GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE ORTALAMA YÖNTEMİ

Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, İsmail ÖZTÜRK

Özet – **Günlük hayatta gecikme kaçınılmaz bir sonuçtur. Kullanılan herhangi bir fiziksel sistemde mutlaka, saniyelerle bile olsa bir gecikme oluşmaktadır. Bazı sistemlerde bu gecikme mikrosaniyelerle ifade edilse de, sonuçta bir gecikme sürecine bağlıdır. Etkiyi veren uyarıcı x(t), y(t) tepkisiyle sonuç bulur. Buradaki t zamanı, h ise gecikmeyi ifade etmek üzere y(t) tepkisi x(t-h) uyarıcısına eşit olur. Daha kapsamlı sistemlerde gecikme birden fazla da olabilir. Matematiksel ifadelerle aşağıdaki gibi bir başlangıç değer problemi ele alınırsa;**

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad t \geq t_0$$

$$x(t) = x_0$$

x_0 başlangıç değerini, t_0 başlangıç noktasını belirtir. x_0 ve t_0 reel sabit sayılardır. Eğer t noktasındaki bir çözümün değişim oranı yalnızca t noktasındaki çözüme değil , aynı zamanda t'den farklı değerlerdeki çözüme ve çözümün türevlerine bağlı ise buna fonksiyonel diferansiyel denklem veya sapmalı argümentli diferansiyel denklem adı verilir. Bu çalışmada sapma argümentli diferansiyel denklemlerin sınıflarından biri olan gecikmeli diferansiyel denklemler ve çözüm yöntemlerinden biri olan ortalama yöntemi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler – **Sapma argümentli diferansiyel denklem, ortalama yöntemi, gecikme**

Abstract – **Delay is an unavoidable result in daily life. There occur a delay absolutely in seconds in whichever phsical systems which are used. Even though in some systems delay continues microsecond, as a result the depends on the delay process. The stimulant x(t) which gives the efect results whit y(t) reaction. Here t represents time, h represents delay and so y(t) reaction is equal to x(t-h) stimulant. In comprehensive systems delay can be more than one. When we consider a beginning value problem as follows:**

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad t \geq t_0$$

$$x(t) = x_0$$

x_0 represents the beginning value, t_0 represents the beginning point. x_0 and t_0 are real definite numbers. If the variation rate of the solution t-point depends not only on the solution at t-point, but also at the same time depends on solution of the different values of t and derivative of the solution, so it is called functional differantial equations or differantial equation with deviation arguments. In this study, differantial equations with delay which is one of the class of differantial equations with deviation arguments and one of the solution method called averaging method are examined,

Key Words - **Differantial equations with deviation arguments,averaging method,delay**

Ö.Faruk Gözükızıl, SAÜ Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sakarya,farukg@sakarya.edu.tr
İ.Öztürk, SAÜ Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sakarya,ismailozturkk@mynet.com

I.GİRİŞ

Bilim, çevremizde oluşan olayları incelerken ve bu olaylar hakkında tahminlerde bulunurken ilginç yaklaşımlarda bulunur. Bazı olayları izlemeye dayanarak, gelecekte olabilecek olayları tahmin eder ve bunun için ele aldığı olayın veya sistemin matematiksel bir modelini kurmayı hedefler. Fakat birçok uygulamada , kurulan modelin incelenen olayın veya sistemin gelecekteki durumunun geçmişteki durumdan bağımsız olarak hareket edeceği varsayılarak hazırlanır. Bu durumun sonucu olarak olaya karşı gelen denklem de, olayın şu anki durumu ve şu anki durumunun değişim oranının ortaya çıktığı kabul edilirse, bu duruma en güvenli yaklaşım diferansiyel denklemlerdir.

