BİR GENEL PARÇALANMIŞ LİNEER MODEL ve İLİŞKİLİ İNDİRGENMİŞ LİNEER MODELLER ALTINDA TAHMİNLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Nesrin DEMİRTAŞ, Halim ÖZDEMİR, Murat SARDUVAN

Özet – **Bir genel parçalanmış lineer modele karşılık gelen indirgenmiş lineer model altında gözlenebilir rasgele vektörün beklenen değerinin BLUE sunun, genel parçalanmış lineer model altında da BLUE kalması için gerek ve yeter bir koşul detaylı olarak incelenmektedir.**

Anahtar Kelimeler - **BLUE, parçalanmış lineer model, indirgenmiş lineer model, dik izdüşümler.**

Abstract – **It is studied in a detailed manner that a necessary and sufficient condition for the BLUE for the expectation of observable random vector under the reduced linear model corresponding to a general partitioned linear model as well.**

Keywords – **BLUE, partitioned linear model, reduced linear model, orthogonal projectors.**

I. GİRİŞ

$\Upsilon^{m\times n}$ $m\times n$ boyutlu reel matrislerin kümesi olmak üzere $\mathbf{A}', \mathbf{A}^{+}, \mathbf{A}^{-}, \Re(\mathbf{A}), N(\mathbf{A})$ ve $r(\mathbf{A})$ sembolleri $\mathbf{A}\in\Upsilon^{m\times n}$ nin sırasıyla transpozesini, Moore-Penrose tersini, herhangi bir genelleştirilmiş tersini, sütun uzayını, sıfır uzayını ve rankını göstermektedir. $\mathbf{A}^{\perp}$ ile $\Re(\mathbf{A}^{\perp}) = N(\mathbf{A}')$ koşulunu gerçekleyen herhangi bir matris gösterilecektir. Ayrıca $\mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$, $\Re(\mathbf{A})$ üzerine (standart iç çarpıma göre) dik izdüşüm olmak üzere, $\mathbf{M}_{\mathbf{A}} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{A}}$ yı ve özellikle $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{\mathbf{X}_i}$ olmak üzere $\mathbf{M}_i = \mathbf{I} - \mathbf{P}_i$; $i = 1,2$ göstermektedir.

$$M = \{\mathbf{y}, \mathbf{X\beta}, \sigma^2\mathbf{V}\},\ \mathrm{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{X\beta},\ \mathbf{D}(\mathbf{y}) = \sigma^2\mathbf{V} \tag{1.1}$$

ile gösterilen genel Gauss-Markov Modelini ele alalım. Burada $\mathbf{X}$, bir $n\times p$ boyutlu bilinenler matrisi, $\boldsymbol{\beta}$, bir $p\times 1$ boyutlu bilinmeyen parametreler vektörü, $\mathbf{V}$, bir $n\times n$ boyutlu bilinen nonnegatif (negatif olmayan) kararlı matris ve $\sigma^2 > 0$ bir bilinmeyen skalerdir. Modelin tutarlı olduğu yani

$$\mathbf{y} \in \Re(\mathbf{X} : \mathbf{V}) \tag{1.2}$$

kabul edilsin. $\mathbf{K}\in\Upsilon^{k\times p}$ olmak üzere, bir $\mathbf{K\beta}$ parametrik fonksiyonlar vektörü tahmin edilebilirdir ancak ve ancak bir $\mathbf{C}\in\Upsilon^{k\times n}$ için $\mathbf{K} = \mathbf{CX}$ dir. M modeli altında $\mathbf{CX\beta}$ tahmin edilebilir parametrik fonksiyonlar vektörünün en iyi lineer yansız tahmin edicisinin (BLUE sunun) $\mathbf{Fy}$ ile verildiği iyi bilinmektedir. Burada $\mathbf{F}\in\Upsilon^{k\times n}$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X} : \mathbf{VX}^{\perp}) = \mathbf{C}(\mathbf{X} : \mathbf{0}) \tag{1.3}$$

