SAU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
6.Cilt, 2.Sayı (Temmuz 2002)

KÜRE DÜZLEMİNDEKİ OPERATÖR RIESZ POTENSİYEL İNTEGRALINI HESAPLAMADA (p, q)'UN SINIRLILIĞI

Mehmet Karakaş

Özet- Küre düzlemindeki Riesz potansiyel integralının kısmi hesaplama işlemlerine ilişkin bir çok araştırmalar ortaya koyulmuş ancak, hesaplama işlemlerinde operatör (değişim) durumu pek ele alınmamıştır. Bu araştırmada, operatör Riesz potansiyel integralının kısmi hesaplama işlemlerinin yöntem ve araştırmaya ilişkin özellikler ortaya koyulmuştur.

Anahtar Sözcükler - Operatör Riesz Potansiyel İntegralının Kısmi Hesaplanması, Küre Aralığı, İç Değerlendirme Operatörü, (p, q)'un Sınırlılığı, (p, q)'un operatörü.

Abstract -A lot of research has been conducted on Riesz potential integral operator. The concept of Riesz potential integral operator of variable order was introduced and its properties were investigated in this paper.

Key words - Riesz potential integral operator of variable order spherical distance; operator interpolation; (p, q)-boundedness; (p, q)-type operator.

I. GİRİŞ

Operatör Riesz potansiyel integralının kısmi hesaplama işlemi, integralların hesaplanmasında kesir dereceli kısmi hesaplama işlemidir. Bu tür integralların değerleri, monoton analizi ve fonksiyonlarm tahmin değeri kavramından ayrı bir değer analizine aittir.

Bu tür integralların değerleri, monoton analizi ve fonksiyonların tahmin değeri kavramından ayrı bir değer analizine aittir. Ross B, Samko S., 1993'de tek değişkenli integralların hesaplanmasında sabit kesir dereceli kısmi hesaplama işlemini operatör kesir dereceli hesaplama işlemine genişlettikten sonra, bir çok araştırmacı tarafından bu konu tartışılmıştır.

Özellikle fonksiyonların sürekliliği üzerinde çok yoğun tartışmalar olmuştur. Bu araştırmada sabit dereceli Riesz potansiyel integralının kısmi hesaplama işlemi üzerine operatör işlemini genişleterek yeni bir yöntem geliştirilmiş ve bir çok temel özellikler ortaya konmuştur.

$$R^{n+1} = \{x = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}); x_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq n+1\}$$

verilmiş olsun. Burada Ω_n ise R^{n+1} deki n boyutlu birim küre düzlemidir. $|x - y| = arccos\,(x \cdot y)$ ise Ω_n'deki x ile y noktaları arasındaki küre düzlem aralığıdır. $L^p(\Omega_n)$ ise doğrusal evrendir.

$$L^p(\Omega_n) = \{f(x): \|f\|_p = (\int_{\Omega_n} |f(x)|^p dx)^{1/p} < +\infty\}, 1 \leq p < +\infty,$$

$$L^\infty(\Omega_n) = \{f(x): \|f\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{x \in \Omega_n} |f(x)| < +\infty\}.$$

hesaplama işlemi

M. Karakaş, Sakarya Üniversitesi SMYO, Adapazarı

$T: L^p(\Omega_n) \to L^q(\Omega_n),\ 1 \le p,\ q \le \infty$, (p, q) tipi (ya da (p, q) sınırlanmış) denilip, $\| T(f) \|_q \le C \| f \|_p$, eşitsizliğini sağlar. Burada C ile f bağlı değildir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük C ise T'nın (p, q) değeri denir ve $\| T \|_{(p,q)}$ ile gösterilir.

$f(x) \in L^1(\Omega_n), 0 < \alpha(x) < n$, f(x) 'in operatör Riesz potansiyel integralının kısmi hesaplama işlemi, $I^{\alpha(x)}$ ile aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$I^{\alpha(x)}(f)(x) = \int_{\Omega_n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy,\ x \in \Omega_n.$$

Bu araştırmanın maksadı, $I^{\alpha(x)}$ nin (p, q)'un sınırlılık gibi özelliklerini ortaya koymaktır. İfadelemeyi kolaylaştırmak acısından bundan sonraki aşamalarda C değişik sabit sayılar ile gösterilmiştir.

II. AKSİYOMLAR VE NETİCELER

Bu araştırmadaki konunun kaynağı aşağıdaki birkaç aksiyomdan gelmiştir :

Aksiyom 1 (İntegralın Minkowski Eşitsizliği) $1 \le p < \infty$, $f(x,y)$ ise $R^m \times R^n$ de Lebesgue ölçüle bilen olsun. Bu halde

$$\left\{ \int_{R^n} \left| \int_{R^m} |f(x,y)|\, dy \right|^p dx \right\}^{1/p} \le \int_{R^m} \left(\int_{R^n} |f(x,y)|^p dx \right)^{1/p} dy.$$

Not : bu aksiyomdaki $R^m \times R^n$ yerine her hangi iki ölçülebilen küme çarpımı $M_1 \times M_2$ için de geçerlidir.