Ayrıntılı bir araştırma, yukarıda bahsettiğimiz kuralın yalnızca bir ilk yaklaşım olduğunu ve bu yaklaşımda geçmişe dönük durumların da ele alınması modellemenin daha sağlıklı olmasını sağlar. Özellikle bazı problemlerde geçmişe dönük durumları modellemeye katmamak sistemi anlamsız kılar. Bu durum, kontrol teorisinde tüm çıplaklığıyla göze çarpan bir durumdur [3,5]. Normal şartlarda dışarıdan algılanan bilgiler düşünüldüğünde etkiye karşı tepki gösteren her sistemde çok azda olsa bir gecikme oluşur. Çünkü dışarıdan alınan her etkiye karşı oluşturulan bir tepki, zamana bağlı olarak oluşur.

Yukarıda anlatılan bu tepki modellemede geçmişe bağımlılığın ortaya çıktığı en basit hal, durum değişkeninde geçmişe bağımlılık olup türevinde böyle bir bağımlılığın söz konusu olmamasıdır. Bu tür denklemlere gecikmeli diferansiyel denklemler denir.

Sonuç olarak, ister geçmişe bağımlılık göz önünde tutulsun ister tutulmasın, bir çok olayın matematiksel modeli kurulmaya çalışılırken bir diferansiyel denklemin oluşturulması kaçınılmazdır [5].

II. FONKSİYONEL (SAPMALI ARGÜMENTLİ) DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$F(t, x(t),..., x^{(n)}(t) = 0$ denklemi n. mertebeden bir adi diferansiyel denklem ifade eder. Aşağıdaki denklem ele alınsın:

$$F(t, x(f_{01}(t)),..., x(f_{0m}(t)), x'(f_{11}(t)),...,$$
$$x'(f_{1m}(t)),...x^{(n)}(f_{n1}(t)),...x^{(n)}(f_{nm}(t)) = 0$$

Bu formdaki denklemde i=0,1,...n ; j=1,2,...,m olmak üzere $f_{ij}(t)$ argümentlerinden en az ikisi farklı ise buna n. mertebeden sapmalı argümentli diferansiyel denklem (SADD) denir.

Gecikmeli bir diferansiyel denklem argümentteki sapmanın durumuna göre ilerlemeli, karışık, tarafsız, gecikmeli (delay) diferansiyel denklemler olarak adlandırılabilir.

Örnek :

$x'(t) = x(t^2 + t) + x(t + 2) - t + 1$ bir ilerlemeli diferansiyel denklem

$x'(t) = 3x(t - 1) - 2tx(t + 1) - 5$ bir karışık diferansiyel denklem

$x''(t) = x'(t) + x'(t + 1) + x''(t - 1)$ bir tarafsız diferansiyel denklemdir.

Yukarıdaki fonksiyonel diferansiyel denk... sınıflandırılması tam değildir. Hala hiçbi... verilemeyen fonksiyonel (gecikmeli) dife... denklemler vardır.

Örneğin,

$$x'(t) = x(x(\tau(t)))$$

şeklindeki bir denklemin hangi tipten olduğun... vermek mümkün olamamaktadır [4].

III. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE ORTALA... YÖNTEMİ

III.1 Adi Diferansiyel Denklemlerin Çözümünd... Ortalama Yöntemi

ε >0 küçük parametresi bir ölçek faktörü olmak üz...

$$x' = f(\frac{t}{\varepsilon}, x)$$

denklemini ele alınsın ve f fonksiyonunu f(τ+1,x)... şeklinde tanımlansın. τ,x ler için x, (t,x) de sürekli... sahiptir. f fonksiyonunu T(x,τ) da düzgün pe... olacak şekilde genişletmek mümkündür. Bu... uygunluk açısından ele alınırsa, (3.1.1) denklemi iç...

$$y' = f_0(y)$$

ortalama denklemini ve bu denklemde de $f_0(y)$ yi

$$f_0(y) = \int_0^1 f(\tau, y) d\tau$$

şeklinde tanımlanabilir. Eğer ε>0 yeterince küçü... ancak o zaman (3.1.) denkleminde değişken dönü... yapılabilir. t periyodik ve özdeş sayılabilir. ... böylece ortalama vektör alanına yakın vektör alanla... yeni bir adi diferansiyel denklem elde edilebilir.

