# FUZZY ÖLÇÜM METOTLARI VE ARALARINDAKİ İLİŞKİLER

**Serkan KARATAŞ[1], Naim ÇAĞMAN[2]**

[1]Gaziosmanpaşa Üniv., Fen Edebiyat Fak., Matematik Bölümü, Tokat. ramajnuan@mynet.com,
[2] Gaziosmanpaşa Üniv., Fen Ede. Fak., Matematik Böl., Tokat. Tel: 356 252 1616 (3160). ncagman@gop.edu.tr

## ÖZET

Fuzzy ölçüm kavramı 1974'te Sugeno tarafından verilmiştir. Fuzzy ölçüm metotları belirsizlikleri modellemekte kullanılmaktadır. Bu çalışmada, literatürdeki fuzzy ölçüm metotlarının bir sınıflandırılmasını sunulmuş ve bunların arasındaki bazı önemli ilişkileri incelenmiştir.

**Anahtar kelimeler** - Fuzzy kümeleri, Fuzzy ölçümü.

# METHODS OF FUZZY MEASURES AND THEİR RELATİONS

## ABSTRACT

The concept of fuzzy measure was introduced by Sugeno in 1974. Methods of fuzzy measures use modeling uncertain variables. In this study, classification methods of fuzzy measures with literatures have been introduced, and investigated some important relationships between them.

**Keywords** – Fuzzy Sets, Fuzzy measures.

## 1. GİRİŞ

Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesine olanak sağlamak amacıyla, 1965'te Lütfi Zadeh [14] Fuzzy (saçaklı yada bulanık) küme teorisini ve böylece fuzzy mantığını ileri sürdü. Bu yeni mantık, belirsizliğin ölçülmesinde güçlü ve anlamlı araçlar sunmasının yanı sıra, doğal dildeki belirsiz ve bulanık kavramları temsil etmemize ve onları matematiksel olarak ifade etmemize olanak sağlamaktadır. Fuzzy kümesinde, her bir elamana kümedeki üyelik derecesini temsil eden [0,1] aralığında bir reel sayı değeri atanır. Bu değer elemanın fuzzy kümesi tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini ifade eder. Bundan dolayı elemanların kümeye ait olması farklılaşır. Matematiksel olarak, bir $U$ evrensel kümesinde bir $\tilde{A}$ fuzzy kümesi

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in U, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]\}$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi, $\tilde{A}$ fuzzy kümesi, sıralı çiftlerden oluşan iki değişkenli bir bağıntı olarak tanımlanmaktadır. Burada $\mu_{\tilde{A}}$ fonksiyonuna üyelik fonksiyonu denir. $\mu_{\tilde{A}}$, herhangi bir $x$ elemanının $\tilde{A}$ fuzzy kümesine ait olma derecesini belirtir. Fuzzy Küme teorisi ve uygulamaları hakkında temel bilgi için yardımcı olabilecek temel kaynak olarak [3,8,15] kitapları önerilebilir.
Klasik ölçüm kavramı detaylı olarak [1,5] kitaplarından elde edilebilir. $N = \{0,1,2,3,...\}$,

$\wp(X)=\{A:A\subseteq X\}$ ve $\mathcal{B}\subseteq\wp(X)$ küme ailesi bir σ-cebri olsun, buna göre

**a1.** $\mu(\emptyset)=0$

**a2.** Her $A\in\wp(X)$ için $\mu(A)\geq 0$

**a3.** Her ayrık $(A_n)_{n\in N}\subseteq\wp(X)$ dizisi için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

şartlarını sağlayan $\mu:\mathcal{B}\to[0,+\infty)$ fonksiyonuna ölçüm denir. Buradaki σ-cebri,

**b1.** $\emptyset\in\mathcal{B}$,

**b2.** $\forall A\in B$ için $A^c\in\mathcal{B}$

**b3.** $\forall n\in N$ için $A_n\in\mathcal{B}$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{B}$

şartlarını sağlayan $\mathcal{B}\subseteq\wp(X)$ küme ailesine denir.

Fuzzy ölçümleri belirsizliği modellemek için kullanılır, fakat fuzzy ölçümü fuzzy kümesiyle gösterilen belisizlikten farklıdır. Fuzzy ölçümlerinde üyelik fonksiyonlarından ziyade güvenirlik, olanak ve olasılıkların dereceleri önem taşır. Bu derece, bir evrensel kümedeki aitliği belli olmayan bir elemanın, evrensel kümenin (fuzzy veya fuzzy olmayan) bir alt kümesine olan aitliğinin derecesidir.

Fuzzy ölçümleri kavramı Sugeno [11] tarafından ilk kez kapsamlı olarak tanıtıldı. Fuzzy ölçümün bir çok uygulama alanı vardır. Yaygın olarak meteorolojide, oyun teorisinde, etnolojide, orman mühendisliğinde v.b. kullanılmaktadır. Fuzzy ölçümleri ve uygulamaları hakkında önemli çalışmalar yapılmıştır, bunlardan bazıları; [2,4,9,12,13, v.b.].

Bu çalışma Karataş'ın [6] yüksek lisans tezinin bir parçasıdır. Bu çalışmanın temel amacı belirsizliğin modellemesinde kullanılan fuzzy ölçümlerini ve bunlar arasındaki ilişkileri sistemli bir şekilde incelemektir.

## 2. FUZZY ÖLÇÜM METOTLARI

Bu bölümde fuzzy ölçüm metotları tanımlanacak, özellikle literatürdeki λ-fuzzy ölçümü, Dirac ölçümü, olasılık ölçümü, güvenirlik ölçümü, makul ölçümü, olanak ölçümü ve gereklilik ölçümleri üzerinde durulacak ve bunları birbirleriyle karşılaştırma yapmak için ilgili yerlerde önemli teoremler verilecektir. Bu bölümde verilen temel tanım ve teoremlerin çoğu [3,4,7,12,15] kaynaklarından derlenmiştir, ve diğerleri için de kaynakları yerinde belirtilecektir.

