklu bir baz ise bu topolojiler aynıdır.

İspat : $(F, A) \in \tau$ olsun. $\mathfrak{B}$ sınıfı τ esnek çoklu topolojisi için bir esnek çoklu baz olduğundan $(F, A) = \tilde{\cup}_{i\in I} (G_i, B)$ olacak şekilde $(G_i, B) \in \mathfrak{B}$ vardır. $\mathfrak{B}$ sınıfı aynı zamanda σ esnek çoklu topolojisi için de bir esnek çoklu baz olduğundan her bir $i \in I$ için $(G_i, B) \in \sigma$ olup $(F, A) \in \sigma$ den $\tau \subseteq \sigma$ dır. Benzer şekilde $\sigma \subseteq \tau$ gösterilir. Buradan $\tau = \sigma$ elde edilir.

Tanım 3.9 (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve $\mathcal{A}$ esnek çoklu açık kümelerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$ sınıfındaki elemanların sonlu arakesitinden oluşan $\mathfrak{B}$ sınıfı τ topolojisi için bir esnek çoklu baz ise $\mathcal{A}$ sınıfına τ topolojisinin bir esnek çoklu alt bazı denir
O halde $\mathcal{A}$ sınıfı τ topolojisi için bir esnek çoklu alt bazıdır ancak ve ancak τ topolojisindeki her esnek çoklu açık küme $\mathcal{A}$ sınıfındaki kümelerin sonlu arakesitlerinin keyfi birleşimi olarak yazılır.

Not 3.10 $\mathcal{A} \,\tilde{\subseteq}\, \tau$ ise $\tilde{X} = \tilde{\cap}_{i\in\emptyset} (G_i, B)$ olur. $((G_i, B) \in \mathcal{A})$

Önerme 3.11 Eğer $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerindeki τ ve σ esnek çoklu topolojileri için ayrı ayrı birer esnek çoklu bir alt baz ise bu topolojiler aynıdır.

İspat : Önerme 3.8. ve esnek çoklu alt baz tanımını kullanılarak ispatlanabilir.

Tanım 3.12 [23] (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi Y olsun. O zaman

$$\tau_Y = \{({}^{Y}F, E) : (F, E) \in \tau\}$$

sınıfına Y üzerinde bir esnek çoklu topoloji ve (Y_E, τ_Y) esnek çoklu topolojik uzayına (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayının esnek çoklu alt uzayı denir.

Örnek 3.13 Örnek 3.3. deki (X_E,τ) esnek çoklu topolojisini göz önüne alalım ve $Y=\{1/x,2/y,3/z\}$ olsun. O halde $\tau_Y=\{\Phi,\tilde{Y},\ ({}^YF_1,E),\ ({}^YF_2,E),\ ({}^YF_3,E),\ ({}^YF_4,E),\ ({}^YF_5,E)\}$ esnek çoklu topolojisi ve $({}^YF_1,E)$, $({}^YF_2,E)$, $({}^YF_3,E)$, $({}^YF_4,E)$, $({}^YF_5,E)$ esnek çoklu kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$${}^YF_1(p)=\{1/x,2/y,3/z\},\quad {}^YF_1(q)=\emptyset$$
$${}^YF_2(p)=\{1/x,2/y,3/z\},\quad {}^YF_2(q)=\{1/x,2/y,3/z\}$$
$${}^YF_3(p)=\{1/x,2/y,3/z\},\quad {}^YF_3(q)=\{1/x\}$$
$${}^YF_4(p)=\{2/y\},\quad {}^YF_4(q)=\emptyset$$
$${}^YF_5(p)=\{2/y,3/z\},\quad {}^YF_5(q)=\{1/x\}$$

Burada $({}^YF_2,E)=\tilde{Y}$ olduğundan $\tau_Y=\{\Phi,\tilde{Y},({}^YF_1,E),({}^YF_3,E),({}^YF_4,E),({}^YF_5,E)\}$ şeklinde yazılır ve görüldüğü üzere (Y_E,τ_Y) esnek çoklu topolojik uzayı (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzayının esnek çoklu alt uzayıdır.