Yani x=z+εu(t/ε,z) şeklinde x çözümü düşünülürse

$$u(s, x) = \int_0^s [f(\tau, x) - f_0(x)] d\tau \quad \text{ve}$$

g(τ,z,0)=0 , g(τ,z,ε)=g(τ+1,z,ε) (3...

ve

$$z' = f_0(z) + g(\frac{t}{z}, z, \varepsilon) \qquad (3.1.5)$$

biçiminde dönüşümler kullanabilir. Ortalama için klasik sonuç olarak şu elde edilebilir:

Eğer ε yeterince küçük seçilirse ortalama denklem... çözümü ile birlikte hareket eden özel bir fonksiy...

yakın olan denklem (3.1.1) in çözümü elde edilebilir. Bunun için aşağıdaki teorem kullanabilir [1,2].

Teorem (3.1.1) x(t), $x(0)=x_0$ olmak üzere denklem (3.1.1) in bir çözümü olsun. y(t) ise $x_0=y_0+\varepsilon u(o,y_0)$, $y_0=y_0(x_0)$ ı sağlayacak şekilde seçilmiş olmak üzere (3.1.2) nin bir çözümü olsun. y(t), $t\geq 0$ için bağımlı değişkene sahip ise her $\eta>0$, $L>0$ için $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\eta,L)>0$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ için

$$\left|x(t)-x^{*}(t)\right|\leq\eta \quad , \quad 0\leq t<L \qquad (3.1.6)$$

yı sağlayan $x^{*}(t)=y(t)+\varepsilon u(1/\varepsilon,y(t))$ vardır.Ayrıca sonsuz zaman aralığı $[0,\infty)$ nda geçerli bazı kalitatif sonuçları elde etmek mümkündür. Bunun için Teorem (3.1.2) incelenebilir.

Teorem (3.1.2) Eğer denklem (3.1.2) nin hiperbolik denge noktası x_0 varsa (3.1.1) denkleminin $x(\tau,0)=x_0$ için bir ε periyodik $x^{*}(t,\varepsilon)$ çözümü vardır ve bu çözümde hiperboliktir. Aynı zamanda denklem(3.1.2) nin x_0 da denge noktası olarak, aynı denge özelliklerine (3.1.1) de sahiptir. Eğer denklem (3.1.2) nin hiperbolik periyodik γ yörüngesi varsa denklem (3.1.1) inde $M_\varepsilon\subset RxR^n$ şeklinde hiperbolik değişken olmayan manifoldu vardır. Bu durumda $M_0=R\times\gamma$, t zamanındaki M_ε nin çapraz bölüm $M_{\varepsilon t}$ si t de ε-periyodiktir. Bu da gösterir ki (3.1.1) denkleminin hiperbolik değişken olmayan torus'u var demektir. Denklem (3.1.1) de $t\to\varepsilon t$ için daha alışılmış

$$x'=\varepsilon f(t,x) \qquad (3.1.7)$$

denklemini elde ederiz ki bu da lineer olmayan salınımlar teorisin de çok sık karşılaşılır. Bu sonuçlar altında (3.1.7) denkleminin ve ortalama denklem olan

$$y'=\varepsilon f_0(y) \qquad (3.1.8)$$

nin çözümlerine kolaylıkla dönüştürülebilir[1,2]

III.2 Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Ortalama Metodu

Bir önceki bölümdeki sonuçları GDD' ye genişletmek mümkündür. $F(\tau+1,\phi)=f(\tau,\phi)$ tüm $(\tau,\phi)\in RxC$ için (τ,ϕ) de süreklidir.ve ϕ de sürekli türeve sahip olmak üzere

$$x'(t)=f(t/\varepsilon,x_t) \qquad (3.2.1)$$

denkleminin ortalama denklemi

$$y'(t)=f_0(y_t) \qquad (3.2.2)$$

şeklinde ve burada f_0 'ı

$$f_0(\phi)=\int_0^1 f(\tau,\phi)dt \qquad (3.2.3)$$

biçiminde alınabilir. Bir önceki bölümdeki benzer sonuçları elde etmek için C' deki sabitlerin varyasyon formülünü, sıfır vektör alanının karışıklığı olarak kullanacağız.