**Tanım 2.1** [11] $g:\wp(X)\to[0,1]$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bu $g$ fonksiyonuna fuzzy ölçümü denir,

**g1.** $g(\emptyset)=0$ ve $g(X)=1$

**g2.** $\forall A,B\in\wp(X)$ için $A\subseteq B$ ise $g(A)\leq g(B)$

**g3.** $(A_n)_{n\in N}\subseteq\wp(X)$ artan (veya azalan ) dizisi için $\lim_{n\to\infty}g(A_n)=g(\lim_{n\to\infty}A_n)$

Fuzzy ölçümü tanımındaki (g1) koşuluna sınır şartı, (g2) koşuluna monotonluk şartı ve (g3) koşuluna da süreklilik şartı denir. Dikkat edilirse $\wp(X)$ kuvvet kümesi bir σ-cebridir. Bilindiği gibi eğer $(A_n)_{n\in N}\subseteq\wp(X)$ artan bir dizi ise $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ ve eğer $(A_n)_{n\in N}\subseteq\wp(X)$ azalan bir dizi ise $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$. Görüldüğü üzere fuzzy ölçümü, sonsuz elemanlı küme aileleri ve tümleyen kümeler için işlem yapma olanağı sağlar. Fuzzy ölçümleri, bir evrensel kümedeki aitliği belirli olmayan bir elemanın, evrensel kümenin bir alt kümesine olan aitliğinin derecesini tayin eder. Fuzzy ölçümlerinin değer kümesi, ölçümlerin değer kümesinden farklı olarak [0,1] kapalı aralığıdır. Dikkat edilirse fuzzy ölçümlerinin en belirgin özelliği alt-toplamsal olmalarıdır.

**Tanım 2.2** [3] $g_\lambda$ fonksiyonu -1< λ için $g_\lambda(X)=1$ ve süreklilik şartını sağlasın. $A\cap B=\emptyset$ koşulunu sağlayan $\forall A,B\in\wp(X)$ için

$$g_\lambda(A\cup B)=g_\lambda(A)+g_\lambda(B)+\lambda g_\lambda(A)\cdot g_\lambda(B) \quad (1)$$

eşitliğini gerçekleyen $g_\lambda$ fonksiyonuna λ-fuzzy ölçümü denir. (1) eşitliği her $i\neq j$ , $A_i\cap A_j=\emptyset$ koşulunu sağlayan $\{A_i:i\in N\}\subseteq\wp(X)$ ailesi için genelleştirilirse

$$g_\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}g_\lambda(A_i) & ,\ \lambda=0\\ \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{\infty}(1+g_\lambda(A_i))-1\right], & \lambda\neq 0\end{cases}$$

elde edilir. Eğer $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ şeklinde sonlu bir küme ise ve $g_\lambda$ fuzzy ölçümü $g_\lambda(\{x_i\})=g_i\in[0,1]$ şeklinde alınırsa

$$g_\lambda(X)=\frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda g_i)-1\right] \quad (2)$$

bulunur. λ-fuzzy ölçümünün (g1) ve (g2) koşulunu sağladığı kolayca görülür.

$$\forall A \in \wp(X) \text{ için } g_\lambda\left(A^c\right)=\frac{1-g_\lambda(A)}{1+g_\lambda(A)}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe λ-tümleyen formülü denir.

**Tanım 2.3** [3] $\xi:\wp(X)\to\{0,1\}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanmış $\xi$ fonksiyonuna Dirac ölçümü denir.

$$\forall A \in \wp(X) \text{ için, } \quad \xi(A)=\begin{cases}1, & x_0 \in A\\ 0, & x_0 \notin A\end{cases}$$

Burada $x_0$, $X$'in belirli bir elemanıdır. $\xi(A)$ değeri, $x_0$'ın $A$ kümesindeki üyelik derecesidir. $\xi(A)$, $x_0$'ın $A$ kümesine ait olduğu durumda "1" değerini ve ait olmadığı durumda ise "0" değerini alır. Dirac ölçümünün bir fuzzy ölçümü olduğu kolayca görülür.

**Tanım 2.4** [2] Aşağıdaki özellikleri sağlayan $P:\wp(X)\to[0,1]$ ile tanımlı $P$ fonksiyonuna olasılık ölçümü denir.

**p1.** $\forall A \in \wp(X)$ için $P(A)\in[0,1]$ ve $P(X)=1$

**p2.** $\forall i \in N$ için $A_i \in \wp(X)$ ve $\forall i\neq j$ için $A_i\cap A_j=\varnothing$ ise $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ dir.

$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ sonlu bir küme $\forall i\in N_n$ için $P(\{x_i\})=a_i$ olmak üzere, olasılık ölçümü tanımından $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$ elde edilir. Burada $N_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ dir.

**Teorem 2.1** $P$ olasılık ölçümü $\wp(X)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlansın. $\forall A, B\in \wp(X)$ için $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ olur.

**İspat:** Tanım 2.4'ü kullanarak ispatı yapalım $\forall A, B\in \wp(X)$ için

$$A\cup B=\left(A-(A\cap B)\right)\cup\left(B-(A\cap B)\right)\cup(A\cap B)$$

olacağından, olasılık ölçümünün tanımıyla

$$\begin{aligned}
&P(A\cup B)\\
&=P(A-(A\cap B))+P(B-(A\cap B))+P(A\cap B)\\
&=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)+P(A\cap B)\\
&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 2.2** $P$ bir olasılık ölçümü olmak üzere $\forall A\in\wp(X)$ için $P\left(A^c\right)=1-P(A)$ eşitliği sağlanır.

