Düzce Üniversitesi
Bilim ve Teknoloji Dergisi

Araştırma Makalesi

Yeni Bir Genelleştirilmiş Normlu Uzay: A −Normlu Uzaylar

Elif KAPLAN [a,*]

[a]*Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, TÜRKİYE*
** Sorumlu yazarın e-posta adresi:elifaydinkaplan@gmail.com*
DOI: 10.29130/dubited.984464

Öz

Bu çalışmada, normlu uzayların bir genelleştirmesi olarak A −normlu uzay kavramı tanımlandı ve bu yeni uzayın bazı temel özellikleri incelendi. Ayrıca A −metrik uzay ile A −normlu uzay arasındaki ilişki araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: *A −metrik uzay, Genelleştirilmiş normlu uzay, A −normlu uzay*

A New Generalization of Normed Spaces: A −Normed Spaces

Abstract

In this study, the concept of A −normed space as a generalization of normed spaces is defined and some basic properties of this new space are examined. In addition, the relationship between A −metric space and A −normed space is investigated.

Keywords*: A −metric space, Generalized normed space, A −normed space*

Geliş: 18/ 08/2021, Düzeltme: 05/10/2021, Kabul: 10/10/2021

I. GİRİŞ

Metrik uzay kavramı ilk olarak 1906 yılında Frechet tarafından verilmiştir [1]. Bu kavram, reel ve kompleks teorilerde bilinen birçok önemli özelliğin herhangi bir uzaya nasıl aktarılacağı konusunda yol gösterici olmuştur. Ayrıca metrik kavramı matematiğin yanı sıra temel bilimler, mühendislik, tıp gibi pek çok alanda yapılan çalışmaların temelini oluşturmuştur. Bu kavramın öneminin anlaşılmasından sonra metrik yapısını genelleştirme fikri ortaya çıkmış ve bu fikir birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Metrik uzayların koşullarında değişiklikler yaparak, uzayın tanım ya da görüntü kümesini değiştirerek çok sayıda genelleştirilmiş metrik uzay yapısı elde edilmiştir. İlk olarak, 1963 yılında Gahler alışılmış metrik uzayın bir genelleştirmesi olduğunu iddia ettiği $2-$metrik uzay kavramını tanıtmıştır [2]. Fakat 1988 yılında Ha ve arkadaşları bu iddianın doğru olmadığını göstermiştir [3]. 1992 yılında Dhage, yeni bir genelleştirilmiş metrik uzay yapısı olarak $D-$metrik uzay yapısını tanıttı ve bu uzayın topolojik özelliklerini inceledi [4]. Ancak bu yapıda da açık küme kavramı ile bu kavrama dayanan tanımların hatalı olduğu gösterildi [5]. Bunun üzerine Mustafa ve Sims genelleştirilmiş metrik uzay adı altında $G-$metrik uzay yapısını tanıttılar [6]. Bu gelişmelerin ardından 2012 yılında Sedghi ve arkadaşları metrik uzayların bir başka genelleştirmesi olan $S-$metrik uzayı tanıttılar [7]. 2015 yılında da Abbas ve arkadaşları $S-$metrik uzayların genelleştirilmesi olarak $n-$boyutlu tanım kümesi üzerinde $A-$metrik uzay kavramını sundular [8].

Öklid uzayında metrik ve norm kavramı birbirleri ile çok yakından ilişkilidir. Normlu bir lineer uzayda bir metrik her zaman bir normdan üretilebilir. Gahler $2-$metrik uzayı tanıttıktan sonra bu $2-$metriği üreten $2-$norm kavramını da tanıttı [9]. Ancak sıfırdan farklı iki vektörün $2-$normunun sıfır olması yüzünden normlu uzayların yeni bir genelleştirilmesi arayışına girildi. 2014 yılında Khan, $G-$metriği üreten $G-$norm kavramını tanıttı [10]. 2018 yılında Mutlu ve arkadaşları da yine $G-$metriği üreten ve normlu uzayları genelleyen başka bir yaklaşım olarak fonksiyonel $G-$normlu uzayı tanıttılar [11]. Daha sonra 2021 yılında da, Taş ve Özgür $S-$metriği üreten $S-$norm kavramını verdiler ve $S-$norm ile $G-$norm arasındaki ilişkiyi sundular [12]. Her $G-$normun bir $S-$norm olduğunu fakat tersinin doğru olmadığını ispatladılar.