Örnek 3.14 [23] Herhangi esnek çoklu ayrık topolojik uzayın alt uzayı da esnek çoklu ayrık topolojik uzaydır. Ayrıca herhangi esnek çoklu ayrık olmayan topolojik uzayın alt uzayı da esnek çoklu ayrık olmayan topolojik uzaydır.

Önerme 3.15 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi Y olsun. Eğer $\mathfrak{B}$ sınıfı τ esnek çoklu topolojisi için bir esnek çoklu baz ise $\mathfrak{B}_Y=\{(G,B)\,\tilde{\cap}\,\tilde{Y}:(G,B)\in\mathfrak{B}\}$ sınıfı da Y üzerindeki τ_Y esnek çoklu topolojisi için bir esnek çoklu bazdır.

İspat : $({}^YF,A)=(F,A)\,\tilde{\cap}\,\tilde{Y}\in\tau_Y$ ise $(F,A)\in\tau$ dır. $\mathfrak{B}$ sınıfı τ esnek çoklu topolojisi için bir esnek çoklu baz olduğundan $(F,A)=\tilde{\cup}_{i\in I}(G_i,B)$ olacak şekilde $(G_i,B)\in\mathfrak{B}$ vardır.Buradan

$$({}^YF,A)=\tilde{\cup}_{i\in I}\left((G_i,B)\,\tilde{\cap}\,\tilde{Y}\right)$$

olacak şekilde $(G_i,B)\,\tilde{\cap}\,\tilde{Y}\in\mathfrak{B}_Y$ vardır.

Tanım 3.16 [23] (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve (F,A), X_E de bir esnek çoklu küme olsun. (F,A) esnek çoklu kümesini kapsayan bütün esnek çoklu kapalı kümelerin kesişimine (F,A) esnek çoklu kümesinin kapanışı denir ve $\overline{(F,A)}$ şeklinde gösterilir. Yani, (F,A) esnek çoklu kümesini kapsayan esnek çoklu kapalı kümelerin sınıfı $\mathcal{K}_{(F,A)}$ olmak üzere

$$\overline{(F,A)}=\tilde{\cap}_{(H,C)\in\mathcal{K}_{(F,A)}}(H,C)$$

dır. Açıkça $\overline{(F,A)}$, (F,A) esnek çoklu kümesini kapsayan en küçük esnek çoklu kapalı kümedir.

Önerme 3.17 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve (F,A) ve (G,B), X_E de iki esnek çoklu küme olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $\overline{\Phi}=\Phi$ ve $\overline{X}=\tilde{X}$
(2) $(F,A)\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)}$
(3) $\overline{(F,A)}$ kapalıdır
(4) (F,A) kapalı kümedir $\Leftrightarrow (F,A)=\overline{(F,A)}$
(5) $\overline{\overline{(F,A)}}=\overline{(F,A)}$
(6) $(F,A)\,\tilde{\subseteq}\,(G,B)\Rightarrow\overline{(F,A)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(G,B)}$
(7) $\overline{(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)}=\overline{(F,A)}\,\tilde{\cup}\,\overline{(G,B)}$
(8) $\overline{(F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)}\,\tilde{\cap}\,\overline{(G,B)}$

İspat : Tanım 3.16. den (1), (2) ve (3) ifadeleri açıktır. (4) Eğer (F,A) esnek çoklu kapalı küme ise $\overline{(F,A)}$ nın tanımından $\overline{(F,A)}\,\tilde{\subseteq}\,(F,A)$ dır. Diğer yandan (2) den $(F,A)\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)}$ dır. O halde $(F,A)=\overline{(F,A)}$ dır.

Tersine $(F,A)=\overline{(F,A)}$ ise (3) den dolayı $\overline{(F,A)}$ kapalıdır. Dolayısıyla (F,A) da esnek çoklu kapalı kümedir.

