# DOĞAL SİHİRLİ KARELERİN ÖZELLİKLERİ

**Asker-Ali Abiyev, Azer Abiyev**

*Özet*-**İlk defa sihirli karelerin doğal algoritması bulunmuştur. Bu yeni yöntem sonsuza kadar istenilen dereceden ve istenilen sayılardan (rasyonel, irrasyonel, karmaşık vb.) sihirli kareler oluşturma imkanı sağlamaktadır. Böyle doğal sihirli karelerin önemli özellikleri incelenmiştir.**

**Anahtaar Kelimeler:**

**Abstract-The natural algorithm of magic squares have been established. With this new method, it is possible to form magic squares at any order using any sort of numbers including rational, irrational, complex etc. In this study, the important properties of magic squares have been revealed.**

**Keywords:**

## I. GİRİŞ

Sihirli kareler 2000 yıldır aydınların kafasını meşgul etmiştir. Son 250 yılda matematikçiler sihirli karenin ciddi bir matematiksel problem olduğunu ortaya koymuşlardır. Ünlü matematikçilerin uğraşmasına rağmen bu problem 1996'ya kadar çözülememiştir. 03.03.1996 yılında sihirli karelerin doğal algoritması tarafımızdan bulundu. Bu yeni yöntem en basit ve en genel bir algoritma olduğundan dolayı, bu algoritma ile yazılan sihirli karelere doğal sihirli kare ismini verdik.

A.Abiyev,A.Abiyev;Azerbaycan Bilimler Akademisi Radyasyon Araştırma Merkezi

Herhangi bir kareyi eşit aralıklarla n–1 sayıda yatay ve düşey doğrular yardımıyla $n^2$ tane hanelere bölelim. Böyle bir kareye n. dereceden kare diyeceğiz.

**n. dereceden sihirli karenin tanımı:**

$\{1, 2, 3, ..., n^2 - 1, n^2\}$ sayılar kümesinin elemanlarını n x n kareye öyle yazalım ki, istenen sütun, satır veya köşegenlerdeki n tane sayının toplamı aynı sabit bir sayıya eşit olsun. Bu sayıya sihirli sayı diyeceğiz. Bu sayının formülünü bulalım.

Sihrili karenin tanımına göre tüm hanelerdeki sayıların toplamı nS'e, diğer yandan ise $1+2+3+...+(n^2-1)+n^2$'ye eşit olacak, yani

$$nS = 1+2+3+...+(n^2-1)+n^2 = \frac{1+n^2}{2}n^2$$ 've eşittir.

Buradan

$$S = \frac{n^2+1}{2}n$$ bulunur.

Kareler derecesine göre çiftli ve tekli kareler olarak isimlendirilir. Çift dereceden kareler ise 2 türlüdür; derecesi ikiye bölündüğünde çift sayı oluşturan kare, çiftli-çift kare ve derecesi ikiye bölündüğünde tek sayı oluşturan kare ise tekli-çift kare olarak isimlendireceğiz.

4,8,12,16,20, ... ,4k çiftli-çift sayılar

2,6,10,14, ... ,2(2k–1) tekli-çift sayılar

3,5,7,9, ... ,2k+1 tek sayılar

$k \in N^+$

## II. DOĞAL SİHİRLİ KARELERİN ALGORİTMALARI

Bu algoritmayı açıklamak için 3 soruyu yanıtlamak gerekir: Ne, Nereye, Nasıl yazılmalıdır?

Doğal sihirli kare oluşturmak için;

$\{1,2,3, ..., n^2\}$ kümesinin sayıları n/2 gruba ayrılır (tek dereceden kare için (n+1)/2 ). Her grup ise 4 çeşit aritmetik dizi içerir. Her dizinin son terimi bir sonraki dizinin ilk terimi olur. Her 4. dizinin son terimi 1.dizinin 1. terimiyle aynıdır. Bu ifade tüm grupların dizileri için geçerlidir. İlk grubun dizi uzunluğu n, ikinci grubun dizi uzunluğu n–2, genel olarak k. grubun dizi uzunluğu n–2(k–1)'dir.($k \in \{1,2,..., n/2\}$) Böylece son grubun, yani n/2. grubun dizi uzunluğu 2 olur. n. dereceden kare için 1. grubun 4 dizisini oluşturalım:

$\alpha_1$ – 1, 2, 3, ... , (n–1), n (1'er artar)

$\beta_1$ – n, 2n, 3n, ..., (n–1)n, $n^2$ (n'er artar)

$\gamma_1$ – $n^2$, $(n^2-1)$, $(n^2-2)$, ... , $[n^2-(n-1)]$ (1'er azalır)

$\delta_1$ – $[n^2-(n-1)]$, $[n^2-(n-1)-n]$, ... ,

$[n^2-(n-1)-(n-2)n]$, $[n^2-(n-1)-(n-1)n]$ (n'er azalır)

$\delta_1$ dizisinin son terimi 1'e, ondan bir öncesi ise (n+1)'e eşittir.

Her grubun 1. dizisinin 1. terimi bir önceki grubun 4. dizisinin (yani δ dizisinin) sondan bir önceki teriminin 1 fazlasına eşittir. Örnek olarak, 2. grubun 1. terimi (n+2) sayısı ile başlayacaktır. Her grubun 1., 2., 3., ve 4., dizileri sırasıyla +1, +n, –1, –n olarak artar ve azalır.