**İspat:** $\forall A\in\wp(X)$ için $A\cap A^c=\varnothing$ olduğundan Teorem 2.1 kullanılırsa $P\left(A\cup A^c\right)=P(A)+P\left(A^c\right)$ elde edilir. $A\cup A^c=X$ ve $P(X)=1$ olduğundan $P(X)=P(A)+P\left(A^c\right) \Rightarrow P\left(A^c\right)=1-P(A)$. Bu eşitlik yardımıyla $P(\varnothing)=0$ elde edilir.

**Teorem 2.3** $P$ olasılık ölçümü $\wp(X)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlansın. $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\ldots$ koşulunu sağlayan $\forall i\in N$ için $A_i\in\wp(X)$ ve $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ ise $\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(A)$ olur.

**İspat:** $A_0=\varnothing$ ve $i\in N_n$ için $B_i=A_i-A_{i-1}$ olsun. Buradan $B_1,B_2,\ldots,B_n$ kümeleri ikişer ikişer ayrık kümelerdir. Ayrıca $A_n=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ ve $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}P(A_n)&=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)\\
&=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\\
&=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\\
&=P(A)
\end{aligned}$$

olur.

**Teorem 2.4** $P$ olasılık ölçümü $\wp(X)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlansın. $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\ldots$ koşulunu sağlayan $\forall i\in N$ için $A_i\in\wp(X)$ ve $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ ise $\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(A)$ olur.

**İspat:** $\forall n\in N$ için $B_n=A_n^c$ olsun. Buradan $B_1\subset B_2\subset B_3\subset\ldots$ olacağından,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=A^c$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$P(A)=1-P\left(A^c\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n))$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

**Teorem 2.5** $P$ olasılık ölçümü bir fuzzy ölçümdür.

**İspat:** Tanım 2.4'ü uygulayarak ispatı yapalım.
**g1.** Olasılık fonksiyonunun tanımından $P(X)=1$ olduğuna göre $P(X)=P(X\cup\varnothing)=P(X)+P(\varnothing)$ $\Rightarrow P(\varnothing)=0$ olur.
**g2.** $A,B\in\wp(X)$ kümeleri $A\subseteq B$ koşulunu sağlasın. $A\cap(B-A)=\varnothing$ olacağından $P(B)=P(A)+P(B-A)$ bulunur. Buradan da $P(A)\le P(B)$ elde edilir.
**g3.** Teorem 2.3 veya Teorem 2.4 şartlarını sağlayan $(A_n)_{n\in N}\subset\wp(X)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} P(A_n)=P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$ olur.

**Tanım 2.5** [7] Güvenirlik ölçümü, $Bel$ ile gösterilen sonlu bir $X$ kümesinin kuvvet kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyondur. $Bel:\wp(X)\to[0,1]$ olmak üzere $Bel$ fonksiyonu

$$Bel\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\ge\sum_i Bel(A_i)-\sum_{i<j} Bel(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}Bel\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

toplamsal aksiyomunu sağlar. Örneğin, $n=2$ için ileride kullanacağımız

$$Bel(A_1\cup A_2)\ge Bel(A_1)+Bel(A_2)-Bel(A_1\cap A_2) \quad (4)$$

eşitsizliği elde edilir.

$A\in\wp(X)$ için $Bel(A)$, $X$ kümesinin belirli bir elemanının $A$ kümesine aitliğinin derecesini belirtir. $Bel(A)$, güvenirliğin elde edilebilir (veya var olan) kanıtına dayanan derecesi olarak da yorumlanır. $A_1=A$ ve $A_2=A^c$ kümeleri (4) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $Bel(A)+Bel(A^c)\le 1$ elde edilir. Bu son eşitsizlik şu anlama gelir: $x\in A$ olmasındaki bir güvenirliğin yokluğu, $x\in A^c$ olmasındaki kuvvetli bir güvenirliğe işaret etmez.

**Teorem 2.6** Güvenirlik ölçümü bir fuzzy ölçümüdür.

**İspat:** Herhangi bir $Bel$ güvenirlik ölçümü verilsin.
**g1.** $Bel(A)$, $X$ 'in belirli bir elemanının $A$ kümesine olan aitliğinin derecesi olduğundan, $Bel(\varnothing)=0$ ve $Bel(X)=1$ 'dir.
**g2.** $A\subseteq B$ ve $C=B-A$ olsun. Burada $A\cup C=B$ ve $A\cap C=\varnothing$ 'dir. $A$ ve $C$ kümeleri için (4) eşitsizliği uygulanırsa

$$Bel(A\cup C)=Bel(B)\ge Bel(A)+Bel(C)-Bel(A\cap C)$$

olur. $A\cap C=\varnothing$ olduğundan $Bel(A\cap C)=0$ 'dır. Buradan $Bel(B)\ge Bel(A)+Bel(C)\Rightarrow Bel(B)\ge Bel(A)$ elde edilir.
**g3.** $Bel$ fonksiyonu sonlu bir $X$ kümesinin kuvvet kümesi üzerinde tanımlandığından süreklilik şartı göz önüne alınmaz.