(5) $\overline{(F,A)}$ esnek çoklu kapalı küme olduğundan ve (4) den dolayı $\overline{\overline{(F,A)}}=\overline{(F,A)}$ dır.

(6) Eğer $(F,A)\,\tilde{\subseteq}\,(G,B)$ ise $\mathcal{K}_{(F,A)}\,\tilde{\supseteq}\,\mathcal{K}_{(G,B)}$ dır. O halde

$$\tilde{\cap}_{(H,D)\in\mathcal{K}_{(F,A)}}(H,D)\,\tilde{\subseteq}\,\tilde{\cap}_{(H,D)\in\mathcal{K}_{(G,B)}}(H,D)$$
$$\Leftrightarrow\overline{(F,A)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(G,B)}$$

dır.

(7) $(F,A)\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)}$ ve $(G,B)\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(G,B)}$ olduğundan $(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)}\,\tilde{\cup}\,\overline{(G,B)}$ dır. Buradan $\overline{(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{\overline{(F,A)}\,\tilde{\cup}\,\overline{(G,B)}}=\overline{(F,A)}\,\tilde{\cup}\,\overline{(G,B)}\Leftrightarrow$ $\overline{(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)}\,\tilde{\cup}\,\overline{(G,B)}$ dır.
Tersine $(F,A)\,\tilde{\subseteq}\,(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)$ den $\overline{(F,A)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)}$ ve $(G,B)\,\tilde{\subseteq}\,(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)$ den $\overline{(G,B)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)}$ dır. Buradan $\overline{(F,A)}\,\tilde{\cup}\,\overline{(G,B)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)}$ elde edilir.
(8) $(F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B)\,\tilde{\subseteq}\,(F,A)$ den $\overline{(F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)}$ ve $(F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B)\,\tilde{\subseteq}\,(G,B)$ den $\overline{(F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(G,B)}$ dır. Buradan $\overline{(F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B)}\,\tilde{\subseteq}\,\overline{(F,A)}\,\tilde{\cap}\,\overline{(G,B)}$ elde edilir.

Tanım 3.18 [23] (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay, (F,A), X_E de bir esnek çoklu küme ve $x\in X^*$ olsun. Eğer $x\in(G,B)\,\tilde{\subseteq}\,(F,A)$ olacak şekilde $(G,B)\in\tau$ esnek çoklu açık kümesi varsa x noktasına (G,B) esnek çoklu kümesinin bir iç noktası denir. (F,A) esnek çoklu kümesinin bütün esnek çoklu iç noktalarının kümesine

(F,A) esnek çoklu kümesinin içi denir ve $(F,A)^{\circ}$ şeklinde gösterilir.

Önerme 3.19 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve (F,A), X_E de bir esnek çoklu küme olsun. O halde

$$(F,A)^{\circ} = \tilde{\cup}\{(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A) : (G,B) \in \tau\}$$

dır.

İspat : Eğer $x \in (F,A)^{\circ}$ ise Tanım 3.18. den $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde $(G,B) \in \tau$ vardır. O halde $x \in \tilde{\cup}\{(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A) : (G,B) \in \tau\}$.

Tersine eğer $x \in \tilde{\cup}\{(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A) : (G,B) \in \tau\}$ ise $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde bir $(G,B) \in \tau$ bulunduğundan $x \in (F,A)^{\circ}$ dır.

Önerme 3.20 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve (F,A) ve (G,B), X_E de iki esnek çoklu küme olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $(F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,A)$
(2) $(F,A)^{\circ}$ açıktır
(3) (F,A) açıktır $\Leftrightarrow (F,A)^{\circ} = (F,A)$

(4) $(F,A)^{\circ}$, (F,A) esnek çoklu kümesinin kapsadığı en geniş esnek çoklu açık kümedir

(5) $((F,A)^{\circ})^{\circ} = (F,A)^{\circ}$
(6) $(F,A) \tilde{\subseteq} (H,D) \Rightarrow (F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} (H,D)^{\circ}$
(7) $(F,A)^{\circ} \tilde{\cup} (H,D)^{\circ} \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (H,D))^{\circ}$
(8) $(F,A)^{\circ} \tilde{\cap} (H,D)^{\circ} = ((F,A) \tilde{\cap} (H,D))^{\circ}$

İspat : (1) Tanım 3.18 den açıktır.