denkleminin herhangi bir çözümüdür. $\mathbf{Gy}$, $\mathbf{X\beta}$ nın BLUE sudur, yani $\mathbf{G}\in\Upsilon^{n\times n}$,

$$\mathbf{G}(\mathbf{X} : \mathbf{VX}^{\perp}) = (\mathbf{X} : \mathbf{0}) \tag{1.4}$$

denkleminin bir çözümü ise, bu durumda $\mathbf{CG}$ (1.3) ün bir çözümüdür ve dolayısı ile $\mathbf{CGy}$, $\mathbf{CX\beta}$ nın BLUE sudur. $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ sırasıyla p_1 ve p_2 sütuna sahip olmak üzere (burada $p_1 + p_2 = p$)

N. Demirtaş; Büyükgazi İlköğretim Okulu, SAKARYA
H.Özdemir; Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Esentepe Kampusü, SAKARYA
hozdemir@sakarya.edu.tr
M. Sarduvan; Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Esentepe Kampusü, SAKARYA

$\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)$ şeklinde parçalanarak ve $\boldsymbol{\beta}=\left(\boldsymbol{\beta}_1':\boldsymbol{\beta}_2'\right)'$ şeklinde yazılarak M modeli

$$M=\{\mathbf{y},\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\mathbf{V}\} \qquad (1.5)$$

biçiminde gösterilebilir. $\boldsymbol{\beta}_1$ kısıtlanacak parametre olarak göz önüne alınsın. $\mathbf{K}_2\boldsymbol{\beta}_2$ tahmin edilebilir parametrik fonksiyon vektörünün tahmini ile ilgili aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma1.1: $M=\{\mathbf{y},\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\mathbf{V}\}$ modeli altında $\mathbf{K}_2\boldsymbol{\beta}_2$ parametrik fonksiyonlar vektörü tahmin edilebilirdir ancak ve ancak bir $\mathbf{C}_2$ matrisi için $\mathbf{K}_2=\mathbf{C}_2\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ dir. Burada $\mathbf{M}_1=\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{X}_1}$ $N(\mathbf{X}_1')$ üzerine ortogonal izdüşümü gösterir [1].

+

Yukarıdaki bilgiler çerçevesinde artık $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ nin tahmini üzerinde durulabilir.

M modeli altında $\mathbf{y}$ gözlenebilir rasgele vektörün $\mathbf{M}_1\mathbf{y}$ lineer dönüşümü ele alınsın. Burada M modeli ile uyumlu ve $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ hakkında sonuç çıkarmak için uygun olan

$$M_{cr}=\{\mathbf{M}_1\mathbf{y},\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\mathbf{M}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1\} \qquad (1.6)$$

indirgenmiş modeli elde edilir. Öte yandan $\{\mathbf{y},\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\mathbf{V}\}$ üçlüsü $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ nin tahmini için ihtiyaç duyulan bilgileri içerir. Buradan,

$$M_r=\{\mathbf{y},\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\mathbf{V}\}, \quad \mathrm{E}(\mathbf{y})=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \quad \mathrm{D}(\mathbf{y})=\sigma^2\mathbf{V} \qquad (1.7)$$

indirgenmiş modeli elde edilir.

II. ANA SONUÇLAR

II.1 Parçalanmış Lineer Model Altında Tahmin

(1.5) de verilen M genel parçalanmış lineer modeli

$$\{\mathbf{y},\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\} \qquad (2.1)$$

ile gösterilsin. Burada, (1.5) de $\mathbf{V}$ ile gösterilen varyans kovaryans matrisinin pozitif kararlı olduğu durum ele alınacağından karmaşıklık olmasın diye; $\boldsymbol{\Omega}$ olarak gösterilmiştir.

Lemma2.1: $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ve $\boldsymbol{\Omega}$ (2.1) de tanımlandığı gibi ve $\mathbf{M}_1=\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{X}_1}$ olsun.