Örnek olarak n=12 için 1. ve 2. grupların dizilerini yazalım:

$\alpha_1$ - 1, 2, 3, ..., 11,12

$\beta_1$ - 12,24,36,...,132,144

$\gamma_1$ - 144,143,142,...,134,133

$\delta_1$ - 133,121,...,13,1

---

$\alpha_2$- 14,15, ..., 22,23

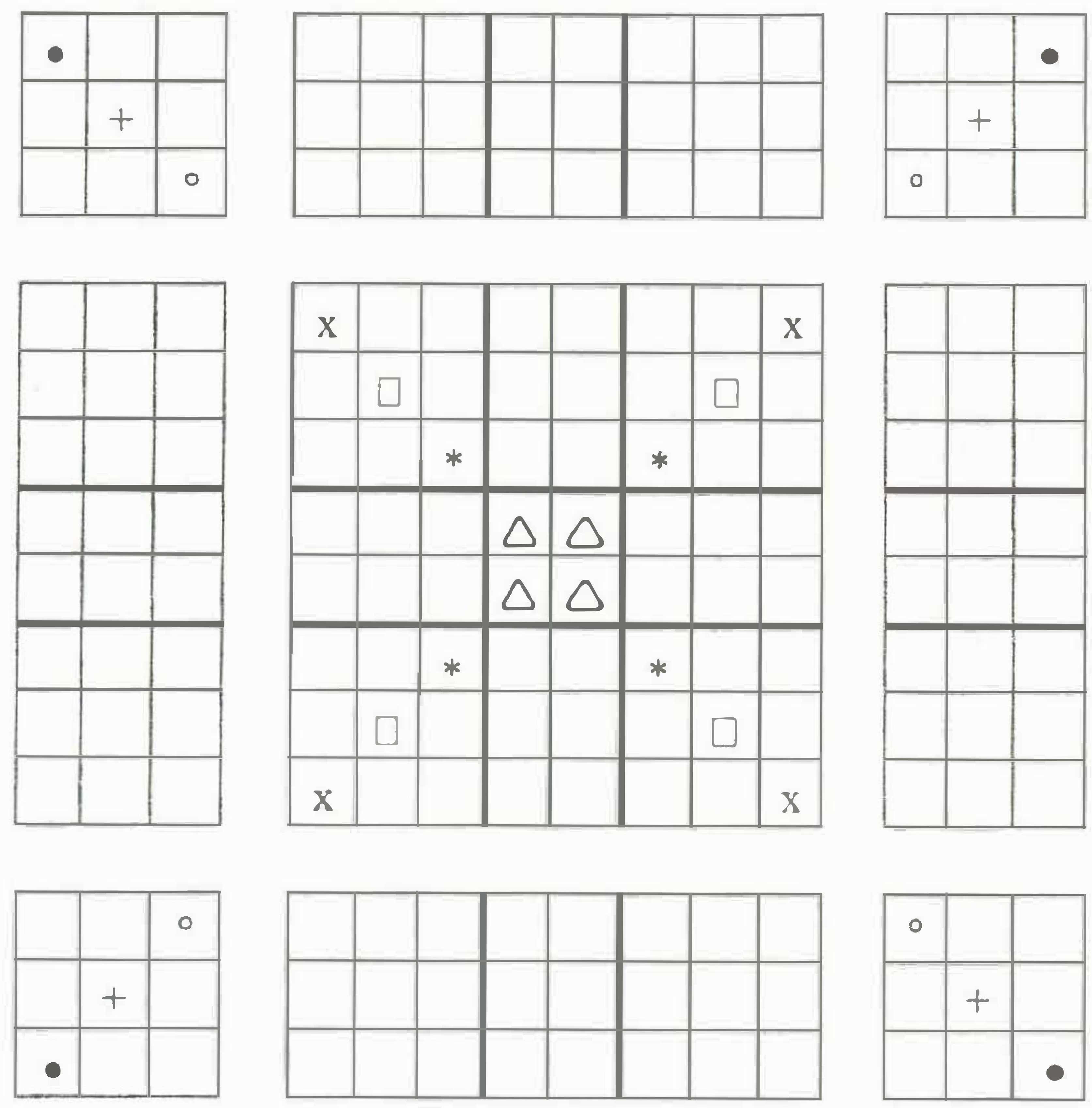
$\beta_2$ - 23,35,...,119,131

$\gamma_2$ - 131,130,...,123,122

$\delta_2$ - 122,110,..,26,14 vb.

Böylelikle , "Ne" sorumuzun yanıtı olarak grupları ve dizileri nasıl elde edeceğimizi gösterdik. Grupların ve dizilerin böyle kuralla oluşturulması istenen çiftli-çift, tekli-çift ve tek dereceden karelerin hepsi için geçerlidir.

Şimdi ise "Nereye" sorusunu yanıtlamak için ele aldığımız kareyi çerçevelere ayıralım: Çerçevelerden kastımız dıştan içe varolan iç-içe (konsentrik) kare çerçevelerdir.



• 1. çerçeve [n. derece]

+ 2. çerçeve [(n-2). derece]

o 3. çerçeve [(n-4). derece]

- - - - - - - - - - -

x $(\frac{n}{2}-3)$. çerçeve [8. derece]

□ $(\frac{n}{2}-2)$. çerçeve [6. derece]

* $(\frac{n}{2}-1)$. çerçeve [4. derece]

△ $(\frac{n}{2})$. çerçeve [2. derece]

Şekil 1. Karenin çerçevelerinin sıralanması veya derecelenmesi

Şekil 1'de n. dereceden karenin çerçeveleri sırasına (derecesine) göre gösterilmiş ve aynı çerçevelerin köşegenlerindeki haneleri aynı sembollerle işaretlenmiştir. Çerçevenin yatay veya düşey hanelerinin sayısı onun derecesini gösterir. Kuşkusuz ki, çerçevelerin sayısı ve ele aldığımız grupların sayısı birbirlerine eşittirler, yani çerçeveler sayısı=gruplar sayısı= n/2. Tek dereceden kare için çerçeve ve gruplar sayısı (n+1)/2'ye eşittir. Bu nedenle son dizi bir sayıdan ve çerçeve ise bir haneden ibarettir.

Her gruptaki dizilerin elemanları sayısı uygun çerçevedeki haneler sayısına eşittir.

Görüldüğü gibi çerçeveler ve gruplar sayılarının eşitliği bizi şu noktaya götürür:

1. çerçeve hanelerine 1. grubun 4 dizisindeki sayılar yazılacak;

2. çerçeve hanelerine 2. grubun 4 dizisindeki sayılar yazılacak, vb.