(2) Önerme 3.19 den $(F,A)^{\circ}$, (F,A) esnek çoklu kümesini içerdiği açıkların birleşimi olduğundan açıktır.
(3) $(F,A)^{\circ} = \tilde{\cup}\{(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A) : (G,B) \in \tau\}$ olduğundan (F,A) esnek çoklu kümesi açık ise $(F,A)^{\circ} = (F,A)$ dır.

Tersine $(F,A)^{\circ} = (F,A)$ ise (F,A) esnek çoklu kümesi açıktır. Çünkü $(F,A)^{\circ}$ esnek çoklu kümesi açıktır. $(F,A)^{\circ}$ esnek çoklu kümesi (F,A) esnek çoklu kümesinin kapsadığı en geniş esnek çoklu açık kümedir.

(4) $(F,A)^{\circ} = \tilde{\cup}\{(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A) : (G,B) \in \tau\}$ olduğundan $(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekildeki her (G,B) esnek çoklu açık kümesi için $(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)^{\circ}$ dır. O halde $(F,A)^{\circ}$, (F,A) esnek çoklu kümesinin kapsadığı en geniş esnek çoklu açık kümedir

(5) $(F,A)^{\circ}$ açık ve (F,A) açık ise $(F,A)^{\circ} = (F,A)$ olduğundan $((F,A)^{\circ})^{\circ} = (F,A)^{\circ}$ dır.

(6) $(F,A) \tilde{\subseteq} (H,D)$ olsun. Eğer $x \in (F,A)^{\circ}$ ise $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde $(G,B) \in \tau$ vardır. Buradan $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\subseteq} (H,D)$ ve de $x \in (H,D)^{\circ}$ olup $(F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} (H,D)^{\circ}$ dır.

(7) $(F,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (H,D)$ den
$(F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (H,D))^{\circ}$ ve
$(H,D) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (H,D)$ den
$(H,D)^{\circ} \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (H,D))^{\circ}$ dır. Buradan
$(F,A)^{\circ} \tilde{\cup} (H,D)^{\circ} \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (H,D))^{\circ}$ elde edilir.

(8) $(F,A) \tilde{\cap} (H,D) \tilde{\subseteq} (F,A)$ den
$((F,A) \tilde{\cap} (H,D))^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,A)^{\circ}$ ve
$(F,A) \tilde{\cap} (H,D) \tilde{\subseteq} (H,D)$ den
$((F,A) \tilde{\cap} (H,D))^{\circ} \tilde{\subseteq} (H,D)^{\circ}$ dır.

Tersine $(F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,A)$ ve $(H,D)^{\circ} \tilde{\subseteq} (H,D)$ olduğundan $(F,A)^{\circ} \tilde{\cap} (H,D)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cap} (H,D)$ ve buradan da $(F,A)^{\circ} \tilde{\cap} (H,D)^{\circ} \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cap} (H,D))^{\circ}$ elde edilir. Buradan $(F,A)^{\circ} \tilde{\cap} (H,D)^{\circ} = ((F,A) \tilde{\cap} (H,D))^{\circ}$ elde edilir.

Teorem 3.21 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve (F,A), X_E de bir tam esnek çoklu küme olsun. O zaman,

(a) $\left(\overline{(F,A)}\right)^c = ((F,A)^c)^{\circ}$,
(b) $((F,A)^{\circ})^c = \overline{((F,A)^c)}$.