**Tanım 2.6** [10] Güvenirlik ölçümü $m:\wp(X)\to[0,1]$ tanımlı, $\sum_{A\in\wp(X)} m(A)=1$ ve $m(\varnothing)=0$ koşullarını sağlayan $m$ fonksiyonuyla ifade edilir. Bu fonksiyona temel olasılık ataması denir. Olasılık teorisinde kullanılan olasılık dağılım fonksiyonu ve temel olasılık ataması arasındaki isim benzerliğinden oluşacak karışıklığı önlemek için temel olasılık ataması yerine temel atama ismi kullanılır (Bakınız [10]). Temel atama aşağıdaki özelliklere sahiptir
**m1.** $m(X)=1$ gerektirmesi yoktur.
**m2.** $A\subseteq B$ koşulunu sağlayan $A,B\in\wp(X)$ kümeleri için $m(A)\le m(B)$ gerektirmesi yoktur.
**m3.** $m(A)$ ve $m(A^c)$ arasında bir bağıntı yoktur. Bu gözlemlerden temel atamaların fuzzy ölçümü olmadığı sonucu çıkar. Bununla birlikte, verilen bir güvenirlik ölçümü uygun bir $m$ atamasıyla

$$Bel(A)=\sum_{B\subseteq A} m(B) \quad (5)$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlik $\forall A\in\wp(X)$ için $Bel(A)$ ile $m(A)$ arasındaki bağıntıyı verir. Benzer şekilde güvenirlik fonksiyonu yardımıyla temel atama fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$m(A)=\sum_{B\subseteq A}(-1)^{|A-B|}Bel(B)$$

**Tanım 2.7** [7] $m(A)>0$ koşulunu sağlayan $A\in\wp(X)$ kümesine $m$ temel atamasının odaksal elemanı denir. $F=\{A \mid m(A)>0\}$ olmak üzere $(F,m)$ ikilisine kanıt miktarı denir. Kanıt miktarı odaksal elemanların kümesi ve ilgili temel atamadan oluşur.

**Teorem 2.7** Sonlu bir $X$ evrensel kümesinin $\wp(X)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlanmış $\lambda$ -fuzzy ölçümü, $\lambda > 0$ için bir güvenirlik ölçümüdür.

**İspat:** Teoremin ispatını (2) eşitliğini kullanarak Tanım 2.2 yardımıyla yapalım. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sonlu bir küme, $g_\lambda$ bir $\lambda$ -fuzzy ölçümü ve $\lambda > 0$ olsun. $\forall A \in \wp(X)$ için $A = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, $(k \leq n)$, alınırsa, (2) eşitliğinden $g_\lambda(A) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda g_i) - 1\right]$ bulunur. Bulunan ifade açık olarak yazılırsa

$$g_\lambda(A) = \sum_{B \subseteq A} \lambda^{|B|-1} \prod_{x_i \in B} g_i$$

elde edilir. $m(B) = \lambda^{|B|-1} \prod_{x_i \in B} g_i$ olarak alınırsa $g_\lambda$ bir güvenirlik ölçümü olur. $m(\emptyset) = 0$ ve $\sum_{B \in \wp(X)} m(B) = 1$ olduğundan $m$ bir temel atamadır.

**Teorem 2.8** [6] Sonlu bir evrensel küme üzerinde tanımlanmış Dirac ölçümü bir güvenirlik ölçümüdür.

Güvenirlik ölçümleri ile ilgili olarak verilen (4) eşitsizliği, daha kuvvetli bir

$$Bel(A \cup B) = Bel(A) + Bel(B), \quad A \cap B = \emptyset \qquad (6)$$

aksiyomuyla yer değiştirirse, güvenirlik ölçümünün daha özel bir çeşidi olan, sonlu bir evrensel küme için tanımlanmış olasılık ölçümleri elde edilir.

Aşağıdaki teorem güvenirlik ölçümleri ile olasılık ölçümleri arasındaki ilişkiyi karakterize etmektedir.

**Teorem 2.9** $Bel$ güvenirlik ölçümü olasılık ölçümüdür ancak ve ancak $m$ temel ataması $m(\{x\}) = Bel(\{x\})$ ve tek nokta kümesi olmayan her $A \in \wp(X)$ için $m(A) = 0$ ile belirlenmiş ise.

**İspat:** $Bel$ güvenirlik ölçümünün bir olasılık ölçümü olduğunu kabul edelim. $m$ temel atamasının tanımıyla $m(\emptyset) = 0$ olduğundan teorem boş küme için sağlanır. $A \neq \emptyset$ olsun ve $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olarak farz edelim. Buradan (6) eşitliğiyle

$$\begin{aligned} Bel(A) &= Bel(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) \\ &= Bel(\{x_1\}) + Bel(\{x_2, x_3, ..., x_n\}) \\ &\vdots \\ &= Bel(\{x_1\}) + Bel(\{x_2\}) + ... + Bel(\{x_n\}) \end{aligned}$$

$$Bel(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) = \sum_{i=1}^{n} Bel(\{x_i\})$$

olarak bulunur. Buradan da

$$Bel(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\{x_i\})$$

elde edilir. Dolayısıyla $Bel$ güvenirlik ölçümü temel atamanın terimlerinde tanımlanmış olur yalnızca tek elemanlı kümeler üzerinde odaklan Tersine, $m$ temel atamasının verildiğini varsayalı Öyle ki

$$\sum_{x \in X} m(\{x\}) = 1.$$

Buradan $A \cap B = \emptyset$ koşulunu sağlayan her $A, B \in \wp(X)$ için

$$\begin{aligned} Bel(A) + Bel(B) &= \sum_{x \in A} m(\{x\}) + \sum_{x \in B} m(\{x\}) \\ &= \sum_{x \in A \cup B} m(\{x\}) \\ &= Bel(A \cup B) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $Bel$ fonksiyonu bir olasılık ölçün olur.

**Tanım 2.8** [7] $Bel$ güvenirlik ölçümüyle ilişkili olan $P$ makul ölçümü, $X$ sonlu bir evrensel küme olmak üze aşağıdaki denklemle tanımlanır. $\forall A \in \wp(X)$ için

$$Pl(A) = 1 - Bel(A^c) \qquad (7)$$

ve buradan $Bel(A) = 1 - Pl(A^c)$ bulunur. Dikk güvenirlik ve makul ölçümleri, biri diğerinin eşleni olan fuzzy ölçümleridir.