$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Omega}^{-1}-\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_1\left(\mathbf{X}_1'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_1\right)^{-}\mathbf{X}_1'\boldsymbol{\Omega}^{-1} \qquad (2.2)$$

yazılsın. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

- i) $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X}_1=\mathbf{0}$ ve $r(\boldsymbol{\Sigma})=r(\mathbf{M}_1)$,
- ii) $\mathbf{M}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M}_1=\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M}_1=\mathbf{M}_1\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Sigma}$,
- iii) $\boldsymbol{\Sigma}$, $\mathbf{M}_1\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}_1$ in bir genelleştirilmiş tersidir.
- iv) $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ nın genelleştirilmiş tersidir.
- v) $\mathbf{M}_1\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}_1$, $\boldsymbol{\Sigma}$ nın Moore-Penrose tersidir [2].

+

$\boldsymbol{\beta}_2$ nin tahmin edilebilir lineer fonksiyonlarıyla ilgili tüm lineer sonuçların çakıştığını göstermek için aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma2.2: n gözlemli $(\mathbf{U},\mathbf{W}\boldsymbol{\beta},\sigma^2\mathbf{V})$ lineer modeli ele alınsın. Burada $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{V}$ nin her ikiside tam ranklı olmayabilir. Bu durumda $\mathbf{p}'\boldsymbol{\beta}$ tahmin edilebilir lineer parametrik fonksiyonunun lineer tahmin edicisi, aynı zamanda onun BLUE sudur ancak ve ancak bu lineer yansız tahmin edici $(\mathbf{I}-\mathbf{P}_\mathbf{W})\mathbf{U}$ ile ilişkili değildir [3].

+

Teorem2.1: (2.1) ve $\{\mathbf{M}_1\mathbf{y},\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\mathbf{M}_1\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}_1\}$ modelleri altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ nin BLUE ları çakışır [2].

Teorem2.2: $\{\mathbf{y},\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1,\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\}$ ve $\{\mathbf{y},\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1,\sigma^2\mathbf{I}\}$ modelleri altında $\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1$ in BLUE ları çakışsın. (Gerek ve yeter şart için [4]e bakınız.) Bu durumda, (2.1) ve $\{\mathbf{y},\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\}$ modelleri altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ nin BLUE ları çakışır.

İspat: (2.1) altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ nin BLUE su,

$$\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X}_2\right)^-\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y} \tag{2.3}$$

dir $[2]$. $\{\mathbf{y},\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\}$ modeli altında bu ifadenin yansız tahmin olduğu kolayca doğrulanabilir. Gerçekten,

$$E\left(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X}_2\right)\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y}\right)=$$

$$=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X}_2\right)^-\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$$

(Teo2.1den)

$$=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_2{}'\mathbf{M}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\right)^-\mathbf{X}_2{}'\mathbf{M}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$$

(Lemma2.1(ii)den)

$$=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$$

$\left(\Re\left(\mathbf{X}_2{}'\mathbf{M}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\right)=\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)\right)$ olduğu için

dir. Şimdi (2.3) ün $\{\mathbf{y},\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\}$ altında her lineer fonksiyon ile ilişkisiz olduğu gösterilmelidir. $\{\mathbf{y},\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1,\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\}$ ve $\{\mathbf{y},\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1,\sigma^2\mathbf{I}\}$ modelleri altında $\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1$ in BLUE ları çakıştığından, $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{y}=\mathbf{X}_1\left(\mathbf{X}_1{}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_1\right)^-\mathbf{X}_1{}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$ olur ve böylece simetriden

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}_1}=\mathbf{X}_1\left(\mathbf{X}_1{}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_1\right)^-\mathbf{X}_1{}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_1\left(\mathbf{X}_1{}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_1\right)^-\mathbf{X}_1{}' \tag{2.4}$$

bulunur. $\mathbf{l}'\mathbf{y}$, $\{\mathbf{y},\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\}$ modeli altında bir lineer sıfır fonksiyondur ancak ve ancak $\mathbf{X}_2\mathbf{M}_1\mathbf{l}=\mathbf{0}$ dir $[5]$. Bu şekilde bir $\mathbf{l}$ için,

$$\operatorname{cov}\left(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X}_2\right)^-\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y},\mathbf{l}'\mathbf{y}\right)=$$