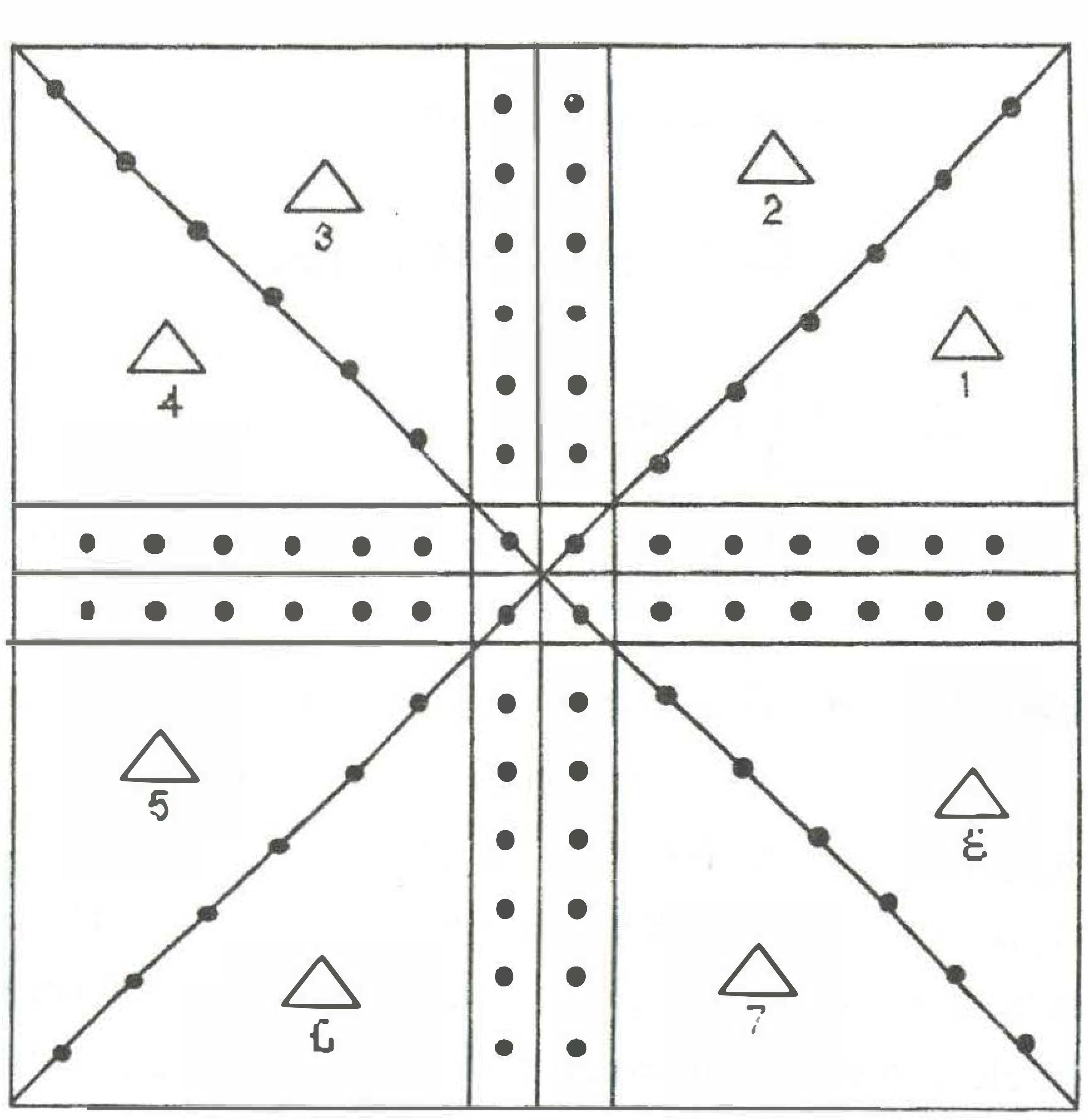
Her grubun dizi elemanları çerçevenin hanelerine kapalı graflarla yazılır. Her çerçeveye uygun bir kapalı graf mevcuttur. Böyle kapalı grafları Eulerin şerefine Euler devirleri olarak isimlendirdik.

Burada biz doğal sihirli karenin ana düşüncesini sunduk. Bu algoritmanın tam teferruatlı açıklanması ayrıca bir makalenin söz konusudur [1].

*Not:* Bulduğumuz algoritma ile yazılmış karenin sihirli olduğu kolaylıkla ispatlanabilir.

Şimdi ise doğal sihirli karenin önemli özelliklerini göstermek için bir kaç tanım sunalım.

Herhangi bir kareyi şekil 2'de gösterilen bölümlere ayıralım. Şekildeki "+" işareti merkeze en yakın iki satır ve sütunlardan oluşmaktadır. Bu satır ve sütünların kesişmesi karenin merkezi 2x2 karesini oluşturur. Tekli karede "artı" işareti bir sütun ve bir satırın kesişmesinden oluştuğuna göre merkezi kare bir haneli olur.




Şekil 2. Çift dereceden karenin özel bölgeleri

Köşegenler ve "artı" nın yardımıyla meydana gelen 8 bölge ise "Δ" işaretiyle belirlenmiştir.

**Tanımlar:**

a– Köşegen üzerindeki sayılara köşegen sayıları,

b– Merkezi karenin içerisindeki 4 sayıya merkezi sayılar,

c– "+" içerisindeki sayılara (merkezi sayılar hariç) artı-içi sayılar,

d– "Δ" itareti içerisindeki sayılara üçgen-içi sayılar diyeceğiz.

Şimdi ise 16. dereceden sayılı 2 kareyi ele alalım.

1 - 256 sayılarını ardışık olarak 16 x 16 karesindeki hanelere yazalım. Böyle kareye doğal kare denir (Şekil3). Şekil 4'de ise tarif ettiğimiz yöntemle yazılmış 16. dereceden doğal sihirli kare gösterilmektedir.