Aksiyom 2 (Riesz – Therin Potansiyel Hesaplaması) $1 \le p_j, q_j \le \infty,\ j = 0, 1,\ t \in (0,1),\ \frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1},\ \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$

olsun ve T de bir doğrusal hesaplama olsun. Eğer T ise (p_0,q_0) tipi ve (p_1,q_1) tipinde ise, o halde T, (p_t,q_t) tipinde olur ve

$$\| T \|_{(p_t,q_t)} \le \| T \|_{(p_0,q_0)}^{1-t} \| T \|_{(p_1,q_1)}^{t}.$$

dir.

Aksiyom 3

$1 < q < \infty, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1, 1 < p < q',$

ve

$$\| K(x, \cdot) \|_{WL^q} \le C,\ a.e.\ x \in \Omega_n,$$
$$\| K(\cdot, y) \|_{WL^q} \le C,\ a.e.\ y \in \Omega_n,$$

ise, o halde hesaplama işlemi

$$T(f)(x) = \int_{\Omega_n} K(x,y) f(y) dy$$

olup, bu (p, r) tipidir. Burada $\| \cdot \|_{WL^q}$ ise L sektörünün (yayının) değeridir, yani

$$S_\theta(f)(x) = \frac{1}{|L_{x,\theta}|} \int_{L_{x,\theta}} f(y) dL_{x,\theta}(y)$$

dir.

Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 1 $0 < m \le \alpha(x) < n, f(x) \in L^1(\Omega_n)$ verilmiş ise, o halde $I^{\alpha(x)}(f)(x)$, hemen hemen $x \in \Omega_n$'de yakınsaktır ve $I^{\alpha(x)}(f)(x) \in L^1(\Omega_n)$ dir.

İspat

$$L_{y,\theta} = \{x \in \Omega_n : y \cdot x = \cos\theta\},\ |L_{y,\theta}| = |\Omega_{n-1}| \sin^{n-1}\theta,$$

olsun, böylece

$$\int_{\Omega_n} |I^{\alpha(x)}(f)(x)|\,dx \leq \int_{\Omega_n}\int_{\Omega_n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha(x)}}\,dy\,dx = \int_{\Omega_n} |f(y)| \int_{\Omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha(x)}}\,dx\,dy$$

$$= \int_{\Omega_n} |f(y)| \left[\int_0^{\pi}\left(\int_{L_{y,\theta}} \frac{1}{\theta^{n-\alpha(x)}}\,dL_{y,\theta}(x)\right)d\theta\right]dy = \int_{\Omega_n} |f(y)| \left[\left(\int_0^1 + \int_1^{\pi}\right)\left(\int_{L_{y,\theta}} \frac{1}{\theta^{n-\alpha(x)}}\,dL_{y,\theta}(x)\right)d\theta\right]dy$$

$$\leq \int_{\Omega_n} |f(y)| \left[\int_0^1\left(\int_{L_{y,\theta}} \frac{1}{\theta^{n-m}}\,dL_{y,\theta}(x)\right)d\theta + \int_1^{\pi}\left(\int_{L_{y,\theta}} dL_{y,\theta}(x)\right)d\theta\right]dy$$

$$\leq \int_{\Omega_n} |f(y)| \left[\int_0^1 \frac{|\Omega_{n-1}|\sin^{n-1}\theta}{\theta^{n-m}}\,d\theta + \int_1^{\pi} |\Omega_{n-1}|\sin^{n-1}\theta\,d\theta\right]dy$$

$$\leq |\Omega_{n-1}| \int_{\Omega_n} |f(y)| \left[\int_0^1 \frac{1}{\theta^{1-m}}\,d\theta + \int_1^{\pi} d\theta\right]dy \leq C\|f\|_1 < +\infty.$$

olup, $I^{\alpha(x)}(f)(x)$, Ω_n'da hemen hemen mutlak yakınsak ve de integrallenebilirdir.

Teorem 2 $0<m\leq\alpha(x)<n, 1\leq p\leq\infty$ ise, $I^{\alpha(x)}$, (p, p) tipi hesaplamadır, yani fakat m ve n'a ilişkili öyle bir A sabiti var olup

$$\| I^{\alpha(x)}(f) \|_p \leq A \| f \|_p$$

olur.