$$=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X}_2\right)^-\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\mathbf{l}$$

$$=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X}_2\right)^-\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{l}\sigma^2$$

$$=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X}_2\right)^-\mathbf{X}_2{}'\cdot$$

$$\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_1\left(\mathbf{X}_1{}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_1\right)^-\mathbf{X}_1{}'\right)\mathbf{l}\sigma^2$$

$$=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_2{}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X}_2\right)^-\mathbf{X}_2{}'\mathbf{M}\mathbf{l}\sigma^2$$

$$=\mathbf{0}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

+

Şimdi daha genel bir durumun, yani varyans kovaryans matrisinin nonnegatif kararlı olduğu durum detaylı olarak incelenecektir.

II.2 Genel Parçalanmış Lineer Model Altında Tahmin

Bu kısımda M_r modeli ele alınsın. Açıkça bir lineer model olarak M_r modelini ele alınırsa, modelin tutarlılığı için (1.2) ye uygun olarak

$$\mathbf{y}\in\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2:\mathbf{V}) \tag{2.5}$$

kabul edilmek zorundadır. M ve M_r modellerinin çelişmemesi için

$$\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2:\mathbf{V})=\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2:\mathbf{V}) \tag{2.6}$$

kabul edilir. Açıkça M, M_r ile çelişmiyorsa, $\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2:\mathbf{V})\subseteq\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2:\mathbf{V})$ olduğundan dolayı, M nin tutarlılığı, M_r nin tutarlılığını gösterir. Eğer M yalnızca zayıf singüler ise, yani

$$\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)\subseteq\Re(\mathbf{V}) \tag{2.7}$$

ise, M hiçbir zaman M_r ile çelişmez.

Lemma2.3: $\mathbf{X}_1\in\mathbb{R}^{n\times p_1}$, $\mathbf{X}_2\in\mathbb{R}^{n\times p_2}$ ve nonnegatif kararlı bir $\mathbf{V}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ alınsın.

i) Aşağıdaki üç durum denktir.

a$_1$) $\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2:\mathbf{V})=\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2:\mathbf{V})$

a$_2$) $\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2:\mathbf{V})$

a$_3$) $r(\mathbf{X}_1)+dim[\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)\cap\Re(\mathbf{V})]=$
$=dim[\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)\cap\Re(\mathbf{V})]$

ii) a$_1$) koşulu aşağıdaki 4 durumu gösterir (ilk üçü özdeş olmak üzere).

b$_1$) $\Re(\mathbf{X}_1)=\Re(\mathbf{P}_1\mathbf{V})$

b$_2$) $r(\mathbf{X}_1)=r(\mathbf{V}\mathbf{X}_1)$

b$_3$) $\Re(\mathbf{X}_1)\cap\Re(\mathbf{V}^{\perp})=\{0\}$

b$_4$) $\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re((\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2})\mathbf{V})$

iii)Aşağıdaki iki koşul denktir.

c$_1$) $\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re(\mathbf{V})$

c$_2$) $\Re(\mathbf{X}_1)\oplus[\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)\cap\Re(\mathbf{V})]=$
$=\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)\cap\Re(\mathbf{V})$

dir. Burada c$_1$) in a$_1$) i vurguladığına fakat a$_1$) in c$_1$) i daima vurgulamadığına dikkat ediniz $[1]$.

+

Aşağıdaki iki lemma M ve M_r altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ nin BLUE larının karekterizasyonunu vermektedir. M ve M_r modelleri çelişmediği kabul edildiği için $\mathbf{F}_1\neq\mathbf{F}_2$ olabilirliği ile M_r modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ nin BLUE sunun her iki gösterimi olan $\mathbf{F}_1\mathbf{y}$ ve $\mathbf{F}_2\mathbf{y}$, her $\mathbf{y}\in\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2:\mathbf{V})=\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2:\mathbf{V})$ için

$$\mathbf{F}_1\mathbf{y}=\mathbf{F}_2\mathbf{y} \tag{2.8}$$

ifadesini sağlar.