**Teorem 2.10** $Pl$ makul ölçümü bir fuzzy ölçümüdür.

**İspat:** Tanım 2.5 ve Tanım 2.8'i kullanarak isp yapalım.

**g1.** $Pl(A) = 1 - Bel(A^c)$ olduğundan

$$Pl(\emptyset) = 1 - Bel(\emptyset^c) = 1 - Bel(X) = 0$$

ve buradan $Pl(X) = 1$ olur.

**g2.** $A, B \in \wp(X)$ kümeleri $A \subseteq B$ koşulu sağladığından $Bel(A) \leq Bel(B)$ olduğunu biliyor Buradan $B^c \subseteq A^c$ olduğundan

$$\begin{aligned} & Bel(B^c) \leq Bel(A^c) \\ \Rightarrow\ & 1 - Bel(A^c) \leq 1 - Bel(B^c) \\ \Rightarrow\ & Pl(A) \leq Pl(B) \end{aligned}$$

elde edilir.

g3. $Pl$ fonksiyonu sonlu bir $X$ kümesinin kuvvet kümesi üzerinde tanımlandığından süreklilik şartı göz önüne alınmaz.

$Bel$ ve $Pl$ ölçümleri arasındaki (7) eşitliği kullanılırsa $Bel$ güvenirlik ölçümünde verilen (3) eşitsizliğine benzer bir eşitsizlik elde edilir. $A_1, A_2 \in \wp(X)$ için,

$$Bel(A_1 \cup A_2) \geq Bel(A_1) + Bel(A_2) - Bel(A_1 \cap A_2)$$

ve $A_1^c, A_2^c \in \wp(X)$ olduğundan bu eşitsizlik $A_1^c, A_2^c$ için de sağlanır. Buradan

$$Bel(A_1^c \cup A_2^c)$$
$$\geq Bel(A_1^c) + Bel(A_2^c) - Bel(A_1^c \cap A_2^c)$$
$$\Rightarrow Bel((A_1 \cap A_2)^c)$$
$$\geq Bel(A_1^c) + Bel(A_2^c) - Bel((A_1 \cup A_2)^c)$$
$$\Rightarrow 1 - Bel((A_1 \cap A_2)^c)$$
$$\leq 1 - Bel(A_1^c) + 1 - Bel(A_2^c) - [1 - Bel((A_1 \cup A_2)^c)]$$

olur. Buradan

$$Pl(A_1 \cap A_2) \leq Pl(A_1) + Pl(A_2) - Pl(A_1 \cup A_2) \quad \textbf{(8)}$$

elde edilir. (8) eşitsizliği $n \in N$ olmak üzere $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subseteq \wp(X)$ için genelleştirilirse

$$Pl(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$\leq \sum_i Pl(A_i) - \sum_{i<j} Pl(A_i \cup A_j) + \cdots +$$
$$(-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

elde edilir. Ayrıca (8) eşitsizliğinde $A_1 = A$ ve $A_2 = A^c$ alınırsa

$$Pl(A) + Pl(A^c) \geq 1$$

olarak bulunur. Güvenirlik ölçümlerinde olduğu gibi, her $Pl$ makul ölçümü uygun bir $m$ temel atamasıyla belirlidir. $\forall A \in \wp(X)$ için (5) eşitliği kullanılırsa

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \varnothing} m(B)$$

elde edilir. $Pl(A)$, bir elemanın $A$ kümesine veya onun alt kümesine olan aitliği sorusunun toplam kanıtını veya güvenirliğini göstermez. Fakat bununla birlikte $A$ kümesiyle kesişen (kesişimi boş küme olmayan) toplamsal kanıtı veya güvenirliği gösterir. Dolayısıyla, her $A \in \wp(X)$ kümesi için

$$Pl(A) \geq Bel(A)$$

bulunur.

**Teorem 2.11** Sonlu bir $X$ evrensel kümesinin $\wp(X)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlanmış $\lambda$-fuzzy ölçümü, $-1 < \lambda < 0$ için bir makul ölçümüdür.

**İspat:** $-1 < \lambda < 0$ için $g_\lambda$ bir $\lambda$-fuzzy ölçümü olsun. $\forall A \in \wp(X)$ için $f(A) = 1 - g_\lambda(A^c)$ şeklinde tanımlansın. $f(A \cup B) = 1 - g_\lambda((A \cup B)^c)$ eşitliğini dikkate alalım. $A^c$ ve $B^c$ kümeler

$$g_\lambda(A \cup B)$$
$$= \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)}{1 + \lambda g_\lambda(A \cap B)}$$

eşitliğinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g_\lambda((A \cup B)^c) =$$
$$\frac{g_\lambda(A^c) + g_\lambda(B^c) - g_\lambda((A \cap B)^c) + \lambda g_\lambda(A^c) \cdot g_\lambda(B^c)}{1 + \lambda g_\lambda((A \cap B)^c)}$$

olur. Bu son eşitlikteki $g_\lambda(A^c)$, $g_\lambda(B^c)$ ve $g_\lambda((A \cap B)^c)$ terimlerine $\lambda$-tümleyen formülünü uyguladığımızda, $f$ fonksiyonu $g_\eta$ fonksiyonuna eşit olur. Burada, $\eta : (0,1) \to (0, +\infty)$, $\eta(\lambda) = \dfrac{-\lambda}{1+\lambda}$ şeklinde tanımlı sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla $f$ fonksiyonu bir güvenirlik ölçümü olur. Buradan $g_\lambda$ fonksiyonu $-1 < \lambda < 0$ için makul ölçümüdür.