Ele aldığımız bu iki sayılı kareleri (Şekil 3 ve 4) karşılaştırdığımızda aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkmaktadır;

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
| 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 |
| 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 |
| 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 |
| 129 | 130 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 | 143 | 144 |
| 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 | 160 |
| 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 |
| 177 | 178 | 179 | 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 185 | 186 | 187 | 188 | 189 | 190 | 191 | 192 |
| 193 | 194 | 195 | 196 | 197 | 198 | 199 | 200 | 201 | 202 | 203 | 204 | 205 | 206 | 207 | 208 |
| 209 | 210 | 211 | 212 | 213 | 214 | 215 | 216 | 217 | 218 | 219 | 220 | 221 | 222 | 223 | 224 |
| 225 | 226 | 227 | 228 | 229 | 230 | 231 | 232 | 233 | 234 | 235 | 236 | 237 | 238 | 239 | 240 |
| 241 | 242 | 243 | 244 | 245 | 246 | 247 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 | 255 | 256 |

Şekil 3. 16. dereceden doğal kare

a- Köşegen üzerindeki sayılardan sadece merkezi sayılar kendi köşegenleri üzerinde yerlerini değişirler,

b- Artı-içi sayılar "+" işareti içinden dışarı çıkmayarak merkezi veya doğrusal simetriye uygun olarak yerlerini değişirler,

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 242 | 14 | 244 | 12 | 246 | 10 | 249 | 248 | 7 | 251 | 5 | 253 | 3 | 255 | 16 |
| 240 | 18 | 227 | 29 | 229 | 27 | 231 | 232 | 25 | 234 | 22 | 236 | 20 | 238 | 31 | 17 |
| 33 | 223 | 35 | 212 | 44 | 214 | 42 | 217 | 216 | 39 | 219 | 37 | 221 | 46 | 34 | 224 |
| 208 | 50 | 206 | 52 | 197 | 59 | 199 | 200 | 57 | 202 | 54 | 204 | 61 | 51 | 207 | 49 |
| 65 | 191 | 67 | 189 | 69 | 182 | 74 | 185 | 184 | 71 | 187 | 76 | 68 | 190 | 66 | 192 |
| 176 | 82 | 174 | 84 | 172 | 86 | 167 | 168 | 89 | 170 | 91 | 85 | 173 | 83 | 175 | 81 |
| 97 | 159 | 99 | 157 | 101 | 155 | 103 | 152 | 153 | 106 | 102 | 156 | 100 | 158 | 98 | 160 |
| 144 | 114 | 142 | 116 | 124 | 118 | 138 | 137 | 136 | 119 | 123 | 133 | 125 | 131 | 127 | 129 |
| 128 | 143 | 126 | 141 | 140 | 139 | 122 | 121 | 120 | 135 | 134 | 117 | 132 | 115 | 130 | 113 |
| 145 | 111 | 147 | 109 | 149 | 107 | 151 | 105 | 104 | 154 | 150 | 108 | 148 | 110 | 146 | 112 |
| 96 | 162 | 94 | 164 | 92 | 166 | 90 | 88 | 169 | 87 | 171 | 165 | 93 | 163 | 95 | 161 |
| 177 | 79 | 179 | 77 | 181 | 75 | 183 | 72 | 73 | 186 | 70 | 188 | 180 | 78 | 178 | 80 |
| 64 | 194 | 62 | 196 | 60 | 198 | 58 | 56 | 201 | 55 | 203 | 53 | 205 | 195 | 63 | 193 |
| 209 | 47 | 211 | 45 | 213 | 43 | 215 | 41 | 40 | 218 | 38 | 220 | 36 | 222 | 210 | 48 |
| 32 | 226 | 30 | 228 | 28 | 230 | 26 | 24 | 233 | 23 | 235 | 21 | 237 | 19 | 239 | 225 |
| 241 | 15 | 243 | 13 | 245 | 11 | 247 | 9 | 8 | 250 | 6 | 252 | 4 | 254 | 2 | 256 |

Şekil 4. 16. dereceden doğal sihirli kare

c- Üçgen-içi sayılar ise dönme ve doğrusal simetrilere uygun olarak transpozisyon ederler.

**Örnek:** 2 ve 15 sayıları düşey eksen etrafından 180° döndürülerek yatay eksene göre simetrik hanelere, yani 242 ve 255 sayılarının hanelerine kayarlar; bu son 2 sayı ise dönmeden boşaltılmış hanelere geçiyorlar.

Aynı bir simetrik transpozisyon yardımıyla doğal kareden oluşturulan kareye "doğal sihirli kare" denir.

## III. DOĞAL SİHİRLİ KARENİN ÖZELLİKLERİ

Çift dereceden doğal sihirli karelerde;

**1. Özellik:**

a- Karenin geometrik merkezine göre simetrik köşegen sayılar;

b- Düşey veya yatay eksenine göre simetrik üçgen-içi sayılar;

c- Artı-içi sütun veya satır sayıları sırasıyla, tekli-çift çerçeveler için doğrusal, çiftli-çift çerçeveler için ise noktasal simetri olarak $n^2+1$ ($16^2+1=257$) invariantını sağlamaktadırlar.

Örnekler (Şekil 4): aşağıdaki örneklerde sayılar matris elemanları olarak belirlenmişler;

1. $61 + 196 = 257$ ($a_{4,13} + a_{13,4}$) (yan köşegen üzerinde sayılar)

$103+154=257$ ($a_{7,7} + a_{10,10}$) (baş köşegen üzerindeki sayılar)

2. $50+207=257$ ($a_{4,2} + a_{4,15}$) (Şekil 2; Δ4 ve Δ1'de üçgen-içi sayılar)

$77+180=257$($a_{12,4} + a_{12,13}$) (Şekil 2; Δ5 ve Δ8' de üçgen-içi sayılar)

3. $219+38=257$ ($a_{3,11}+a_{14,13}$) (Şekil; Δ2 ve Δ7'de üçgen-içi sayılar)

$59+198=257$ ($a_{4,6}+a_{13,4}$) (Şekil 2; Δ3 ve Δ6'da üçgen-içi sayılar)

4. $127+130=257$ ve $114+143=257$ ($a_{8,15}+a_{9,15}$; $a_{8,2}+a_{9,2}$) (yatay eksene göre simetrik artı-içi satır sayılar)

$128+129=257$ ve $144+113=257$ ($a_{9,1}+a_{8,16}$; $a_{8,1}+a_{9,16}$) (merkeze göre simetrik artı-içi satır sayılar)

5. $232+25=257$ ve $24+233=257$ ($a_{2,8}+a_{2,9}$ ; $a_{15,8}$ + $a_{15,9}$) (düşey eksene göre simetrik artı-içi sütun sayılar)

$217+40=257$ ve $216+41=257$ ($a_{3,8} + a_{14,9}$ ; $a_{3,9}+a_{14,8}$) (merkeze göre simetrik artı-içi sütun sayılar)

**Tanım:** Çerçevenin tepesindeki ve onunla komşu hanelerdeki sayılara "köşe-üçlüsü" denir.

**2. Özellik:**

Çiftli-çift ve tekli-çift doğal sihirli karelerde merkeze göre simetrik köşe-üçlüsü sayılarının toplamı kendi aralarında eşittirler.

