SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
5.Cilt, 1.Sayı (Mart 2001) 55-57

# GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, Huri ŞENCAN

***Özet*** **- Matematik olayları**

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad t \geq t_0$$
$$x(t) = x_0$$

**şeklindeki başlangıç değer problemini kullanarak modelleyebilir.Burada $t_0$ başlangıç noktası, $x_0$ başlangıç değeridir.$t_0$ ve $x_0$ reel sabit sayılardır.Eğer t noktasındaki bir çözümün değişim oranı, sadece t noktasındaki çözüme değil, aynı zamanda t'den farklı değerlerdeki çözüme ve çözümün türevlerine bağlı olursa bu sapmalı argümentli diferensiyel denklemdir. Bu çalışma da sapmalı argümentli diferensiyel denklemlerin sınıflarından biri olan gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümü için yöntemlerden biri olan adım yöntemi ve tarafsız gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımı verilmiştir.**

## I.GİRİŞ

Gecikme günlük hayatımızda sürekli karşılaştığımız bir durumdur.Bütün fiziksel sistemlerde uygulanan bir uyarıcıyla ilgili tepkinin meydana gelmesi arasında muhtemelen kısa olmakla birlikte bir zaman arası olur.
Biyolojik sistemlerde gecikme birkaçyüz milisaniye süresindedirki bu insandaki tepki sürecidir.Bir antenden elektromanyetik dalgaların iletilmesiyle, uzak bir nesneden yansımasını alması arasındaki gecikmenin kısa süreli olması başlıca özelliğidir.
Dikkate değer bir işlemde gecikmeler mikrosaniye ya da daha kısa zamanla ölçülse de çok önemli olabilir.Teorik bir zaman gecikmesi bir makineye verilen enerji ile alınan randımanla aynı formda bir özelliktir.Uyarıcı x(t), y(t) tepkisiyle sonuçlanır.Burada t zaman, h gecikme olmak üzere y(t) tepkisi x(t-h) ye eşit olur.Daha karmaşık sistemlerde birden fazla gecikme olabilir.

*Ö.F.Gözükızıl SAÜ Fen-Edebiyat Fakültesi , Matematik Bölümü, SAKARYA,farukg@sakarya.edu.tr*
*H.Şencan GOP Universitesi Fen-Edebiyat Fakültesi,Matematik Bölümü, TOKAT*

## II.SAPMALI ARGÜMENTLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

n. mertebeden bir adi diferensiyel denklem

$$F(t, x(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0$$

şeklinde gösteriliyordu.

$$F(t, x(f_{01}(t)), \ldots, x(f_{0m}(t)), x'(f_{11}(t)), \ldots, x'(f_{1m}(t)), \ldots, x^{(n)}(f_{n1}(t)), \ldots, x^{(n)}(f_{nm}(t)) = 0 \qquad 2.1$$

denklemi ele alınsın.

Bu formdaki bir denklemde $i = 0,1,\ldots,n$ $j = 1,2,\ldots,m$ olmak üzere $f_{ij}(t)$ argümentlerinden en az ikisi farklı ise buna n. mertebeden **sapmalı argümentli diferensiyel denklem (SADD)** denir.

$t_0$ başlangıç noktası ,$\tau$ pozitif sabiti gecikme terimi olmak üzere

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)) \qquad t \geq t_0$$

böyle bir diferensiyel denklem örneğidir.

### II.1 Gecikmeli Diferensiyel Denklemler

2.1 formundaki bir SADD de

$j = 1,2,\ldots,m$ için $f_{nj}(t) = f(t)$ ve $i = 0,1,\ldots,(n-1)$ iken $f_{ij}(t) \leq f(t)$

oluyorsa buna gecikmeli diferensiyel denklem (GDD) denir.

Örnek : $x''(t) = x'(t) - 2x(t - \cos^2 t)$

### II.2 İlerlemeli Diferensiyel Denklemler

Yine 2.1 formundaki bir SADD de

$j = 1,2,\ldots,m$ için $f_{nj}(t) = f(t)$ ve $i = 0,1,\ldots,(n-1)$

alındığında $f_{ij}(t) \geq f(t)$

oluyorsa buna da **ilerlemeli diferensiyel denklem** denir.

Örnek : $x'(t) = - x(t + t^2) + x(t+4) - t + 2$

### II.3 Tarafsız Diferensiyel Denklemler

Bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin sapma argümentli ve sapma argümentsiz terimleri içerdiği diferensiyel denklemlere tarafsız diferensiyel denklem denir.

Örnek : $x''(t) = x'(t) + x'(t-1) + x''(t+1)$

## III. GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

GDD'lerin çözümleri , adi diferensiyel denklemlere göre biraz daha farklıdır.