Lemma2.4: $\mathbf{Z}=\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$ ve $\mathbf{V}_*=\mathbf{M}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1$ olsun. Aşağıdaki dört durum denktir.

i) $\mathbf{F}\mathbf{y}$, $M=\{\mathbf{y},\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\mathbf{V}\}$ modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE dur.

ii) $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)=(\mathbf{0}:\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)$ ve $\mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{M}_1\mathbf{Z}=\mathbf{0}$ ifadelerini sağlar.

iii) $\mathbf{F}=\mathbf{N}\mathbf{M}_1$ dir. Burada, $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{N}\mathbf{V}_*\mathbf{Z}=\mathbf{0}$ ifadelerini sağlar.

iv) En az bir $\mathbf{P}$ için

$$\mathbf{F}=\left[\mathbf{I}-\mathbf{V}_*\mathbf{Z}(\mathbf{Z}\mathbf{V}_*\mathbf{Z})^+\mathbf{Z}\right]\mathbf{M}_1 +\mathbf{P}\left[\mathbf{I}-\mathbf{Z}\mathbf{V}_*\mathbf{Z}(\mathbf{Z}\mathbf{V}_*\mathbf{Z})^+\mathbf{Z}\right]\mathbf{Z}\mathbf{M}_1$$

dir $[1]$.

+

Lemma 2.5: $\mathbf{Z}=\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$ olsun. Aşağıdaki üç durum denktir.

i) $\mathbf{F}\mathbf{y}$, $M_r=\{\mathbf{y},\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2,\sigma^2\mathbf{V}\}$ modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE dur.

ii) $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{Z}=\mathbf{0}$ i sağlar

iii) En az bir $\mathbf{B}$ için

$$\mathbf{F}=\left[\mathbf{I}-\mathbf{V}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}\mathbf{V}\mathbf{Z})^+\mathbf{Z}\right]+\mathbf{B}\left[\mathbf{I}-\mathbf{Z}\mathbf{V}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}\mathbf{V}\mathbf{Z})^+\mathbf{Z}\right]\mathbf{Z}$$

dir $[1]$.

+

Teorem 2.3: M ve M_r modelleri çelişmesin. M_r altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE, M altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalır ancak ve ancak

$$\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re\left(\mathbf{V}\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{M}\mathbf{X}_2}\right)\right) \tag{2.9}$$

dir.

İspat: $\mathbf{F}\mathbf{y}$ nin, M_r altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE olduğu kabul edilsin. Bunun anlamı $\mathbf{F}$ Lemma 2.5 ten elde edilen herhangi bir matristir. Lemma 2.5 (ii) den

$\mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{Z}=\mathbf{F}\mathbf{V}\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\right)=\mathbf{0}$ olduğundan,

$\mathbf{F}\mathbf{V}=\mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$ dir ve

$\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}=\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{X}_1}\right)=\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{M}_1$ olduğundan

$$\mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{M}_1=\mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{M}_1=\mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}=\mathbf{F}\mathbf{V} \tag{2.10a}$$

elde edilir. $(2.10a)$ daki $\mathbf{F}\mathbf{V}_1=\mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{M}_1$ ifadesini $\mathbf{Z}$ ile sağdan çarpılırsa,

$$\mathbf{F}\mathbf{V}_1\mathbf{Z}=\mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{M}_1\mathbf{Z}=\mathbf{0} \tag{2.10b}$$

olur. Böylece Lemma 2.4 (ii) den $\mathbf{F}\mathbf{y}$, M altında BLUE dur ancak ve ancak

$$\mathbf{F}\mathbf{X}_1=\mathbf{0} \text{ ve } \mathbf{F}\mathbf{X}_2=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 \tag{2.11}$$

dir. $\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0}$ dir ancak ve ancak $\mathbf{F} = \mathbf{FM}_1$ dir. Dolayısıyla $\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{FX}_2 = \mathbf{FM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ yi vurgular. Buradan, M_r altında BLUE olan her $\mathbf{Fy}$, M altında BLUE dur ancak ve ancak