Biz de bu çalışmamızda $S-$normlu uzay yapısını genelleştirip $A-$normlu uzayları tanıttık. Bu yeni normlu uzayın $A-$metrik uzaylar ve normlu uzaylar ile arasındaki ilişkiyi araştırdık.

Bu bölümde makaleye hazırlık olması açısından bazı ön bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 1.1. X boştan farklı bir küme ve $n \geq 2$ sonlu bir doğal sayı olsun. $A: X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $i = \overline{1, n}$ için $\lambda_i, a \in X$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlasın:
A1) $A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \geq 0$,
A2) $A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda_n$,
A3) $A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \leq \sum_{i=1}^{n} A(\lambda_i, \lambda_i, \dots, \lambda_i, a)$
Bu durumda, A'ya X üzerinde bir genelleştirilmiş metrik veya $A-$metrik, (X, A) ikilisine de bir genelleştirilmiş metrik uzay veya $A-$metrik uzay denir [8].

Örnek 1.2. $X = \mathbb{R}$ olsun. Her $i = \overline{1, n}$ için $\lambda_i \in X$ olmak üzere

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|$$

ve

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = |\lambda_n + \cdots + \lambda_2 - (n-1)\lambda_1| + |\lambda_n + \cdots + \lambda_3 - (n-2)\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n - \lambda_{n-1}|$$

şeklinde tanımlı $A: X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonları X üzerinde birer $A-$metriktir [8].

Örnek 1.3. X boştan farklı herhangi bir küme ve d fonksiyonu da X üzerinde tanımlı standart metrik olsun. Buna göre $n \geq 3$ olmak üzere her $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in X$ için

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = d(\lambda_1, \lambda_n) + d(\lambda_2, \lambda_n) + \cdots + d(\lambda_{n-1}, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n-1} d(\lambda_i, \lambda_n)$$

şeklinde tanımlanan $A: X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir A −metriktir [13]. Bu örnek aynı zamanda her standart metrikten bir A −metrik üretildiğini ifade eder.

II. A −NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde A −normlu uzay tanımı verildi. Bu yeni genelleştirilmiş normlu uzayın A −metrik uzay ile arasındaki ilişki araştırılıp gerekli örnekler sunuldu.

Tanım 2.1. X bir reel vektör uzayı olmak üzere $\|\cdot, \cdots, \cdot\|: X^n \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonu her $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ için

AN1) $\|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\| \geq 0$

AN2) $\|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\| = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

AN3) $\|c\lambda_1, c\lambda_2, \dots, c\lambda_n\| = |c|\|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\|$

AN4) Her $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in X$ için

$$\|\lambda_1 + \lambda'_1, \lambda_2 + \lambda'_2, \dots, \lambda_n + \lambda'_n\| \leq \|0,0, \dots, \lambda_1, \lambda'_n\| + \sum_{i=2}^{n} \|0,0, \dots, \lambda_i, \lambda'_{i-1}\|$$

şartlarını sağlarsa $\|\cdot, \cdots, \cdot\|$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir A −norm ve $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ ikilisine de A −normlu uzay denir.

Örnek 2.2. $X = \mathbb{R}$ ve $\|\cdot, \cdots, \cdot\|: X^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in X$ için
$\|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\| = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n|$
şeklinde tanımlı olsun. $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ bir A −normlu uzaydır.

Çözüm. $\|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\| = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n|$ fonksiyonunun A −norm olma şartlarını sağladığı gösterilmelidir.

AN1) Fonksiyonun tanımından mutlak değerin özelliği gereği her $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in X$ için
$\|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\| \geq 0$
olduğu aşikardır.

AN2) Eğer $\|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\| = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n| = 0$ ise $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ olur. Tersine $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ ise $\|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\| = 0$ olduğu açıktır.