Bir GDD'nin $t_0 \in R$ için $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulu altında bir çözümü olmayabilir ya da sonsuz çoklukta olabilir.Genellikle bir GDD'nin $t_0$'ın her iki yanında nasıl çözüleceği henüz bilinmemektedir.Ancak $t_0$'ın sağında çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu durumda

$$x^{(n)} = F(t, x^{(i)}(t - r_j(t))) \qquad i = 0,1,\dots,(n-1) \qquad j = 1,2,\dots,m$$

GDD'sini , $t_0 < t$ için çözmek gerektiğinde $t < t_0$ için

$$x(t) = \theta(t) \quad , \quad x^{(i)}(t) = \theta^{(i)}(t)$$

olacak şekilde bir $\theta(t)$ başlangıç fonksiyonu verilirse gerekli veri elde edilmiş olur.

Bir örnekle başlangıç fonksiyonu $\theta(t)$'nin sürekli olması koşulu altında GDD'nin çözümünün tek olmayabileceği gösterilebilir.

$$1 \le t \le 2 \;\Rightarrow\; x(t) = \theta(t) = 0$$

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ (\cos 2\pi t - 1)x(t-1) & 0 \le t \le 1 \\ 0 & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

denklemi ele alınsın.

$t = 0$ da $x'(t) = 0 \;\Rightarrow\; x(t) = c$

$0 \le t \le 1$ de $x(t-1) = c$ , $x(0) = c$

$$x'(t) = (\cos 2\pi t - 1)x(t-1) \Rightarrow x(t) = c\left(\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t - t + 1\right)$$

$$x(1) = 0$$

$$t \ge 1 \text{ de } \left.\begin{array}{l} x'(t) = 0 \Rightarrow x(t) = c \\ x(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = 0$$

Buna göre herhangibir $c \in R$ için

$$x(t) = \begin{cases} c & t \le 0 \\ c\left(\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t - t + 1\right) & 0 \le t \le 1 \\ 0 & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

fonksiyonu denklemin sürekli çözümüdür fakat c değiştikçe sonsuz sürekli çözüm elde edilir.

### III.1 Adım Yöntemi

$[t_0 - r, t_0]$ aralığında belirli bir başlangıç fonksiyonu kabul ederek $[t_0, t_0 + r]$ aralığında

$$x'(t) = ax(t-r) \tag{3.1}$$

GDD'sinin çözümü adım yöntemiyle bulunabilir. $x(t)$ çözüm fonksiyonu

$$t \in [t_0 - r, t_0] \Rightarrow x(t) = \theta(t)$$
$$t \in [t_0, t_0 + r] \Rightarrow x'(t) = ax(t-r)$$

koşullarını sağlasın.Buna göre,

$$\left.\begin{array}{l} t \in [t_0, t_0 + r] \Rightarrow x(t-r) = \theta(t-r) \\ x'(t) = ax(t-r) \end{array}\right\} x'(t) = a\theta(t-r)$$

olduğundan, $x(t)$, $x'(t) = a\theta(t-r)$ adi diferensiyel denkleminin çözümü olur. Çözüm $x(t_0) = \theta(t_0)$ başlangıç koşuluyla,

$$\int a\theta(t-r)\,dt = \varphi(t) + c \qquad \text{olmak üzere}$$

$$x(t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \theta(t_0) \tag{3.2}$$

olur. Böylece 3.1 denkleminin $[t_0, t_0 + r]$ aralığındaki çözümü olan 3.2 denklemi yeni bir başlangıç fonksiyonu olarak alınıp , aynı yöntemle $[t_0 + r, t_0 + 2r]$ aralığında da çözüm bulunabilir. Böyle devam edilerek istenildiği kadar geniş bir belirli aralıkta çözüm elde edilebilir.

Yine $\tau > 0$ , T sabit , f ve $\varphi$ ise $t \in [t_0, T]$ için sürekli olmak üzere (çözümde ve türevlerinde süreksizlik olabilir.)

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) & 0 \le t \le T \\ x(t) = \varphi(t) & -\tau \le t \le 0 \end{cases}$$

başlangıç fonksiyon problemi alındığında El' sgol' ts adi diferensiyel denklemlerdeki Euler metodunun GDD' ler için uygulanabileceğini göstermiştir.

## IV.ÇÖZÜMLERİN SALINIMI

GDD'lerin çözümleri salınımlı veya salınımsız olmalarına göre incelenebilir.Trivial olmayan bir x(t) çözümü eğer $(T,\infty)$ aralığında işaret değiştiriyorsa bu çözüme salınımlı denir.T herhangi bir sayıdır.
Örneğin;

$x''(t) - x(-t) = 0$ denkleminin

$x_1(t) = \sin t$ çözümü salınımlı
$x_2(t) = e^t + e^{-t}$ çözümü salınımsızdır.