$$x'(t)=0 \ ,t>0 \qquad (3.2.4)$$

Eğer $T_0(t)$ yi

$$T_0(t)=\begin{cases}\phi(t+\theta), t+\theta\leq 0\\ \phi(0), t+\theta>0\end{cases} \qquad (3.2.5)$$

biçiminde genelleştirilmiş yarı grup sayılırsa o zaman t=0 daki birinci değerli ϕ ile GDD (3.2.1) in çözümü,

$$K_0(t,s)(\theta)=\int_0^s x_0(t+\theta-\alpha)d\alpha, -r\leq\theta\leq 0 \quad \text{ve}$$

$$x_0(t)=\begin{cases}0, t<0;\\ I, t\geq 0.\end{cases} \qquad \text{alınırsa}$$

$$x(t)=T_0(t)\phi+\int_0^t d[K_0(t,s)]f(\frac{s}{\varepsilon},x_s) \qquad (3.2.6)$$

olarak bulunur. T>0 sabit ve $x_t=Fz_t$ öyle ki $F{:}BC([0,T],C)\to BC([0,T],C)$ değişken dönüşümü kullanarak

$$Fv(t)=v(t)-\varepsilon A_0\int_0^t d\left[K(t,\tau)\right]u(\frac{T}{\varepsilon},v(T))+\varepsilon u(\frac{t}{\varepsilon},v(t))$$

$$(3.2.7)$$

olur. O zaman $u(s,\phi)=\int_0^s[(\tau,\phi)-f_0(\phi)]d\tau$ ve A_0, (3.2.4) denklemi ile ilişki kuran üreteçtir. (3.2.7) de verilen $x_t=Fz_t$ değişimini doğrulamak çok kolaydır. Bu iyi tanımlanmış 1- periyotlu periyodiğe ve özdeşliğe yakındır [1]. Bu da demektir ki C sabiti ve $\varepsilon_0>0$ vardır. Şöyle ki $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$ için fark $\sup_{0\leq t\leq T}\left|z_t-x_t\right|<\varepsilon C$ dir. Sonra x_t , (3.2.6) denklemini sağlıyorsa z_t integral denklemi için türevini alırız. (3.2.7) denklemini (3.2.6) denkleminde yerine koyar ve $x_0=z_0+\varepsilon u(0,z_0)$ ve

$$n(\frac{T}{\varepsilon},v)=-\varepsilon D\phi(\frac{T}{\varepsilon},v)\frac{dv}{dt}+f(\frac{T}{\varepsilon},Fv)-f(\frac{T}{\varepsilon},v) \qquad (3.2.8)$$

olduğu yerde denklemi tekrar yazılırsa

$$z_t = T_0(t-s)z_0 + \int_0^t d[K_0(t,\tau)]f_0(z_\tau) + \int_0^t d[K_0(t,\tau)]n(\frac{\tau}{\varepsilon}, z_\tau) \quad (3.2.9)$$

elde edilir. y_t nin (ε dizisinin terimlerine kadar) ortalama denklemin bir çözümü olduğunu kanıtlamak için elde $\eta(t,v)$ nin lineer olmadığının incelenmesi kalır. Bunun içinde aşağıdaki Lemma 3.2.1 kullanılabilir.

Lemma 3.2.1 $v \in BC^1(0,T)],C)$ için C>0 sabiti vardır. Öyle ki

$$\left| \int_0^t d[K_0(t,\tau)]N(\frac{\tau}{\varepsilon}, v(\tau), \varepsilon)d\tau \right| \le C(\varepsilon|v|_1 + |Fv - v|) \quad (3.2.10)$$

dir. Eğer $x_t = Fz_t$ ise z_t , ε dizisinin terimlerine kadar ortalama denklemin çözümüdür. İlk uygulama olarak $x_0 = \phi \in C$ olacak şekilde x_t ile, (3.2.1) denkleminin çözümü $x_t^* \overset{def}{=} Fy_t^*$ karşılaştırılabilir. $y_0^* = \psi$ ve $\phi = \psi + \varepsilon u(0,\psi)$ olacak şekilde y_t^* de ortalama denkleminin çözümüdür.

