SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
3.Cilt 2.Sayı (1999) 45-50

FULL ALGEBRAS AND SPEKTRAL EQUALITY

Hakan AVCI

19 Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 55139 Kurupelit\SAMSUN

M. Heybetkulu SEFEROĞLU

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü VAN

Abstract: In this paper; consideration is given to the full algebras. Following this, we have shown that the equality $\sigma_A(a) = \sigma_B(\Phi(a))$ is satisfied when A, B are semisimple, regular, commutative Banach algebra with identity, Banach algebra with identity respectively.

I.Giriş: Bu makalede A birimli, değişmeli normlu cebirinin sıfırdan farklı bütün kompleks değerli homomorfizmlerinin kümesi $\Delta(A)$ ile gösterilecektir. A değişmeli bir Banach cebiri olmak üzere,

$$\hat{x}: \Delta(A) \to \mathbb{C},\ \hat{x}(h) = h(x)$$

$x \in A$ nın Gelfand dönüşümü olarak isimlendirilir.

A birimli bir Banach cebiri ve $x \in A$ olmak üzere $\sigma_A(x)$ ile gösterilen

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, (x - \lambda 1_A) \notin A^{-1} \right\}$$

kümesi x elemanının A cebirindeki spektrumu, $\rho_A(x)$ ile gösterilen

$$\mathbb{C} - \sigma_A(x) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, (x - \lambda 1_A) \in A^{-1} \right\}$$

kümesi de x elemanının A cebirindeki rezolventi, yine

$$r_A(x) = Sup\left\{ |\lambda| \,\middle|\, \lambda \in \sigma_A(x) \right\}$$

sayısı da x elemanının A cebirindeki spektral yarıçapı olarak isimlendirilir, Larsen, [5].

A birimli bir Banach cebiri B, A cebirinin birimini içeren kapalı alt cebiri olmak üzere her $x \in B$ için $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$ ve $\partial\sigma_B(x) \subset \partial\sigma_A(x)$ olduğu çalışılmıştır, Larsen, [5]. Yine, A birimli değişmeli bir Banach cebiri ve B, A cebirinin birimini içeren regüler alt cebiri olmak üzere $\Delta(B)$ nin her elemanının, $\Delta(A)$ nın bir elemanına genişletilebileceği yani her $\Psi_B \in \Delta(B)$ için $\Psi_B = \Psi_A\big|_B$ olacak şekilde bir $\Psi_A \in \Delta(A)$ nın varlığı gösterilmiştir, Larsen, [5]. Bu çalışma Literatürde Shilov Teoremi olarak bilinir.

Ayrıca A birimli değişmeli Banach cebiri için $x \in A^{-1}$ olması için gerekli ve yeterli şartın her $\Phi \in \Delta(A)$ için $\Phi(x) \neq 0$ olduğu ve

$$\sigma_A(x) = \left\{ \Phi(x) \,\middle|\, \Phi \in \Delta(A) \right\}$$

ifadesi Rudin, [6], tarafından gösterilmiştir. A ve B birimli Banach cebirleri ve $\Phi: A \to B$ $\Phi(1_A) = 1_B$ koşulunu sağlayan sürekli bir homomorfizm olsun. Eğer her $a \in A$ için

$$\sigma_A(a) = \sigma_B(\Phi(a))$$

eşitliği varsa spektrumun dönüşümü sağlanır, denir. Corach - Suarez, [3], çalışmalarında bu tanımı vererek Φ^*, Φ dönüşümünün adjointi olmak üzere Φ^* dönüşümünün örten olması üzerinde çalışmışlardır.

II. DOLU CEBİRLER

Bu bölümde dolu cebir tanımını verip, onun özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım II. 1. A birimli bir Banach cebiri, B de A cebirinin birimini kapsayan bir alt cebiri olsun. Eğer $b \in B$ için $b \in A^{-1}$ olduğunda $b \in B^{-1}$ oluyorsa B cebirine, A cebirinin dolu alt cebiri denir, Bourbaki, [1].

Teorem II. 1. Eğer B, A cebirinin dolu alt cebiri ise her $x \in B$ için $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ olur.

İspat: Herhangi bir $\lambda \in \rho_A(x)$ alalım. Bu durumda $(x - \lambda e) \in A^{-1}$ olur. B cebiri, A cebirinin birimini kapsadığından $(x - \lambda e) \in B$ dir. Öte yandan B dolu alt cebir ve $(x - \lambda e) \in A^{-1}$ olmasından $(x - \lambda e) \in B^{-1}$ bulunur. Bu ise $\lambda \in \rho_B(x)$ olduğunu gösterir. Buradan $\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x)$ olur. Böylece $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ elde edilir.