İspat : Sonuç 2.2.6, Tanım 3.16, Önerme 3.19 kullanılarak,

(a) $\left(\overline{(F,A)}\right)^c$
$= (\{\tilde{\cap}\,(G,B) : (G,B)\ kapalı\ küme\ ve\ (F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)\})^c$
$= \tilde{\cup}\{(G,B)^c : (G,B)\ kapalı\ küme\ ve\ (F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)\}$
$= \tilde{\cup}\{(G,B)^c : (G,B)^c\ açık\ küme\ ve\ (G,A)^c \tilde{\subseteq} (F,B)^c\}$
$= ((F,A)^c)^{\circ}$

(b) $((F,A)^{\circ})^c$
$= (\tilde{\cup}\{(G,A) : (G,A)\ açık\ küme\ ve\ (G,A) \tilde{\subseteq} (F,A)\})^c$
$= \tilde{\cap}\{(G,A)^c : (G,A)^c\ kapalı\ küme\ ve\ (F,A)^c \tilde{\subseteq} (G,A)^c\}$
$= \overline{((F,A)^c)}$

elde edilir.

Tanım 3.22 [23] (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay, (F,A), X_E de bir esnek çoklu küme ve $x \in X^*$ olsun. Eğer $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde $(G,B) \in \tau$ esnek çoklu açık kümesi varsa (F,A) esnek çoklu kümesine x noktasının bir esnek çoklu komşuluğudur denir. x noktasının bütün esnek çoklu komşuluklarının kümesi $\tilde{N}(x)$ şeklinde gösterilir. Yani,

$$\tilde{N}(x) = \{(F,A) : (F,A) \in \tau, x \in (F,A)\}$$

Önerme 3.23 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve (F,A), X_E de bir esnek çoklu küme olsun. (F,A) esnek çoklu açık kümedir ancak ve ancak (F,A) esnek çoklu kümesi her noktasının bir esnek çoklu komşuluğudur.

İspat : Eğer (F,A) açık ve $x\in(F,A)$ ise $(G,B)=(F,A)$ alındığında (F,A) kümesi x in bir esnek çoklu komşuluğu olur.

Tersine eğer her $x\in(F,A)$ için $x\in(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olacak şekilde $(G,B)\in\tau$ esnek çoklu açık kümesi varsa $(F,A)=\cup_{x\in(F,A)}(G,B)$ olup esnek çoklu açık kümelerin keyfi birleşimleri açık olacağından (F,A) esnek çoklu kümesi açıktır.

Tanım 3.24 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay, (F,A), X_E de bir esnek çoklu küme ve $x\in X^*$ olsun. Eğer x noktasının her (G,B) esnek çoklu açık komşuluğu için $\big((G,B)\backslash(x,B)\big)\cap(F,A)\neq\Phi$ ise $x\in X^*$ noktasına (F,A) esnek çoklu kümesinin bir yığılma noktası denir. (F,A) esnek çoklu kümesinin bütün esnek çoklu yığılma noktalarının kümesi $(F,A)'$ ile gösterilir.

Önerme 3.25 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve (F,A) ve (G,B), X_E de iki esnek çoklu küme olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)\Rightarrow(F,A)'\tilde{\subseteq}(G,B)'$
(2) $((F,A)\tilde{\cup}(G,B))'=(F,A)'\tilde{\cup}(G,B)'$
(3) $((F,A)\tilde{\cap}(G,B))'\tilde{\subseteq}(F,A)'\tilde{\cap}(G,B)'$

İspat : (1) Eğer $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ise Tanım 3.24. den $(F,A)'\tilde{\subseteq}(G,B)'$ olduğu açıktır.

(2) $(F,A)\tilde{\subseteq}((F,A)\tilde{\cup}(G,B))$ ve
$(G,B)\tilde{\subseteq}((F,A)\tilde{\cup}(G,B))$ olup (1) den
$(F,A)'\tilde{\subseteq}((F,A)\tilde{\cup}(G,B))'$ ve
$(G,B)'\tilde{\subseteq}((F,A)\tilde{\cup}(G,B))'$ olduğundan
$(F,A)'\tilde{\cup}(G,B)'\tilde{\subseteq}((F,A)\tilde{\cup}(G,B))'$ dır.