**Tanım 2.9** [7] Bir $(F, m)$ kanıt miktarının odaksal elemanları iç-içe kümeler ise, bu $m$ temel ataması ile oluşturulan makul ölçümüne konsonant makul ölçümü ve güvenirlik ölçümüne de konsonant güvenirlik ölçümü denir. Burada sözü edilen iç-içe kümeler, $X$ evrensel kümesinin alt kümelerinin bir $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ ailesi $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n$ kapsamasını sağlayan kümelerdir.

**Teorem 2.12** $(F, m)$ konsonant kanıt miktarı olsun. Bu kanıtla ilgili olan güvenirlik ve makul ölçümleri aşağıdaki özellikleri sağlar

**i.** $\forall A, B \in \wp(X)$ için $Bel(A \cap B) = \min[Bel(A), Bel(B)]$

**ii.** $\forall A, B \in \wp(X)$ için $Pl(A \cup B) = \max[Pl(A), Pl(B)]$

**İspat:** Tanım 2.9'u kullanarak ispatı yapalım.

**i.** $F$ kümesindeki odaksal elemanlar iç-içe olsun. $F = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ ve $i \leq j$ olduğunda $A_i \subseteq A_j$

olduğunu kabul edelim. Şimdi $X$'in keyfi $A$ ve $B$ alt kümelerini göz önüne alalım. $i_1 \in N_n$, $A_i \subseteq A$ koşulunu sağlayan en büyük $(1 \le i \le i_1)$ pozitif tam sayı olsun. Benzer şekilde $i_2 \in N_n$ sayısı da $A_i \subseteq B$ koşulunu sağlayan en büyük $(1 \le i \le i_2)$ pozitif tam sayı olsun. Buradan $A_i \subseteq A$ ve $A_i \subseteq B$ olur ancak ve ancak $i \le i_1$ ve $i \le i_2$ ise. Bu gerektirmeden $A_i \subseteq A \cap B \Leftrightarrow i \le \min(i_1, i_2)$ olur. $Bel$ güvenirlik fonksiyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned} Bel(A \cap B) &= \sum_{i=1}^{\min(i_1,i_2)} m(A_i) \\ &= \min\left[\sum_{i=1}^{i_1} m(A_i), \sum_{i=1}^{i_2} m(A_i)\right] \\ &= \min\left[Bel(A), Bel(B)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla birinci eşitsizlik kanıtlanmış olur. Şimdi de diğer eşitsizliği kanıtlayalım.

**ii.** Birinci eşitliğin sağlandığını kabul edelim. (7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} Pl(A \cup B) &= 1 - Bel\left((A \cup B)^c\right) \\ &= 1 - Bel\left(A^c \cap B^c\right) \\ &= 1 - \min\left[Bel\left(A^c\right), Bel\left(B^c\right)\right] \\ &= \max\left[1 - Bel\left(A^c\right), 1 - Bel\left(B^c\right)\right] \\ &= \max\left[Pl(A), Pl(B)\right] \end{aligned}$$

elde edilir.

**Tanım 2.10** [8] Aşağıdaki özelliklere sahip konsonant makul ölçümüne olanak ölçümü denir. Olanak ölçümü fonksiyonu $Pos$ ile gösterilir.

**o1.** $Pos(\varnothing) = 0$

**o2.** $X$ evrensel kümesinin alt kümelerinin bir $\{A_i : i \in N_n\}$ ailesi için

$$Pos\left(\bigcup_{i \in N_n} A_i\right) = \sup_{i \in N_n} Pos(A_i)$$

Olanak ölçümünün tanımı incelendiğinde

$$Pos(A \cup B) = \max\left[Pos(A), Pos(B)\right] \qquad (9)$$

olduğu kolayca görülür. Aşağıdaki teorem olanak ölçümleri için uygun dağılım fonksiyonunun varlığını göstermektedir.

**Teorem 2.13** $\wp(X)$ kuvvet kümesi üzerindeki her olanak ölçümü $r : X \to [0,1]$ tanımlı bir dağılım fonksiyonuyla ifade edilir. Yani, her $A \in \wp(X)$ için

$$Pos(A) = \max_{x \in A} r(x) \qquad (10)$$

olur.

**İspat:** Teoremi $A$ kümesinin eleman sayısı üzerine tümevarımla ispatlayalım.

$|A| = 1$ olsun. Buradan $Pos(A) = Pos(\{x\}) = r(x)$ olur.

$|A| = n-1$ için doğru olsun. Yani $|A| = n-1$ için (10) denklemi sağlansın.

$|A| = n$ için doğruluğunu gösterelim. (9) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &Pos(A) \\ &= \max\left[Pos(\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}), Pos(\{x_n\})\right] \\ &= \max\left[\max\left[Pos(\{x_1\}), Pos(\{x_2\}), \ldots, Pos(\{x_{n-1}\})\right], Pos(\{x_n\})\right] \\ &= \max_{x \in A} r(x) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradaki $r$ fonksiyonuna olanak dağılım fonksiyonu denir.

**Tanım 2.11** [8] Aşağıdaki şartları sağlayan konsonant güvenirlik ölçümüne gereklilik ölçümü denir. Gereklilik ölçümü $Nec$ ile gösterilir.