Teorem II. 2. A birimli bir Banach cebiri, $M \subset A$ alt cebir olsun. M alt cebirinin komutantı olan

$$M' = \{ x \in A \mid her\ m \in M\ için\ mx = xm \}$$

kümesi dolu cebirdir.

İspat: $x \in M'$ ve $x \in A^{-1}$ olsun. $x \in M'$ olduğundan her $m \in M$ için $xm = mx$ olur. Buradan

$$x^{-1}(xm)x^{-1} = x^{-1}(mx)x^{-1}$$

$$x^{-1}x(mx^{-1}) = x^{-1}m(xx^{-1})$$

$$mx^{-1} = x^{-1}m$$

yazılır. O halde $mx^{-1} = x^{-1}m$ olduğundan $x \in (M')^{-1}$ elde edilir. Bu ise istenendir.

Teorem II. 3. A herhangi bir birimli Banach cebiri, B de A cebirinin maksimal değişmeli alt cebiri olsun. Bu taktirde B, A cebirinin dolu alt cebiridir.

İspat: Önce B cebirinin, A cebirinin birimini içerdiğini gösterelim. Eğer $1_A \notin B$ ise her $x \in B$ için $x1_A = 1_A x$ olacağından, B cebiri ile 1_A elemanının oluşturduğu cebir değişmeli olur. Bu cebir B cebirini kapsadığından, B cebirinin maksimal olması ile çelişir. O halde $1_A \in B$ olmalıdır. Şimdi B nin dolu alt cebir olduğunu gösterelim. $b \in B$ ve $b \in A^{-1}$ olsun. Her $x \in B$ için $bx = xb$ olacağından $b \in B'$ bulunur. B' dolu cebir olduğundan $b \in (B')^{-1}$ elde edilir. Buradan her $x \in B$ için $b^{-1}x = xb^{-1}$ olup B ile b^{-1} elemanının oluşturduğu cebir değişmeli olur ve B cebirini kapsar. Öte yandan B maksimal değişmeli alt cebir olduğundan B ile b^{-1} elemanının oluşturduğu cebir B cebirinin kendisidir. Yani $b \in B^{-1}$ olup B dolu alt cebirdir.

Teorem II. 4. A birimli, değişmeli bir Banach cebiri, B de A cebirinin birimini kapsayan regüler alt cebiri olsun. Bu taktirde B bir dolu cebirdir.

İspat: Kabul edelimki $b \in B$ ve $b \in A^{-1}$ olsun. Bu durumda her $\Psi_A \in \Delta(A)$ için $\Psi_A(b) \neq 0$ olur. Öte yandan her $\Psi_B \in \Delta(B)$ için, $\Psi_B = \Psi_A \big|_B$ olacak şekilde $\Psi_A \in \Delta(A)$ vardır. Buradan her $\Psi_B \in \Delta(B)$ için

$$\Psi_B(b) = \Psi_A(b) \neq 0$$

olur. Buradan $\Psi_B(b) \neq 0$ olup $b \in B^{-1}$ elde edilir. Bu ise B cebirinin dolu cebir olduğunu gösterir.

III. SPEKTRUMUN DÖNÜŞÜMÜ

Çalışmanın bu kısmında spektral eşitlik üzerinde duracağız.

Tanım III. 1. A ve B birimli Banach cebirleri $\Phi: A \to B$, $\Phi(1_A) = 1_B$ koşulunu sağlayan sürekli bir homomorfizm olsun. Eğer her $a \in A$ için

$$\sigma_A(a) = \sigma_B\big(\Phi(a)\big)$$

eşitliği varsa spektrumun dönüşümü sağlanır, denir, Corach- Suarez [3].

Teorem III. 1. A ve B birimli, değişmeli Banach cebirleri olsun. Eğer $\Phi^* \Delta(B) = \Delta(A)$ eşitliği varsa spektrumun dönüşümü sağlanır. Yani $\sigma_A(a) = \sigma_B\big(\Phi(a)\big)$ olur.

İspat: Herhangi bir $\Psi_B \in \Delta(B)$ için $\Phi^*\Psi_B = \Psi_A$ olacak şekilde bir $\Psi_A \in \Delta(A)$ vardır. Bu durumda her $a \in A$ için

$$\big(\Phi^*\Psi_B, a\big) = \Psi_A(a)$$

$$\Psi_B\big(\Phi(a)\big) = \Psi_A(a)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\sigma_A(a) = \sigma_B\big(\Phi(a)\big)$$

yazılır. Bu ise spektrumun dönüşümünün sağlandığını gösterir.

Teorem III. 2. A birimli, değişmeli, yarıbasit, regüler Banach cebiri F_1 ve F_2, $\Delta(A)$ kümesinin ayrık, kapalı alt kümeleri olsunlar. Bu taktirde

$$\hat{a}_1\big|_{F_1} \equiv 1, \ \hat{a}_2\big|_{F_2} \equiv 1, \ a_1.a_2 = 0$$

olacak şekilde $a_1, a_2 \in A$ vardır.