Diğer yandan

$$((F,A)\tilde{\cup}(G,B))'\tilde{\subseteq}(F,A)'\tilde{\cup}(G,B)'$$
$$\Leftrightarrow((F,A)'\tilde{\cup}(G,B)')^c\tilde{\subseteq}(((F,A)\tilde{\cup}(G,B))')^c$$

olduğundan $((F,A)\tilde{\cup}(G,B))'\tilde{\subseteq}(F,A)'\tilde{\cup}(G,B)'$ ifadesini ispat etmek için sağ tarafın doğru olduğunu gösterelim. Bunun için $x\notin((F,A)'\tilde{\cup}(G,B)')$ olsun. Buradan $x\notin(F,A)'$ ve $x\notin(G,B)'$ olacağından $(H,D_1)\tilde{\cap}(F,A)\tilde{\subseteq}(x,D_3)$ ve $(K,D_2)\tilde{\cap}(G,B)\tilde{\subseteq}(x,D_3)$ olacak şekilde x in (H,D_1) ve (K,D_2) esnek çoklu açık komşulukları vardır. Burada $(H,D_1)\tilde{\cap}(K,D_2)$ x in bir esnek çoklu açık komşuluğu olup

$$\big((H,D_1)\tilde{\cap}(K,D_2)\big)\tilde{\cap}\big((F,A)\tilde{\cup}(G,B)\big)$$
$$=\big((H,D_1)\tilde{\cap}(K,D_2)\tilde{\cap}(F,A)\big)\tilde{\cup}\big((H,D_1)\tilde{\cap}(K,D_2)\tilde{\cap}(G,B)\big)$$
$$\tilde{\subseteq}\big((H,D_1)\tilde{\cap}(F,A)\big)\tilde{\cup}(K,D_2)\tilde{\cap}(G,B)$$
$$\tilde{\subseteq}(x,D_3)$$

den $\big((H,D_1)\tilde{\cap}(K,D_2)\big)\tilde{\cap}\big((F,A)\tilde{\cup}(G,B)\big)\tilde{\subseteq}(x,D_3)$ olup $x\notin((F,A)\tilde{\cup}(G,B))'$ dır. Bu sağ tarafın dolayısıyla (2) deki ifadenin ispatını tamamlar.

(3) $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ ise
$((F,A)\tilde{\cap}(G,B))'\tilde{\subseteq}(F,A)'$ ve
$(F,A)\tilde{\cap}(G,B)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ise
$((F,A)\tilde{\cap}(G,B))'\tilde{\subseteq}(G,B)'$ olduğundan
$((F,A)\tilde{\cap}(G,B))'\tilde{\subseteq}(F,A)'\tilde{\cap}(G,B)'$ dır.

4.SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışma kapsamında esnek çoklu kümeler hatırlatılarak esnek çoklu kümelerde bazı yeni sonuçlar elde edildi. Esnek çoklu kümeler yardımıyla tanımlanan esnek çoklu topolojide bir esnek çoklu kümenin içi, kapanışı ve esnek çoklu bir kümenin yığılma noktalarıyla ilgili önemli teoremler incelendi. Ayrıca esnek çoklu baz kavramı ilk defa bu çalışmada tanımlandı. Bu çalışmanın devamı olarak, esnek çoklu topolojik uzaylar arasında sürekli fonksiyonlar tanımlanabilir. Ayrıca esnek çoklu topolojik uzayların çarpımı, kompaktlığı ve bağlantılılığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

[1] Molodtsov, D.A. (1999) ‘Soft set theory-first results’, Computers and Mathematics with Applications, vol. 37, pp. 19-31.