İspat Bu teoremi potansiyel hesaplama işlemi ile de ispatlamamız mümkün, ancak, hesaplamanın daha kolay olması için küre düzleminin kaydırma kısmi hesaplaması S_θ:

$$S_\theta(f)(x) = \frac{1}{|L_{x,\theta}|}\int_{L_{x,\theta}} f(y)\,dL_{x,\theta}(y)$$

değeri 1 olan (p, p) tipi kısmi hesaplaması olduğundan, yani $\| S_\theta(f) \|_p \leq \| f \|_p$ olup, aksiyom1'den

$$\left(\int_{\Omega_n} |I^{\alpha(x)}(f)(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\Omega_n}\left|\int_{\Omega_n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}}\,dy\right|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_{\Omega_n}\left|\int_0^{\pi} \frac{|\Omega_{n-1}|\sin^{n-1}\theta}{\theta^{n-\alpha(x)}}\,\frac{1}{|L_{x,\theta}|}\int_{L_{x,\theta}} f(y)\,dL_{x,\theta}(y)\,d\theta\right|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq C\left\{\int_{\Omega_n}\left(\int_0^{\pi} \frac{1}{\theta^{1-\alpha(x)}}|S_\theta(f)(x)|\,d\theta\right)^p dx\right\}^{1/p}$$

$$\leq C\left(\int_0^1 + \int_1^{\pi}\right)\left(\int_{\Omega_n} \frac{1}{\theta^{(1-\alpha(x))p}}|S_\theta(f)(x)|^p\,dx\right)^{1/p}d\theta$$

$$\leq C\int_0^1 \frac{1}{\theta^{1-m}}\left(\int_{\Omega_n} |S_\theta(f)(x)|^p\,dx\right)^{1/p}d\theta + C\int_1^{\pi}\left(\int_{\Omega_n} |S_\theta(f)(x)|^p\,dx\right)^{1/p}d\theta$$

$$\leq C\int_0^1 \frac{1}{\theta^{1-m}}\| S_\theta(f) \|_p\,d\theta + C\int_1^{\pi} \| S_\theta(f) \|_p\,d\theta$$

$$\leq C\|f\|_p\left(\int_0^1 \frac{1}{\theta^{1-m}}\,d\theta + \int_1^{\pi} d\theta\right)$$

$$\leq C\|f\|_p.$$

elde edilir.

Yukarıdaki Teorem2'yi daha genişletirsek;

Teorem 3

$$0 < m \leq \alpha(x) < n, 1 < p \leq r, \frac{n}{p} - \frac{n}{r} < m.$$

ise, o halde $I^{\alpha(x)}$, (p, r) tipi hesaplamadır, yani fakat m ve n'a ilişkili C sabiti var olup,

$$\| I^{\alpha(x)}(f) \|_r \leq C \| f \|_p.$$

olur.

İspat q=pr/(pr+p-r),q'=q/(q-1) olsun. Burada $I^{\alpha(x)}$,(1, q) tipi ve (q',∞)tipi olduğunu ispatlarız. Aksiyom1'den

$$\| I^{\alpha(x)}(f) \|_q \leq \left\{\int_{\Omega_n}\left(\int_{\Omega_n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha(x)}}\,dy\right)^q dx\right\}^{1/q}$$

$$\leq \int_{\Omega}\left(\int_{\Omega} \frac{|f(y)|^q}{|x-y|^{nq-q\alpha(x)}}\,dx\right)^{1/q}dy$$

çünkü

$$\int_{\Omega_n} \frac{1}{|x-y|^{nq-q\alpha(x)}}\,dx = \int_0^{\pi}\left(\int_{L_{y,\theta}} \frac{1}{\theta^{nq-q\alpha(x)}}\,dL_{y,\theta}(x)\right)d\theta$$

$$\leq \int_0^1\left(\int_{L_{y,\theta}} \frac{1}{\theta^{nq-qm}}\,dL_{y,\theta}(x)\right)d\theta + \int_1^{\pi} |\Omega_{n-1}|\sin^{n-1}\theta\,d\theta$$

$$\leq \int_0^1 |\Omega_{n-1}|\frac{\sin^{n-1}\theta}{\theta^{nq-qm}}\,d\theta + C \leq |\Omega_{n-1}|\int_0^1 \frac{1}{\theta^{nq-qm+1-n}}\,d\theta + C = 常数,$$

Çünkü bu, $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} < m$ dan pr/(pr+p-r)<n/(n-m) olup, buradan $q < n/(n-m) \Rightarrow nq - qm + 1 - n < 1$, olur, böylece yukarıdaki integral yakınsaktır. Dolayısıyla $\| I^{\alpha(x)}(f) \|_q \leq C \| f \|_1$. Bu demek $I^{\alpha(x)}$ ise (1, q) tipi demektir.