$$\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0} \qquad (2.12)$$

dır. Geriye M_r altında her bir $\mathbf{Fy}$ BLUE su için (2.9) un (2.12) ye denk olduğunu göstermek kalır. (2.12) nin Lemma 2.5 (iii) den elde edilen bir $\mathbf{F}$ matrisi için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, $\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0}$ olduğundan, $\left[\mathbf{I} - \mathbf{VZ}(\mathbf{ZVZ})^{+}\mathbf{Z}\right]\mathbf{X}_1 + \mathbf{B}\left[\mathbf{I} - \mathbf{ZVZ}(\mathbf{ZVZ})^{+}\mathbf{Z}\right]\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ ın özel bir çözümü; $\left[\mathbf{I} - \mathbf{VZ}(\mathbf{ZVZ})^{+}\mathbf{Z}\right]\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ dir. Yani $\mathbf{X}_1 \in \Re\left(\mathbf{VZ}(\mathbf{ZVZ})^{+}\mathbf{Z}\right)$ olduğundan, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{VZB}$ olacak şekilde en az bir $\mathbf{B}$ matrisi vardır. O halde, $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{VZ})$ dir. Yani (2.9) sağlanır.

Tersini ele aldığımızda eğer (2.9) sağlanırsa, $\Re(\mathbf{ZX}_1) \subseteq \Re(\mathbf{ZVZ})$ yani $\mathbf{ZX}_1 = \mathbf{ZVZB}$ olacak şekilde en az bir $\mathbf{B}$ matrisi vardır. Bu lineer denklem sisteminin tutarlı olması koşulundan yani $\mathbf{ZX}_1 = \mathbf{ZVZ}(\mathbf{ZVZ})^{+}\mathbf{ZX}_1$ yazılır. Lemma2.5(iii) den M_r altında her $\mathbf{Fy}$ BLUE su için

$$\mathbf{FX}_1 = \left[\mathbf{I} - \mathbf{VZ}(\mathbf{ZVZ})^{+}\mathbf{Z}\right]\mathbf{X}_1 \qquad (2.13)$$

dir. (2.9) a göre en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için $\mathbf{X}_1 = \mathbf{VZA}$ olduğundan bu ifade (2.13) de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{FX}_1 = \left[\mathbf{I} - \mathbf{VZ}(\mathbf{ZVZ})^{+}\mathbf{Z}\right]\mathbf{VZA}$$
$$= \mathbf{VZA} - \mathbf{VZ}(\mathbf{ZVZ})^{+}\mathbf{ZVZA} \text{ olur.}$$

$\mathbf{VZ} = \mathbf{VZ}(\mathbf{ZVZ})^{+}\mathbf{ZVZ}$ olduğundan $[4]$ $\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0}$ a ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

+

Sonuç2.1: Teorem2.3 ün ispatından iddianın doğru olduğu, "M altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalır" deyimi ile "M altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için yansız" deyimi yer değiştirildiğinde görülür.

Teorem2.4: $r(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = r(\mathbf{X}_1) + r(\mathbf{X}_2)$ ve $\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = \Re(\mathbf{V})$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $\mathbf{X}_2\mathbf{M}_1\mathbf{V}^{+}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$

b) M_r modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE, M modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalır $[6]$.

+

Şimdi M zayıf singüler modeli ve Teorem2.4 ile uyumlu olan bir sonuç ortaya koyulabilir.

Sonuç2.2 M parçalanmış modeli zayıf singüler olsun. Bu durumda M_r indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE, M altındaki $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalır ancak ve ancak $\mathbf{V}$ nin herhangi bir $\mathbf{V}^{-}$ genelleştirilmiş tersi için

$$\mathbf{X}_2\mathbf{M}_1\mathbf{V}^{-}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0} \qquad (2.14)$$

dır.