Teorem 3.2.1 Eğer $\phi \in C$ için $y_0 = \psi$ ve $\phi = \psi + \varepsilon u(0,\psi)$ ile y^* çözümü , $t \ge 0$ için muntazam bağımlıdır. O zaman herhangi bir η ve L için burada bir t_0 vardır. Şöyle ki $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ için fark , $x_t^* = Fy_t^*$ olduğunda $0 \le t \le L$ için

$$|x_t - x_t^*| \le \eta, \quad (3.2.11)$$

olur. Daha önce bahsedilen transformasyon teorisi ile invariant manifold teorisinin metodları kullanılarak Teorem (3.2.2) elde edilir.[1,2]

Teorem 3.2.2 Eğer y_0, ortalama denklem (3.2.2) nin bir hiperbolik denge noktasıysa o zaman orada bir pozitif sabit olan ε_0 ve η oluşur. Şöyle ki $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ için burada denklem

$|x_t - x_t^*| \le \eta, 0 \le t \le L$ için ε periyodik çözümü $x^*(t,\varepsilon)$ olur. $x^*(.\,,0) = y_0$ hiperboliktir. Bununda aynı stabil özellikleri y_0 olarak vardır. Ve $\{x \in R^n : |x - y_0| < \eta\}$ kümesinde tektir. Eğer y_0 hiperbolik ve düzenli asimtotik sabitse ε- periyodik çözüm hiperbolik ve düzenli sabittir. Burada p,c,γ pozitif sabitler olmak üzere eğer $x(t,\phi)$ ($y(t,\phi)$ a tepki olarak) , $(0,\phi)$ tarafından ve $|\phi - y_0| < p$ ve

$t \ge 0$ için

$$|x(t,\phi) - x^*(t,\varepsilon)| \le Ce^{-\gamma t}$$

$$|x(t,\phi) - y(t,\varepsilon)| \le \eta \quad (3.2.1$$

elde edilir. Burada daha kullanışlı odakları dik... almakta mümkündür. Bunun için teorem (3... incelenebilir.

Teorem 3.2.3 Eğer ortalama denklem (3.2.2) nin ... A_0 varsa , o zaman burada bir ε_0 >0 vardır. Şöyle ... $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ için denklem (3.2.1) için dist $(A_\varepsilon, A_0) \to$ ... $\varepsilon \to 0$ olarak Poincaré görüntüsünün yerel bir odağı ... vardır. Eğer n bir sabit tamsayı ise ve b>0 bir param... ise sonuçları gösteren bir örnek olarak

$$x' = -x(t) + b\frac{x(t-r)}{1 + x(t-r)^n} \quad (3.2.1$$

denklemi ele alınır. Çözüm görüntü dağılmasıdır ... bundan dolayı bir genel odak oluşur. Bilindiği gibi $n \ge$ ... için $b_0 > 0$ oluşur, şöyle ki $b \ge b_0$ için A da kaotik hare... vardır. (3.2.13) ün karışıklığının hızlı salınım... aşağıdaki sınıfı dikkate alınırsa

$$x'(t) = -x(t) + b\frac{\alpha\cos(\frac{t}{\varepsilon}) + x(t-r)}{1 + (\cos(\frac{t}{\varepsilon}) + x(t-1))^n} \quad (3.$$

α >0 perturbasyonun ölçümünü gösterir bir sabit sa... [1,2]. Aşağıdaki sonucu kanıtlamak mümkündür.

Çok küçük ε>0 için denklem (3.2.4) için Poi... görüntüsünün A_ε odağı kesinlikle tek bir tanedir ... α max{2b,3} dür. Bu sonuç gösterir ki yüksek frek... perturbasyon odağı üzerindeki karışık hareketi enge... Bu sonucun kanıtı ortalama denklem (3.2.4) ü içeri... sonuç, lineer olmayan vektör alanını tahmin ede... ortalama denklem için Razumikhin–tip teor... kullanır. Bu teorem ile ispat tamamlanır.