Halder eşitsizliğinden kolayca

$$|I^{\alpha(x)}(f)(x)| \leq \int_{\Omega_n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy \leq \left(\int_{\Omega_n} |f(y)|^{q'} dy\right)^{1/q'} \left(\int_{\Omega_n} \frac{1}{|x-y|^{q(n-\alpha(x))}} dy\right)^{1/q}$$

$$\leq C\|f\|_{q'}$$

elde edilir. Neticede

$$\| I^{\alpha(x)}(f) \|_{\infty} \leq C \| f \|_{q'},$$

olup, buradan da $I^{\alpha(x)}$, (q',∞) tipidir.

$t = q(1 - \frac{1}{p})$, olduğunu varsayarsak, o halde

$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'}, \frac{1}{r} = \frac{1-t}{q'}$, olup,

Aksiyom2'ye göre $I\alpha(x)$,(p,r) tipi kısmi hesaplama olur.

p≠r olduğunda, $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} = m$, için sonuç yine de sağlanır. Bu halde

Teorem 4

$$0 < m \leq \alpha(x) < n, 1 < p < r, \frac{n}{p} - \frac{n}{r} = m,$$

ise, $I^{\alpha(x)}$, (p, r) tipi hesaplamadır.

İspat Önce $\alpha(x)=m$ sabit olduğunda teoremin sağlanacağını ispatlayalım. $m = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$, den

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{n-m}{n} \cdot \Leftrightarrow q = \frac{n}{n-m},$$

olduğunu varsayalım, bu halde $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

olur. Çünkü, $q' = \frac{q}{q-1} = \frac{n}{m}, p = \frac{m}{n+mr}$, olduğundan, kolayca p<q'olacakğını ispatlanabilir. $K(x,y)=|x-y|^{m-n}$, olsun diyelim, bu halde

$$\| K(x,\cdot) \|_{wL^q} = \sup_{\lambda>0} \lambda (\text{mes}\{ y \in \Omega_n : |x-y|^{m-n} > \lambda \})^{1/q}$$

$$= \sup_{\lambda>0} \lambda (\text{mes}\{ y \in \Omega_n : |x-y| < (\frac{1}{\lambda})^{1/(n-m)} \})^{1/q}$$

$$\leq C \sup_{\lambda>0} \lambda \{ (\frac{1}{\lambda})^{n/(n-m)} \}^{(n-m)/n} = C.$$

aynı şekilde, $\| K(\cdot,y) \|_{wL^q} \leq C$. olur. Aksiyom3'ten I^m nin (p, r) tipide olduğu bilinir, yani öyle bir A sabiti var olup, onun için

$$\| I^m(f) \|_r \leq A \| f \|_p .$$

olur.

Genel potansiyel durumunda, diyelim

$$\Omega_{n,x} = \{ y \in \Omega_n : |y - x| \geq 1 \}, \bar{\Omega}_{n,x} = \Omega_n \setminus \Omega_{n,x},$$

olsun, bu halde

$$|I^{\alpha(x)}(f)(x)| \leq \int_{\Omega_n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy \leq \int_{\Omega_{n,x}} |f(y)| dy + \int_{\bar{\Omega}_{n,x}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-m}} dy$$

$$\leq \int_{\Omega_n} |f(y)| dy + I^m(f)(x) \leq A' \| f \|_p + I^m(f)(x).$$

olur. Dolayısıyla

$$\| I^{\alpha(x)}(f) \|_r \leq \| A' \| f \|_p + I^m(f)(x) \|_r \leq A' \| f \|_p + \| I^m(f) \|_r$$

$$\leq A' \| f \|_p + A \| f \|_p = C \| f \|_p,$$

olup, $I^{\alpha(x)}$, (p, r) tipi kısmi hesaplama olur.

III. SONUÇ

İntegral hesaplamalarında küre düzlemindeki Riesz potansiyel integralının hesaplanması teknolojinin her yönünde büyük ilgi görmektedir. Bu araştırmada küre düzlemindeki Riesz potansiyel integralinin kısmi hesaplama işlemlerine ilişkin temel bilgi ve yöntemler ışığında yeni bir tartışma konu olan teorem ve neticeler ortaya konulmuştur. Bu açıdan hesaplama işlemlerinde operatör (integral sınırlarının değişimi) durumu ele alınmış ve sonuç olarak yeni yöntemler geliştirmiştir. Bu yöntemler ışığında, Riesz potansiyel integralini hesaplamanın bazı özellikleri verilmiştir.

IV. KAYNAKLAR

1. Ross B, Samko S. Integration and differentiation to a varia ble fractional order [J] . Integral Transforms and Special Function, No: 1; pp. 201–209, New York, 1991.

2 Nicoloas du plessis. Some theorem about the Riesz fractional integral [J] . Trans Amer Math Soc, No: 5; pp.124 –134, New York, 1980.

3 Chen Sh., Wang K., Real Analiz (Chince) [M] , Pekin Pidalojik Üniversitesi Yayın Evi, pp.142 – 165, Pekin, 1997.