**n1.** $Nec(X) = 1$

**n2.** $\{A_i : i \in N_n\} \subseteq \wp(X)$ için

$$Nec\left(\bigcap_{i \in N_n} A_i\right) = \inf_{i \in N_n} Nec(A_i)$$

Olanak ölçümünün tanımı dikkate alınırsa, açık bir şekilde gereklilik ve olanak ölçümlerinin birbirinin eşleniği olduğu görülür. Bu ölçümler arasındaki ilişki

$$\forall A \in \wp(X),\ Nec(A) = 1 - Pos\left(A^c\right) \qquad (11)$$

şeklindedir. Dolayısıyla olanak ölçümlerinde ispatlanmış teorem ve özellikler, gereklilik ölçümleri için benzer şekilde türetilir. Teorem 2.13'ü göz önüne alalım. Bu teoremde her olanak ölçümünün uygun bir olanak dağılım fonksiyonuyla ifade edilebileceği ispatlanmıştı. Benzer şekilde, $\forall A \in \wp(X)$ için uygun bir olanak dağılım fonksiyonu var olduğundan

$$\begin{aligned} &Pos\left(A^c\right) = \max_{x \in A^c} r(x) \\ &\Rightarrow\ 1 - Pos\left(A^c\right) = 1 - \max_{x \in A^c} r(x) \\ &\Rightarrow\ Nec(A) = 1 - \max_{x \in A^c} r(x) \\ &\Rightarrow\ Nec(A) = \min_{x \in A^c}\left(1 - r(x)\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan bu son eşitlik $x \in A$ kesinliğinin (gerekliliğinin) derecesini ifade eder. O halde her gereklilik ölçümü için uygun bir dağılım fonksiyonu vardır. Bu fonksiyona gereklilik dağılım fonksiyonu denir. Tanım 2.10 ve Teorem 2.12'den $\forall A, B \in \wp(X)$ için

$$Pos(A \cup B) = \max[Pos(A), Pos(B)]$$

olduğundan

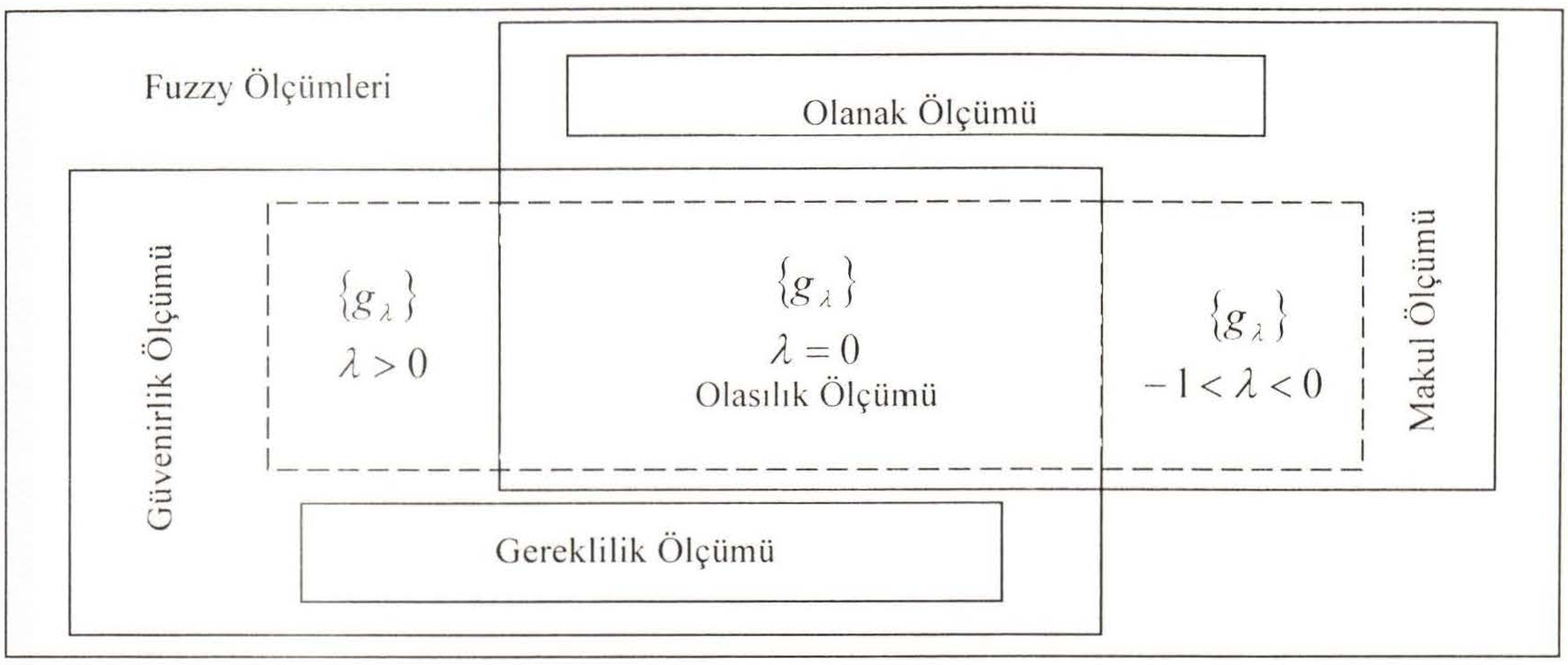
$$1 - Pos(A^c \cup B^c) = 1 - \max\left[Pos(A^c), Pos(B^c)\right]$$

$$\Rightarrow 1 - Pos\left((A \cap B)^c\right) = 1 - \max\left[Pos(A^c), Pos(B^c)\right]$$

$$\Rightarrow 1 - Pos\left((A \cap B)^c\right) = \min\left[1 - Pos(A^c), 1 - Pos(B^c)\right]$$

$$\Rightarrow Nec(A \cap B) = \min[Nec(A), Nec(B)] \qquad \textbf{(12)}$$

elde edilir. Dikkat edilirse $X^c = \varnothing$ olduğundan




**Şekil 1.** Sonu bir evrensel küme için tanımlanmış fuzzy ölçümleri.

$$Pos(\varnothing) = 0 \Rightarrow \quad 1 - Pos(\varnothing) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 - Pos(X^c) = 1$$