Baş köşegen üzerinde merkeze göre simetrik köşe-üçlüsü sayılarının karelerinin toplamı kendi aralarında eşittirler.

**Örnekler (Şekil 4):**

$16+255+17=241+32+15=288$

$1+242+240=256+225+2=483$

$1^2+242^2+240^2=256^2+225^2+2^2=116165$

16. dereceden çerçevedeki sayılar.

$31+238+34=226+47+30=303$

18+227+223=239+210+19=468

$18^2+227^2+223^2=239^2+210^2+19^2=101582$

14. dereceden çerçevedeki sayılar.

### 3. Özellik:

Tek dereceli doğal sihirli karelerde sırasıyla, düşey ve yatay eksenlerine göre simetrik sütunlarda ve satırlardaki sayılar aşağıdaki sayılar sistemini oluştururlar. **Örnekler (Şekil 5):**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 114 | 100 | 86 | 72 | 58 | 44 | 30 | 1 | 212 | 198 | 184 | 170 | 156 | 142 | 128 |
| 130 | 116 | 102 | 88 | 74 | 60 | 31 | 17 | 3 | 214 | 200 | 186 | 172 | 158 | 144 |
| 146 | 132 | 118 | 104 | 90 | 61 | 47 | 33 | 19 | 5 | 216 | 202 | 188 | 174 | 160 |
| 162 | 148 | 134 | 120 | 91 | 77 | 63 | 49 | 35 | 21 | 7 | 218 | 204 | 190 | 176 |
| 178 | 164 | 150 | 121 | 107 | 93 | 79 | 65 | 51 | 37 | 23 | 9 | 220 | 206 | 192 |
| 194 | 180 | 151 | 137 | 123 | 109 | 95 | 81 | 67 | 53 | 39 | 25 | 11 | 222 | 208 |
| 210 | 181 | 167 | 153 | 139 | 125 | 111 | 97 | 83 | 69 | 55 | 41 | 27 | 13 | 224 |
| 211 | 197 | 183 | 169 | 155 | 141 | 127 | 113 | 99 | 85 | 71 | 57 | 43 | 29 | 5 |
| 2 | 213 | 199 | 185 | 171 | 157 | 143 | 129 | 115 | 101 | 87 | 73 | 59 | 45 | 16 |
| 18 | 4 | 215 | 201 | 187 | 173 | 159 | 145 | 131 | 117 | 103 | 89 | 75 | 46 | 32 |
| 34 | 20 | 6 | 217 | 203 | 189 | 175 | 161 | 147 | 133 | 119 | 105 | 76 | 62 | 48 |
| 50 | 36 | 22 | 8 | 219 | 205 | 191 | 177 | 163 | 149 | 135 | 106 | 92 | 78 | 64 |
| 66 | 52 | 38 | 24 | 10 | 221 | 207 | 193 | 179 | 165 | 136 | 122 | 108 | 94 | 80 |
| 82 | 68 | 54 | 40 | 26 | 12 | 223 | 209 | 195 | 166 | 152 | 138 | 124 | 110 | 96 |
| 98 | 84 | 70 | 56 | 42 | 28 | 14 | 225 | 196 | 182 | 168 | 154 | 140 | 126 | 112 |

Şekil 5 : 15. dereceden doğal sihirli kare

114+130+...+210+211+2+...+82+98=128+144+...+224+15+16+...+96+112=1695

$114^2+130^2+...+210^2+211^2+2^2+...+82^2+98^2=$

$128^2+144^2+...+224^2+15^2+16^2+...+96^2+112^2=260065$

(Bu sayılar 1. ve 15. sütunlardadırlar).

Çift dereceli sihirli karelerde bu özellik biraz karmaşıktır. 16. dereceden çerçeveyi göz önüne alalalım (Şekil 4). Örnek olarak; 1. satırda tek ve çift veya çift ve tek numaralı hanelerde (genel gösterim: $a_{i,k}$ ve $a_{i,k+1}$) bulunan, istenilen 1 çift sayı ve bu sayıların düşey eksene göre simetrik hanelerde ($a_{i,n-k+1}$ ve $a_{i,n-k}$) 1 çiftini ele alalım. Böylelikle elimizde 2 çift sayı olacaktır. Bu 2 çift sayının toplamı yatay eksene göre simetrik 16. satırdaki 2 çift sayının toplamına eşit olur (eğer köşegen sayıları ve artı-içi sayılar bu çift sayılara dahillerse, yatay simetri yerine merkez simetrisinden faydalanmak gerekir; tekli-çift çerçevelerin artı-içi sayıları hariç) Bu özellikler 4 çift, 6 çift, 8 çift, ... sayılar içinde geçerlidir. **İstisna:** İstenilen çiftli-çift doğal sihirli karenin 8. ve 4. dereceden çerçevelerinde artı-içi sayılar $n^2+1$ invariantını noktasal simetri olarak değil, doğrusal simetri olarak sağlamaktadırlar.

İstenilen tekli-çift doğal sihirli karelerde ise bu istisna sadece 4. dereceden çerçeve için geçerlidir.

1. sütunda 2 çift veya 4 çift sayı ve bunlara düşey eksenine göre simetrik 16. sütundaki sayıları ele alalım. Birbirlerine göre simetrik hanelerde bulunan bu 2 çift ve 4 çift sayının toplamı ve karelerinin de toplamı birbirlerine eşittir.