[2] Molodtsov, D.A., Leonov, V.Y., Kovkov, D.V. (2006) ‘Soft sets technique and its application’, NechetkieSistemyiMyagkieVychisleniya, vol. 1, no. 1, pp. 8-39.

[3] Maji, P.K., Biswas, R., Roy, R. (2002) ‘An application of soft sets in a decision making problem’, Comput.Math.Appl. vol. 44, pp. 1077-1083.

[4] Maji, P.K., Biswas, R., Roy, R. (2003) ‘Soft set theory’, Comput.Math.Appl. vol. 45, pp. 555-562.

[5] Chen, D. (2005) ‘The parametrization reduction of soft sets and its applications’, Computers and Math. with Appl. vol. 49, pp. 757-763.

[6] Pie D., Maio, D. (2005) ‘From soft sets to information systems’, Granular computing, IEEE Inter. Conf. pp. 617-621.

[7] Aktaş H., Çağman, N. (2007) ‘Soft sets and soft groups’, Inf. Sci. vol. 177, pp. 2726-2735.

[8] Shabir, M., Naz, M. (2011) 'On soft topological spaces', Computers and Mathematics with Applications vol. 61, pp. 1786-1799.
[9] Min, W.K. (2011) 'A note on soft topological spaces', Comput. Math.Appl. vol. 62, pp. 3524-3528.
[10] Çağman, N., Karataş, S. and Enginoğlu, S. (2011) 'Soft topology', Computers and Mathematics with Applications vol. 62, pp. 351-358.
[11] Aygünoğlu, A., Aygün, H. (2012) 'Some notes on soft topological spaces', Neural Comput&Applic vol. 21, pp. 113-119.
[12] Zorlutuna, I., Akdağ M., Min, W.K. and Atmaca, S. (2012) 'Remarks on soft topological spaces', Ann. Fuzzy Math. Inform. vol. 3, no. 2, pp. 171-185.
[13] Varol, B.P., Aygün, H. (2012) 'On soft Hausdorff spaces', Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics vol. 5(1), pp. 15-24.4
[14] Peyghan, E., Samadi, B. and Tayebi, A. (2012) 'On Soft Connectedness', arXiv:1202.1668.
[15] Cerf, V., Fernandez, E., Gostelow, K., Volausky, S. (1971) 'Formal control and low properties of a model of computation', Report ENG 7178, Computer Science Department, University of California, Los Angeles, CA, December, p. 81.
[16] Peterson, J. (1976) 'Computation sequence sets', Journal of Computer System Science vol. 13, no. 1, pp. 1-24.
[17] Yager, R.R. (1986) 'On the theory of bags', International Journal General System vol. 13, pp. 23-37.
[18] Jena, S.P., Ghosh, S.K., Tripathy, B.K. (2001) 'On the theory of bags and lists', Information Sciences vol. 132, pp. 241-254.
[19] Manjunath, A.S., Jhon, S.J. (2006) 'On bag relations', Bulletin of Kerala Mathematics Association vol. 3, no. 2, pp. 15-22.
[20] Girish, K.P., Jhon, S.J. (2009) 'Relations and functions in multiset context', Information Sciences vol. 179, pp. 758-768.
[21] Girish, K.P., Jhon, S.J. (2012) 'Multiset topologies induced by multiset relations', Information Sciences vol. 188, pp. 298-313.
[22] Babitha, K.V., Jhon, S.J. (2013) 'On soft multi sets', Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics vol. 5, no. 1, pp. 35-44.
[23] Tokat, D., Osmanoğlu, İ. 'Soft multiset and soft multi topology', submitted.
[24] Tokat, D., Osmanoğlu, İ. (2013) 'Connectedness on soft multi topological spaces,J New Results Sci vol. 2, pp. 8-18.
[25] Koçak, M. (2011) Genel topolojiye giriş ve çözümlü alıştırmalar, Eskişehir : Kampüs yayıncılık.
[26] Mucuk, O. (2010) Topoloji ve kategori, Ankara: Nobel yayın dağıtım.