$$\Rightarrow \quad Nec(X) = 1$$

olarak bulunur. Buradan da $Nec(\varnothing) = 0$ elde edilir. $\{A_i : i \in N_n\} \subseteq \wp(X)$ olmak üzere

$$Pos\left(\bigcup_{i \in N_n} A_i\right) = \sup_{i \in N_n} Pos(A_i)$$

$$\Rightarrow \quad Pos\left(\bigcup_{i \in N_n} A_i^c\right) = \sup_{i \in N_n} Pos(A_i^c)$$

$$\Rightarrow \quad Pos\left(\left(\bigcap_{i \in N_n} A_i\right)^c\right) = \sup_{i \in N_n} Pos(A_i^c)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - Pos\left(\left(\bigcap_{i \in N_n} A_i\right)^c\right) = 1 - \sup_{i \in N_n} Pos(A_i^c)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - Pos\left(\left(\bigcap_{i \in N_n} A_i\right)^c\right) = \inf_{i \in N_n}\left(1 - Pos(A_i^c)\right)$$

$$\Rightarrow \quad Nec\left(\bigcap_{i \in N_n} A_i\right) = \inf_{i \in N_n} Nec(A_i)$$

elde edilir.

## 3. SONUÇ

Sonlu bir evrensel kümenin kuvvet kümesi dikkate alındığında $\lambda$-fuzzy ölçümü $\lambda > 0$ için bir güvenirlik ölçümü ve $-1 < \lambda < 0$ için bir makul ölçümü olur.

Dolayısıyla $\lambda > 0$ ve $-1 < \lambda < 0$ için sırasıyla güvenirlik ve makul ölçümü, sonlu bir evrensel kümenin kuvvet kümesi üzerinde tanımlanmış $\lambda$-fuzzy ölçümünden daha genel olur.

Tek nokta kümeleri dikkate alındığında temel atama fonksiyonu olasılık dağılım fonksiyonu olmaktadır. Dolayısıyla her $A \in \wp(X)$ için

$$Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A)$$

eşitsizliği ancak temel atama fonksiyonu tek nokta kümeleri üzerinde odaklandığında eşitlik durumuna dönüşür.

Makul ölçümü ve güvenirlik ölçümü birbirinin eşleniği olduğundan, sonlu bir evrensel kümenin kuvvet üzerinde tanımlanmış Dirac ölçümü aynı zamanda makul ölçümü olur.

Sonlu kümeler dikkate alındığında $\lambda > 0$ için güvenirlik ölçümleri $\lambda$-fuzzy ölçümlerinden daha genel olur. Dolayısıyla güvenirlik ölçümü her zaman bir $\lambda$-fuzzy ölçümü değildir.

Şekil 1'de görüldüğü gibi, sonlu bir evrensel kümenin kuvvet kümesi üzerinde tanımlanmış Dirac ölçümü, $\lambda$-fuzzy ölçümü, olasılık ölçümü, güvenirlik ölçümü, makul ölçümü, olanak ölçümü ve gereklilik ölçümü arasındaki ilişki şematik olarak gösterilmiştir.

$(F, m)$ konsonant kanıt miktarı olmak üzere, $A, B \in \wp(X)$ için

$$Bel(A \cap B) = \min[Bel(A), Bel(B)]$$
$$Pl(A \cup B) = \max[Pl(A), Pl(B)]$$

eşitlikleri (Teorem 2.12) dikkate alındığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 3.1**

**i.** Her $A \in \wp(X)$ için $Pos(A) = 1$ veya $Pos(A^c) = 1$'dir.

**ii.** Her $A \in \wp(X)$ için $Nec(A) = 0$ veya $Nec(A^c) = 0$'dır.

**iii.** $Pos(A) = 1$ ise $Nec(A^c) = 0$'dır.

**iv.** $Nec(A) = 0$ ise $Pos(A^c) = 1$'dir.

## KAYNAKLAR


[1]. Balcı, M. *Reel Analiz*, Balcı Yayınları, Ankara. (2000).

[2]. Cheng, B. *Probability Measure and Its Propertie*, STAT 609. (2000).

[3]. Dubois, D. and Prade, H. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York. (1980)

[4] Grabisch, M., Murofushi, T. and Sugeno, M. *Fuzzy Measures and Integrals*, Physica-Verlag: Heidelberg. (1999)

[5]. Halmos, P. R. *Measure Theory*. New York: Van Nostrand Reinhold. (1968)

[6]. Karataş, S. *Fuzzy Ölçüm Metotları*, Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat. (2004)

[7]. Klir, J. G, and Folger, T. A. *Fuzzy Sets, And Information*, New Jersey. (1988)

[8]. Kaufmann, A. and Gupta, M.M. *Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications*, Van Nostrand Rienhold, New York. (1991)

[9]. Murofushi, T., Sugeno, M. and Machida, M., *Non-monotonic fuzzy measures and the Choquet integral*, Fuzzy Sets and Systems 64, 73-86 (1994)

[10]. Shafer, G. *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Pres, Princeton. (1976)

[11]. Sugeno, M. *Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals*, In: Gupta, Saridis, and Gaines pp.89-102. (1977)

[12]. Wang, Z. and Klir, G. *Fuzzy Measure Theory*, New York: Plenum Press. (1992)

[13]. Yager, R.R. *On the entropy of fuzzy measure*, IEEE Transactions on Fuzzy Sets Systems 8, 453-461 (2000)

[14]. Zadeh, L.A., *Fuzzy Sets*, Inform and Control 8, 338-352 (1965)

[15]. Zimmermann, H.J. (1991) *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer. (1991)