**Örnekler (Şekil 4):**

82+159+111+162=175+98+146+95=514

$82^2+159^2+111^2+162^2=175^2+98^2+156^2+95^2=70570$

2. sütun ve 15. sütun

1+240+97+144+128+145+32+241=

16+17+160+129+113+112+225+256=1028

$1^2+240^2+97^2+144^2+128^2+145^2+32^2+241^2=$

$16^2+17^2+160^2+129^2+113^2+112^2+225^2+256^2=184260$

1. sütun ve 16. sütun

69+182+74+185+184+71+187+76=181+75+183+72+73+186+70+188=1028

$69^2+182^2+74^2+185^2+184^2+71^2+187^2+76^2=181^2+75^2+183^2+72^2+73^2+186^2+70^2 188^2=157228$

5. satır ve 12. satır

Tekli-çift çerçevelerde artı-içi doğrusal simetriye sahip 4 çift sayı $n^2+1$ invariantını sağlar. 16. dereceden doğal sihirli karesini ele alalım (Şekil 4). Artı-içi [2. satır ve 2. sütun] ve [15. sütun ve 15 satır]'daki 4 çift sayıyı göz önüne alalım. Yukarıda yazdığımız eşitlik sistemi bu çift sayılar için de sağlanır.

$232+25+114+143=127+130+24+233=514=2(16^2+1)$

$232^2+25^2+114^2+143^2=127^2+130^2+24^2+233^2=87894$

***Not:*** bu son eşitlik sisteminde kareler için sağlanılan eşitlik [2. satır ve 15. sütun] ve [2. sütun ve 15. satır] daki sayıar için sağlanamaz. Yani, tekli-çift çerçevelerdeki bu 4 çift sayılar 2'şer çift olarak yan köşegene göre simetrik hanelerde bulunmalıdırlar.

**4. Özellik:**

Doğal sihirli karelerde önemli invariantlardan birisi de üçgen-içi sayılara bağlıdır. Burada her hangi sayının yatay ve köşegen (veya düşey ve köşegen) komşu 4 sayının toplamı $2(n^2+1)$ invariantını sağlar. Bu sayılar artı-içi ve köşegen üzerindeki sayıları kapsamamalıdırlar.

**Örnekler (Şekil 4):**

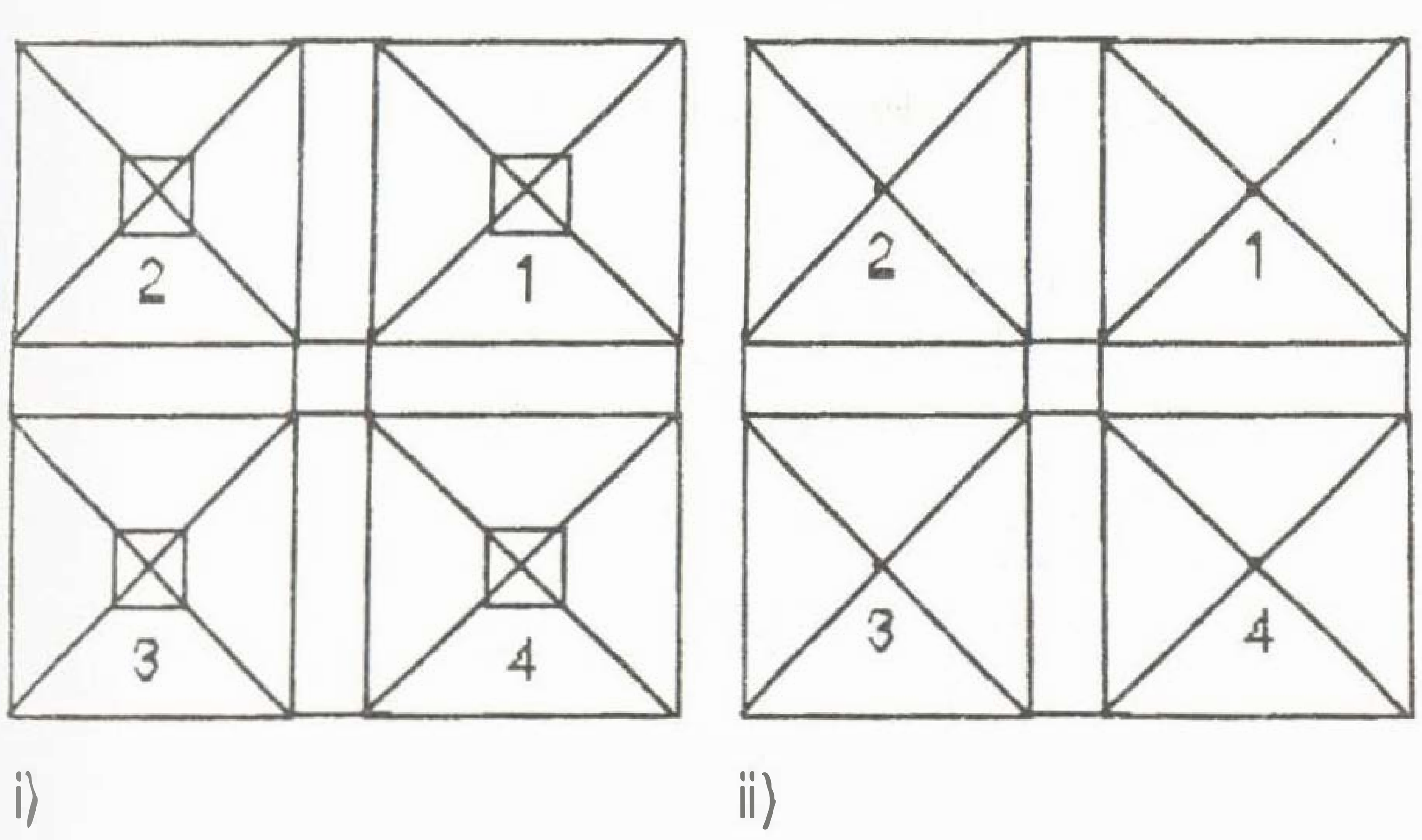
1. 66+98+190+160=81+83+192+158=514=$2(16^2+1)$

Bu sayılar $\Delta$1'den alınmıştır (Şekil 2)

2. 198+230+58+28=213+215+60+26=514

Bu sayılar $\Delta$6'den alınmıştır (Şekil 2)

Tek dereceli doğal sihirli karelerde bu özellik aşağıdaki gibi gösterilebilir. Artı işareti, kareyi derecesi (n-1)/2 'ye eşit 4 küçük kareye ayırır. nxn tek dereceli sihirli kare için n sayısına 1 eklendiği zaman çiftli-çift veya tekli-çift sayı elde edilebilir. Bu halde çiftli-çift sayı için her küçük karenin merkezinde bir hane, tekli-çift sayı için ise her küçük karenin merkezinde ise nokta bulanacaktır (Şekil 6).