İspat: $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ olduğundan $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ olacak şekilde F_1 kümesinin U_1, F_2 kümesinin U_2 açık komşuluğu vardır. Buradan $\Delta(A)$ - U_1 ve $\Delta(A)$ - U_2 kümeleri kapalı olup

$$(\Delta(A) - U_1) \cap F_1 = \varnothing, \ (\Delta(A) - U_2) \cap F_2 = \varnothing$$

bulunur. Bu durumda

$$\hat{a}_1\big|_{F_1} \equiv 1, \ \hat{a}_1\big|_{\Delta(A)-U_1} \equiv 0, \ \hat{a}_2\big|_{F_2} \equiv 1,$$

$$\hat{a}_2\Big|_{\Delta(A)-U_2} \equiv 0$$

olacak şekilde $a_1, a_2 \in A$ vardır, Larsen, [5]. Herhangi bir $\Psi_A \in \Delta(A)$ alalım. Bu Ψ_A için, $\Psi_A \in F_1$, $\Psi_A \in F_2$, $\Psi_A \in \Delta(A) - U_1$, $\Psi_A \in \Delta(A) - U_2$ ifadelerinden birisi doğrudur. Kabul edelim ki $\Psi_A \in F_1$ olsun. Bu durumda $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olduğundan $\Psi_A \notin F_2$ ve $\Psi_A \in \Delta(A) - U_2$ olur. $\Psi_A \in \Delta(A) - U_2$ ise $\hat{a}_2(\Psi_A) = 0$ olup

$$(a_1 a_2\hat{)}(\Psi_A) = \hat{a}_1(\Psi_A)\hat{a}_2(\Psi_A) = 0$$

elde edilir. Öte yandan A cebiri yarı basit olduğundan $a_1 . a_2 = 0$ bulunur.

Benzer şekilde $\Psi_A \in F_2$, $\Psi_A \in \Delta(A) - U_1$, $\Psi_A \in \Delta(A) - U_2$ olması durumlarında da $a_1 . a_2 = 0$ bulunur.

Teorem III. 3. A birimli, değişmeli, yarıbasit, regüler Banach cebiri, B de birimli herhangi bir Banach cebiri olsun. Eğer $\Phi: A \to B$, $\Phi(1_A) = 1_B$ koşulunu sağlayan; sürekli, bire- bir homomorfizm ise spektrumun dönüşümünün sağlanır. Yani her $a \in A$ için

$$\sigma_A(a) = \sigma_B\big(\Phi(a)\big)$$

olur.

İspat: Kabul edelim ki $\overline{\Phi(A)} = C$ olsun. $1_A \in A$ olduğundan $\Phi(1_A) \in \Phi(A) \subset \overline{\Phi(A)} = C$ olup C birimlidir.

Şimdi C cebirinin değişmeli olduğunu görelim. Her $a, b \in C$ olsun. Bu durumda $\Phi(a_n) \to a$, $\Phi(b_n) \to b$ olacak şekilde $(a_n), (b_n) \subset A$ dizileri vardır. Φ bir homomorfizm olduğundan

$$\Phi(a_n b_n) = \Phi(a_n)\Phi(b_n) \to ab$$

$$\Phi(b_n a_n) = \Phi(b_n)\Phi(a_n) \to ba$$

elde edilir. Öte yandan A değişmeli bir cebir olduğundan $\Phi(a_n b_n) = \Phi(b_n a_n)$ olup ab = ba bulunur. Bu ise C cebirinin değişmeli olduğunu gösterir.

Şimdi C cebirinin regüler olduğunu gösterelim. $\overline{\Phi(A)} = C$ aldığımızdan $\Phi: A \to C$ bire- bir, örten bir dönüşüm olur. Bu dönüşüm bir $\Phi^*: C^* \to A^*$ dönüşümü tanımlar. Buradan $\Phi^*: \Delta(C) \to \Delta(A)$ dönüşümü elde edilir. Sıfırdan farklı her $a \in A$ ve $\Psi_C \in Ker\Phi^*$ için $\left(\Phi^*\Psi_C, a\right) = \Psi_C\left(\Phi(a)\right) = 0$ bulunur. Φ bire- bir olduğundan $\Phi(a) \neq 0$ olup $\Psi_C = 0$ olur. Böylece $\Phi^*: \Delta(C) \to \Delta(A)$ dönüşümünün bire- bir olduğu görülür.