Tarafsız gecikmeli diferensiyel denklemin çözümlerinin salınımı için Sficas ve Stavroulakis (1987) tarafından gerek ve yeter koşulu içeren önemli bir teorem verilmiştir.Ancak önce karakteristik fonksiyon ve karakteristik kök tanımı yapılmalıdır.

Sabit katsayılı birinci mertebeden tarafsız gecikmeli diferensiyel denklem,q ,$\tau$ ,$\sigma$ sabitler $p\in R$ ve q ,$\tau$, $\sigma$ >0 için

$$x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0 \qquad t\geq t_0$$

şeklindedir.Bu denklemin lineer operatörü L(x) ise

$$L(x) = x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma)$$

olacaktır.Buradan

$$L(e^{\lambda t}) = (\lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma})e^{\lambda t}$$

için $\lambda$ sayısı $F(\lambda) = \lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma}$

fonksiyonunun bir kökü olduğunda $x = e^{\lambda t}$ $\forall t$ için

L(x) = 0 denkleminin bir çözümüdür.L(x) = 0 denkleminde $F(\lambda)$ fonksiyonu L'nin karakteristik fonksiyonu $F(\lambda) = 0$ denkleminin kökleri de L'nin karakteristik kökleri olarak tanımlanır.

**Teorem** : (Sficas ve Stavroulakis )

4.1 sabit katsayılı tarafsız gecikmeli diferensiyel denklemi ele alınsın. q ,$\tau$ ,$\sigma$ lar için önceki koşullar geçerli olsun. 4.1 denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma} = 0$$

karakteristik denkleminin gerçel köklerinin olmamasıdır.

Bu teoremin ispatı

a) p = 0 , p = -1   b) -1< p < 0   c) p >0   d) p <-1

durumları için ayrı ayrı incelenmiştir.

## V. SONUÇLAR

Bu çalışmada gecikmeli diferensiyel denklemler genel olarak incelenmiştir. 2.1 formundaki bir SADD'de

$j = 1,2,...,m$ için $f_{nj}(t) = f(t)$ ve $i = 0,1,..., (n-1)$ iken $f_{ij}(t) \leq f(t)$

oluyorsa bu gecikmeli diferensiyel denklemdir. GDD

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \qquad t_0 \leq t \leq T \qquad 5.1$$

şeklinde gösterilirse $\tau(t) = 0$ durumunda 5.1 denklemi adi diferensiyel denkleme dönüşecektir.

GDD'lerin çözümünün bulunması için çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.Belirli bir başlangıç fonksiyonu kabul ederek çözümü aralıklar içerisinde bulduran adım yöntemi dışında sabit gecikmeli ve değişken gecikmeli durumlar için Euler metodu ve Tek adım yöntemleri diğer çözüm yöntemlerindendir.

Lyapunov denklemlerinin kümesi içinde çözüm yöntemi geliştirilmiştir.Fakat bu yöntemin, pratikte h gecikmesi küçükse kullanışlı olduğu söylenebilir.

Ancak gecikmelerin tesadüfi olmasına bağlı olarak diferensiyel denklemlerin oluşturulması ve çözümü araştırılmalıdır.

## VI. KAYNAKLAR


[1] Marshall J.E. " Time-delay Systems Stability and Performance Crıterıa with Applications" , Newyork , Ellis Horwood X , 244 s , 24 sm .1992.

[2] Barelli R.L. and Coleman C.S. "Differential Equations A Modeling Perspective" , Harvey Mudd College , John Wiley & Sons Inc. Newyork , 1998

[3] Güney Z. " Gecikmeli Diferensiyel Denklemler Üzerine" , Doktora Tezi , Dokuz Eylül Üniversitesi , İzmir , 1989

[4] El'sgol'ts ; L.E., Norkin , S.B. , " Introduction to the Theory and Applications of Differential Equations with Deviating Arguments", New York, Academic Press 1973

[5] Driver, R.D." Ordinary and Delay Differential Equations",New York, Springer-Verlag , 1977

[6] Bainov, D,D and Mishev D.P, "Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay", Adam Hilger, Bristol, Philadelpia and NewYork, 277p., 1991

[7] Grammatikopoulus, M.K. Grove, E.A. and Ladas, G. "Oscillations of First –Order Neutral Delay Differential Equations" , J. Math.Anal.Appl. 120, 510-520, 1986

[8] Şencan, H. ,"Gecikmeli Diferensiyel Denklemler ", Y.Lisans Tezi , Sakarya Üniversitesi, Ocak, 2001, Sakarya