Şekil 6: Tek dereceden karenin özel bölgeleri

İ) Eğer n+1 çiftli – çift sayıya eşit ise.

İİ) Eğer n+1 tekli-çift sayıya eşit ise.

15 x 15 karesinde merkezi sayılar 218, 120, 8 ve 106'dır. Bu sayılar büyük karenin geometrik merkezine göre $n^2$ + 1 invariantını sağlayan simetrik sayılardır. Örnek olarak 1. kareyi 3. kare ile ve 2. kareyi 4. kare ile merkeze göre simetrik kabul ederiz (Şekil 6). Küçük karelerin merkezlerini noktasal simetri merkezi kabul edelim. Örnek olarak 1. ve 3. karelerini ele alalım. 1. karenin merkezine göre 1 çift sayı ve 3. karenin merkezine göre aynı simtriye sahip 1 çift sayının hepsini toplarsak bu toplamın $2(n^2+1)$'e eşit olduğunu görürüz.

**Örnekler (Şekil 5):**

1) 188+23+203+38=452=$2(15^2+1)$

7+204+22+219=452

216+220+6+10=452

Bu sayılar 1. ve 3. (Şekil 6) karelerden alınmıştır.

2) 114+111+115+112=452

60+180+46+166=452

72+153+73+154=452

Bu sayılar 2. ve 4. (Şekil 6) karelerden alınmıştır.

**5. Özellik:**

Doğal sihirli karelerde belirli aritmetik diziler de mevcuttur. Köşegen sayılar ve köşegenlere paralel doğrular üzerinde bulunan sayılar, (merkezi sayılar da dahil) belirli bir takım diziler oluştururlar (Şekil 4).

a) 17,34,...,119,**136**,153,170,...,255.

b) 32,47,...,122,**137**,152,167,...,242.

c) 15,30,...,105,**120**,135,...,225.

d) 1,18,...,103,**137**,**120**,154,...,256.

e) 2,19,...,104,**121**,138,...,240.

f) 16,31,...,106,**136**,**121**,151,...,241.

**(120** ve **137);(121** ve **136)** merkez sayıları kendi köşegenleri üzerinde yerlerini değiştirirler.

a) dizisinin yarım grafları ve b) ve c) dizilerinin grafları yan köşegene göre simetriktirler.

**6. Özellik:**

Doğal sihirli karenin önemli bir özelliği de aşağıda verilmiştir. Çift dereceden bu karelerin, dışardan içeriye doğru çerçeveleri tek-tek çıkarıldığında geri kalan karelerin sihirliliğini sağlamak için bu karelerin içerdiği 4. dereceden karenin yazılışında sadece belirli basit değişiklikler yapmak gerekir. Bu özelliği açıklamak için 4. dereceden 3 matrisi göz önüne alalım (tablolar 1, 2, 3).

Tablo 1. n. dereceden doğal karenin kapsadığı 4. dereceden karenin matrisi.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}$ | $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+2}$ |
| $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}$ | $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2}$ |
| $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1}$ | $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2}$ |
| $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}-1}$ | $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+2}$ |

Tablo 2. n. dereceden doğal karenin içerdiği 4. dereceden karesinden (Tablo 1) oluşturulmuş doğal sihirli karenin matrisi.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}$ | $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+2}$ |
| $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2}$ | $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1}$ |
| $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2}$ | $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}$ |
| $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}-1}$ | $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+2}$ |

Tablo 3. n. dereceden doğal sihirli karenin kapsadığı 4. dereceden karesinin matrisi (sihirli değil).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}$ | $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+2}$ |
| $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2}$ | $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}$ |
| $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2}$ | $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1}$ |
| $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}-1}$ | $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}$ | $a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$ | $a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+2}$ |

## Çiftli-çift doğal sihirli karelerde:

**a)** 1. çerçeveyi çakırdığımızda geri kalan (n–2) dereceden (öylece de tekli-çift karelerin) karenin sihirli olması için 4. dereceden karede (tablo 3) sadece,

1. satırdaki $\left(a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}} \text{ ve } a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+1}\right)$ ve 1. sütundaki $\left(a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2} \text{ ve } a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2}\right)$ sayıların yerlerini değiştirmek gerekir.

**b)** Geri kalan çiftli-çift karelerin hepsi, 4. dereceden kare istisna olmakla, sihirli varolmaktadırlar.( a) daki sayılardaki değişiklikleri yapmak gerekmez.)