IV. SONUÇLAR

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin analitik çözüm... çok basit haller ve istisna denebilecek durumlar dı... hesaplanamaz. Ayrıca çözülen başlangıç şartla... bağlılık gösterir. Bu nedenle gecikmeli diferans... denklemleri çözmeden önce denklemin davranı... görmek, buna göre çözümlerin niteliğini belirle... gerekir.

Ortalama yöntemi uygun şartlar altında gecik... diferansiyel denklemlerin çözümlerinin yaklaşık ifa... elde etmeyi sağlamaktadır. Bu yöntemde denkl... genel karakteri belirlenip sayısal çözümleri yapılma...

ε>0 bir küçük parametre olduğu zaman ayrıca or... denklem

$$x'(t) = \varepsilon f(t, x) \tag{3.2.15}$$

içinde bahsedilir. Eğer f_0 , denklem (3.2.3) de tanımlanmışsa o zaman ortalama adi diferansiyel denklem $\tilde{y}(\theta) = y$, $\theta \in [-r, 0]$ için

$$y'(t) = \varepsilon f_0(\tilde{y}) \tag{3.2.16}$$

olur. Sonuçlar Teorem (3.2.2) teki gibi benzer şekilde elde edilir. Ama elde edilmiş ispatlar başka bir yaklaşımı takip eder. Eğer biz gecikmeli diferansiyel denklem (3.2.15) i

$$x'(t) = 0 \cdot x_t \tag{3.2.17}$$

perturbasyonu olarak dikkate alınırsa C deki ayrışma $x_t = \tilde{I}z(t) + w_t$ ve $\tilde{I}(\theta) = I$, $\theta \in [-r, 0]$ olmak üzere lineer denklem (3.2.17) için w_t nin sıfıra herhangi bir üstelden daha hızlı yaklaştığını vurgular. Bu sonuçtan sonra invariant manifold teorisi adi diferansiyel denklemlerde tanımlanmış akışa eşit olan herhangi bir verilmiş bağımlı kümedeki gecikmeli diferansiyel denklem (3.2.15) için akışı göstermek amacıyla kullanılabilir. Klasik ortalama kuralları bu adi diferansiyel denklem için uygulanabilir.

Gecikmeli diferansiyel denklem (3.2.15) de $t \to t/\varepsilon$ ve $x(t/\varepsilon) = y(t)$ yazılırsa $y_{t,\varepsilon}(\theta) = y(t + \varepsilon\theta)$, $\theta \in [-r, 0]$ olmak üzere

$$y'(t) = f(\frac{t}{\varepsilon}, y_{t,\varepsilon})$$

elde edilir. Bu küçük gecikmeli bir denklem olmasına rağmen t denklemde hızlı bir şekilde salınır. Bundan dolayı (3.2.1) için kullanılan dönüşüm teorisini kullanarak gecikmeli diferansiyel denklem (3.2.14) için bu sonuçları elde etmenin mümkün olabileceği anlaşılır.

KAYNAKLAR

[1]. HALE, J. K., VERDUN Lunel, S. M., Introduction to Functional Differential Equations, Appl, Math. Sciences 99, Springer-Verlag, New York. 396-401 (1993)

[2]. LAKRIB, M., The Method of Averaging and Functional Differential Equations With Delay, Int. Journal of Math. And Math. Sciences, Sayı:26/8, 497-511, (2001)

[3]. ATAY. F. M., Delayed-Feedback Control of Oscillations in Non-Linear Planar Systems, Int. J. Control, Vol. 75, 297-304 (2002)

[4]. BAINOV, D. D., and MISHEV D. P., Oscillation Theory for Neutral Differential Equations With Delay, Adam Hilger, Bristol, Philadelpia and New York. 277,(1991)

[5]. ÖZTÜRK, İ., Gecikmeli Dferansiyel Denklemler ve Ortalama Yöntemi, Y. Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.