İspat: Önce $\mathbf{V}^{-}$ genelleştirilmiş tersinin seçimine göre $\mathbf{X}_2\mathbf{M}_1\mathbf{V}^{-}\mathbf{X}_1$ in değişmezliği

$$\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{V}) \text{ ve } \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \subseteq \Re(\mathbf{V}) \qquad (2.15)$$

ifadelerine denktir $[7]$. Tabi ki $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{X}_2{}'\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{0}$ kabul edilir. (2.15) koşulları $\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \subseteq \Re(\mathbf{V})$ ifadesine denktir ki bunun anlamı M zayıf singülerdir.

Eğer (2.14) sağlanıyorsa, en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için $\mathbf{V}^{-}\mathbf{X}_1 = \mathbf{ZA}$ dır. $\mathbf{V}^{-}\mathbf{X}_1 \in \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{\perp}$ olur. Buradaki eşitlik $\mathbf{Z}$ nin $(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm için özel bir seçim olduğuna dikkat etmek suretiyle görülür. Burada $\mathbf{Z} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\right)$ dir. M zayıf singüler olduğu için, $\mathbf{VV}^{-}\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1$ dir. Çünkü $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{V})$ olduğundan $\mathbf{X}_1 = \mathbf{VB}$ denklem sisteminin tutarlı olması için gerek ve yeter koşul

$\mathbf{VV^{-}X_1 = X_1}$ olmasıdır. Burada $\mathbf{V^{-}X_1 = ZA}$ ifadesini soldan $\mathbf{V}$ ile çarptığımızda $\mathbf{VV^{-}X_1 = VZG \Rightarrow X_1 = VZG}$ olur. Böylece $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{V})$ olduğu görülür. O halde Teorem2.3 deki (2.9) koşulunun sağlanmasından dolayı M_r altında $\mathbf{M_1X_2\beta_2}$ için BLUE, M altındaki $\mathbf{M_1X_2\beta_2}$ için BLUE yazılır.

Tersine olarak eğer Teorem2.3 deki (2.9) koşulu sağlanırsa ve M zayıf singüler olduğundan

$$\begin{aligned}\mathbf{X_2M_1V^{-}X_1} &= \mathbf{X_2'M_1V^{-}VZA}\\ &= \mathbf{X_2'M_1ZA}\\ &= \mathbf{X_2'ZM_1A}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = \Re(\mathbf{X}_1) + \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \subseteq \Re(\mathbf{V})$ ise, $\mathbf{M_1X_2 = VB}$ dir. Bu denklemin tutarlı olması için $\mathbf{M_1X_2 = VV^{-}M_1X_2}$ ve dolayısı ile $\mathbf{X_2'M_1 = X_2'M_1V^{-}V}$ dir. Ayrıca $\mathbf{M_1Z = ZM_1}$ olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

+

Sonuç2.3 M ve M_r modelleri çelişmesin. Bu durumda

$$\Re(\mathbf{VX}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1) \qquad (2.16)$$

ise, M_r altında her BLUE, M altında $\mathbf{M_1X_2\beta_2}$ için BLUE kalır[1].

+

Sonuç2.4 M ve M_r modelleri çelişmesin. Eğer $\mathbf{P_{M_1X_2}y}$, M_r indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M_1X_2\beta_2}$ için BLUE ise, bu durumda M altında BLUE kalır[1].

+

KAYNAKLAR

[1] J. Gross, S. Puntanen, Estimation under a general partitioned linear model, Linear Algebra and its Applications, 321(2000), 131-144.

[2] P. Bhimasankaram, R. SahaRay, On a partitioned linear model and some associated reduced models, linear Algebra and its Applications, 264(1997), 329-339.

[3] C.R. Rao, A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results, Sankhya Ser., 30(1968), 259-266.

[4] S. Puntanen, G.P.H. Styan, The equality of the ordinary least square estimator and the best linear unbiased estimator (with discussion), Amer. Statist., 43(1989), 151-164.

[5] P. Bhimasankaram, D. Sengupta, The linear zero functions approach to linear models, Sankhya ser., 58(1996) 338-351.

[6] S. Puntanen, Some further results related to reduced singular linear models, Commun. Statist. Theory Math., 25(1996), 269-279.

[7] C.R. Rao, S. K. Mitra, Generalized Inverse of matrices and its applications, Wiley, New York, 1971