**c)** Sadece 6. dereceden karenin çerçevesi çıkarıldğında 4. dereceden kare tablo 2'deki gibi yazılmalıdır.

## Tekli-çift doğal sihirli karelerde

**d)** 1. çerçeve çıkarıldğında geri kalan istenilen çiftli-çift karelerin sihirli olması için bu karenin kapsadığı 4. dereceden kare tablo 2'deki gibi yazılmalıdır.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 217 | 232 | 249 | 8 | 25 | 40 | 57 | 72 | 89 | 104 | 121 | 136 | 153 | 168 | 185 |
| 58 | 39 | 26 | 7 | 250 | 231 | 218 | 199 | 186 | 167 | 154 | 135 | 122 | 103 | 90 | 71 |
| 198 | 219 | 230 | 251 | 6 | 27 | 38 | 59 | 70 | 91 | 102 | 123 | 134 | 155 | 166 | 187 |
| 60 | 37 | 28 | 5 | 252 | 229 | 220 | 197 | 188 | 165 | 156 | 133 | 124 | 101 | 92 | 69 |
| 201 | 216 | 233 | 248 | 9 | 24 | 41 | 56 | 73 | 88 | 105 | 120 | 137 | 152 | 169 | 184 |
| 55 | 42 | 23 | 10 | 247 | 234 | 215 | 202 | 183 | 170 | 151 | 138 | 119 | 106 | 87 | 74 |
| 203 | 214 | 235 | 246 | 11 | 22 | 43 | 54 | 75 | 86 | 107 | 118 | 139 | 150 | 171 | 182 |
| 53 | 44 | 21 | 12 | 245 | 236 | 213 | 204 | 181 | 172 | 149 | 140 | 117 | 108 | 85 | 76 |
| 205 | 212 | 237 | 244 | 13 | 20 | 45 | 52 | 77 | 84 | 109 | 116 | 141 | 148 | 173 | 180 |
| 51 | 46 | 19 | 14 | 243 | 238 | 211 | 206 | 179 | 174 | 147 | 142 | 115 | 110 | 83 | 78 |
| 207 | 210 | 239 | 242 | 15 | 18 | 47 | 50 | 79 | 82 | 111 | 114 | 143 | 146 | 175 | 178 |
| 49 | 48 | 17 | 16 | 241 | 240 | 209 | 208 | 177 | 176 | 145 | 144 | 113 | 112 | 81 | 80 |
| 196 | 221 | 228 | 253 | 4 | 29 | 36 | 61 | 68 | 93 | 100 | 125 | 132 | 157 | 164 | 189 |
| 62 | 35 | 30 | 3 | 254 | 227 | 222 | 195 | 190 | 163 | 158 | 131 | 126 | 99 | 94 | 67 |
| 194 | 223 | 226 | 255 | 2 | 31 | 34 | 63 | 66 | 95 | 98 | 127 | 130 | 159 | 162 | 191 |
| 64 | 33 | 32 | 1 | 256 | 225 | 224 | 193 | 192 | 161 | 160 | 129 | 128 | 97 | 96 | 65 |

Şekil 7: 16. dereceden sihirli kare (B. Franklin).

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 242 | 3 | 244 | 5 | 246 | 7 | 248 | 249 | 10 | 251 | 12 | 253 | 14 | 255 | 16 |
| 32 | 239 | 30 | 237 | 28 | 235 | 26 | 233 | 232 | 23 | 230 | 21 | 228 | 19 | 226 | 17 |
| 33 | 210 | 35 | 212 | 37 | 214 | 39 | 216 | 217 | 42 | 219 | 44 | 221 | 46 | 223 | 48 |
| 64 | 207 | 62 | 205 | 60 | 203 | 58 | 201 | 200 | 65 | 198 | 53 | 196 | 51 | 194 | 49 |
| 65 | 178 | 67 | 180 | 69 | 182 | 71 | 184 | 185 | 74 | 187 | 76 | 189 | 78 | 191 | 80 |
| 96 | 175 | 94 | 173 | 92 | 171 | 90 | 169 | 168 | 87 | 166 | 85 | 164 | 83 | 162 | 81 |
| 97 | 146 | 99 | 148 | 101 | 150 | 103 | 152 | 153 | 106 | 155 | 108 | 157 | 110 | 159 | 112 |
| 128 | 143 | 126 | 141 | 124 | 139 | 122 | 137 | 136 | 119 | 134 | 117 | 132 | 115 | 130 | 113 |
| 144 | 127 | 142 | 125 | 140 | 123 | 138 | 121 | 120 | 135 | 118 | 133 | 116 | 131 | 114 | 129 |
| 145 | 98 | 147 | 100 | 149 | 102 | 151 | 104 | 105 | 154 | 107 | 156 | 109 | 158 | 111 | 160 |
| 176 | 95 | 174 | 93 | 172 | 91 | 170 | 89 | 88 | 167 | 86 | 165 | 84 | 163 | 82 | 161 |
| 177 | 66 | 179 | 68 | 181 | 70 | 183 | 72 | 73 | 186 | 75 | 188 | 77 | 190 | 79 | 192 |
| 208 | 63 | 206 | 61 | 204 | 59 | 202 | 57 | 56 | 199 | 54 | 197 | 52 | 195 | 50 | 193 |
| 209 | 34 | 211 | 36 | 213 | 38 | 215 | 40 | 41 | 218 | 43 | 220 | 45 | 222 | 47 | 224 |
| 240 | 31 | 238 | 29 | 236 | 27 | 234 | 25 | 24 | 231 | 22 | 229 | 20 | 227 | 18 | 225 |
| 241 | 2 | 243 | 4 | 245 | 6 | 247 | 8 | 9 | 250 | 11 | 252 | 13 | 254 | 15 | 256 |

Şekil 8: 16. dereceden sihirli kare (Tamori).

e) Geri kalan tüm tekli-çift karelerin sihirli olması için önce ele aldığımız karenin sadece merkezindeki sayılarının yerlerini köşegen üzerinde değişmek gerekir.

Ortaya çıkardığımız bu özellikler istenilen sayılardan yazılmış kareler için de geçerlidirler.

Doğal sihirli karelerde aşikar ettiğimiz bu özelliklerin başka müelliflerin yazdıkları sihirli karelerde mevcut olup-olmadığını kontrol edebilmek için şekil 7 ve 8'de 16. dereceden sihirli karelerin örnekleri gösterilmiştir [2-3].

Doğal sihirli karelerin bu özellikleri, tarafımızdan keşfedilmiş, algoritmanın doğal sihirli kareler oluştumak için mükemmel bir kural olduğunu ispat etmektedir.

## IV. SONUÇ

Sihirli karelerin uygulanabilmesi bakımından onların özelliklerinin ortaya çıkarılması büyük önem taşımaktadır.

Doğal sihirli küplerin de şifresini çözdüğümüzü başka bir makele ile beyan edeceğiz.

## KAYNAKLAR

1. A.K. Abiyev, The Natural Code of Numbered Magic Squares, Enderun Publications, Ankara, (ISBN975-95318-3-6), p 77., 1996.
2. W.S. Andrews, Magic Squares and Cubes, Dover Publications, Inc., New York, Chapter 1, pp.89-112., 1960.
3. Tamori's Algorithm. http://www.pse.che.tohloku.ac.jp/~msuzuki/Magic square.alg.Tamori.