Herhangi bir $K \subset \Delta(C)$ kapalı ve $\Psi_0 \notin K$ alalım. Buradan $\Phi^* K \subset \Delta(A)$ $\Phi^*\Psi_0 \in \Delta(A)$ ve Φ^* bire- bir olduğundan $\Phi^*\Psi_0 \notin \Phi^* K$ bulunur. Öte yandan A cebiri regüler olduğundan

$$\hat{a}\Big|_{\Phi^* K} \equiv 0 \, , \, \hat{a}\Big|_{\Phi^*\Psi_0} \neq 0$$

olacak şekilde $a \in A$ vardır, Larsen, [5]. Buradan

$$\hat{a}\Big|_{\Phi^* K} \equiv 0 \text{ ise } \Phi(\hat{a})\Big|_K \equiv 0 \qquad \text{(III.1)}$$

$$\hat{a}\Big|_{\Phi^*\Psi_0} \neq 0 \text{ ise } \left(\Phi(\hat{a}), \Psi_0\right) \neq 0 \qquad \text{(III.2)}$$

elde edilir. O halde (III.1) ve (III.2) den C cebiri regüler olur.

Şimdi $\Phi^*\Delta(C) = \Delta(A)$ olduğunu gösterelim. $\Phi^*\Delta(C) \subset \Delta(A)$ olduğu biliniyor. Kabul edelim ki $\Delta(A) \not\subset \Phi^*\Delta(C)$ olsun. Bu durumda $\Psi_0 \notin \Phi^*\Delta(C)$ olacak şekilde $\Psi_0 \in \Delta(A)$ vardır. Teorem III. 2. den dolayı

$$\hat{a}_1\Big|_{\Psi_0} \equiv 1, \quad \hat{a}_2\Big|_{\Phi^*\Delta(C)} \equiv 1, \quad a_1.a_2 = 0$$

olacak şekilde $a_1, a_2 \in A$ bulunur. Bu durumda $\hat{a}_2\Big|_{\Phi^*\Delta(C)} \equiv 1$ ifadesinden her $\Psi_C \in \Delta(C)$ için

$$\hat{a}_2\left(\Phi^*\Psi_C\right) = 1$$

$$\left(\Phi^*\Psi_C, a_2\right) = 1 \; \Psi_C\left(\Phi(a_2)\right) = 1 \qquad \text{(III.3)}$$

elde edilir. O halde (III.3) eşitliği her $\Psi_C \in \Delta(C)$ için $\Psi_C\left(\Phi(a_2)\right) \neq 0$ olduğunu gösterir. Bu ise $\Phi(a_2) \in C^{-1}$ demektir. Öte yandan $a_1.a_2 = 0$ olduğundan $\Phi(a_1.a_2) = \Phi(a_1)\Phi(a_2) = 0$ bulunur. $\Phi(a_2) \in C^{-1}$ olmasından dolayı da $\Phi(a_1) = 0$ olur. Bunun sonucu $a_1 = 0$ elde edilir. Bu ise $\hat{a}_1(\Phi_0) = 1$ olması ile çelişir. O halde $\Delta(A) \subset \Phi^*\Delta(C)$ olmalıdır. Böylece

$\Phi^*\Delta(C) = \Delta(A)$ elde edilir. Bu son eşitlikten her $\Psi_C \in \Delta(C)$ için $\Phi^*\Psi_C = \Psi_A$ olacak şekilde $\Psi_A \in \Delta(A)$ vardır. Her $a \in A$ için

$$\left(\Phi^*\Psi_C, a\right) = \Psi_A(a)$$

$$\Psi_C\left(\Phi(a)\right) = \Psi_A(a)$$

yazılır. Böylece

$$\sigma_A(a) = \sigma_C\left(\Phi(a)\right) \qquad \text{(III.4)}$$

elde edilir. Öte yandan C, B cebirinin regüler alt cebiri olduğundan Teorem II. 4. den C dolu alt cebir olur. Bu durumda $\sigma_C\left(\Phi(a)\right) = \sigma_B\left(\Phi(a)\right)$ bulunur. Bu son eşitlik (III.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sigma_A(a) = \sigma_B\left(\Phi(a)\right)$$

olup ispat tamamlanır.

REFERENCES

[1] BOURBAKI, C. - GILBERT, J. E. : homegeneous Algebras On The Circle Ann. Inst Fourier 22, 1 - 50 , 1972).

[2] CONWAY, J. B. : A Course in Functional Analysis, Springer Verlag, New York , (1985).

[3] CORACH, G. - SUAREZ, F. D. : Extension Of Charecters In Commutative Banach Algebras, Studia Mathematica 199 - 202 , (1987).

[4] GELFAND, I. - ROIKOV, D. - SHILOV, G. : Commutative Normed Rings, Chelsea Publishing Company, Brenx New York, (1964).

[5] LARSEN, R. : Banach Algebras, Marcel Dekker Inc. New York, (1973).

[6] RUDIN, W. : Functional Analysis, Mc. Graw - Hill Book Company, (1973).

[7] RUDIN, W. : Reel And Complex Analysis, Mc. Graw - Hill Inc. , New York, (1974).