AN3) $\overline{\lambda_1, \lambda_n} \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|c\lambda_1, c\lambda_2, \dots, c\lambda_n\| &= |c\lambda_1| + |c\lambda_2| + \cdots + |c\lambda_n| \\ &= |c||\lambda_1| + |c||\lambda_2| + \cdots + |c||\lambda_n| \\ &= |c|(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n|) \\ &= |c|\|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\| \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

AN4) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in X$ ve $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in X$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\lambda_1 + \lambda'_1, \lambda_2 + \lambda'_2, \dots, \lambda_n + \lambda'_n\| &= |\lambda_1 + \lambda'_1| + |\lambda_2 + \lambda'_2| + \cdots + |\lambda_n + \lambda'_n| \\ &= |\lambda_1| + |\lambda'_1| + |\lambda_2| + |\lambda'_2| + \cdots + |\lambda_n| + |\lambda'_n| \\ &= |0| + |0| + \cdots + |\lambda_1| + |\lambda'_n| + |0| + |0| + \cdots + |\lambda_2| + |\lambda'_1| + \\ &\quad \dots + |0| + |0| + \cdots + |\lambda_n| + |\lambda'_{n-1}| \\ &\leq \|0,0, \dots, \lambda_1, \lambda'_n\| + \sum_{i=2}^{n} \|0,0, \dots, \lambda_i, \lambda'_{i-1}\| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylelikle $\|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\| = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n|$ fonksiyonu (AN1), (AN2), (AN3) ve (AN4) şartlarını sağlar ve $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ bir A −normlu uzaydır.

Örnek 2.3. $X = C([0,1])$ kümesi $[0,1]$ üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere $\|\cdot, \cdots, \cdot\|: X^n \to \mathbb{R}$ normu her $f_1, \dots, f_n \in X$ için,

$$\|f_1, f_2, \dots, f_n\| = \max_{u \in [0,1]} \{|f_1(u)| + |f_2(u)| + \cdots + |f_n(u)|\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ bir A −normlu uzaydır.

Çözüm. $\|f_1, f_2, \dots, f_n\| = \max_{u \in [0,1]} \{|f_1(u)| + |f_2(u)| + \cdots + |f_n(u)|\}$ fonksiyonunun (AN1), (AN2), (AN3) şartlarını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. (AN4) şartının sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. Her $f_1, \dots, f_n, f_1', \dots, f_n' \in X$ için

$$\begin{aligned}
\|f_1 + f_1', f_2 + f_2', \dots, f_n + f_n'\| &= \max_{u \in [0,1]} \{|f_1(u) + f_1'(u)| + |f_2(u) + f_2'(u)| + \cdots \\
&\qquad + |f_n(u) + f_n'(u)|\} \\
&\le \max_{u \in [0,1]} \{|f_1(u)| + |f_1'(u)| + |f_2(u)| + |f_2'(u)| + \cdots + |f_n(u)| + |f_n'(u)|\} \\
&\le \max_{u \in [0,1]} \{|f_1(u)| + |f_n'(u)|\} + \dots + \max_{u \in [0,1]} \{|f_n(u)| + |f_{n-1}'(u)|\} \\
&= \|0,0,\dots,f_1,f_n'\| + \cdots + \|0,0,\dots,f_n,f_{n-1}'\|
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ bir A −normlu uzaydır.

Aşağıdaki önerme her A −normun bir A −metrik ürettiğini ifade etmektedir.

Önerme 2.4. $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ bir A −normlu uzay olsun.

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \|\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_n - \lambda_1\| \qquad \textbf{(2.1)}$$

şeklinde tanımlı $A: X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir A −metrik tanımlar.

İspat. (AN1) koşulundan

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \|\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_n - \lambda_1\| \ge 0$$

olup (A1) koşulunun sağlandığı görülmüş olur.

Benzer şekilde (AN2) koşulundan (A2) koşulunun sağlandığı görülür.

(AN3) koşuluyla birlikte

$$\begin{aligned}
A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &= \|\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_n - \lambda_1\| \\
&= \|\lambda_1 - a + a - \lambda_2, \lambda_2 - a + a - \lambda_3, \dots, \lambda_n - a + a - \lambda_1\| \\
&\le \|0,0,\dots,\lambda_1 - a, a - \lambda_1\| + \|0,0,\dots,\lambda_2 - a, a - \lambda_2\| + \cdots + \|0,0,\dots,\lambda_n - a, a - \lambda_n\| \\
&= A(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, a) + A(\lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_2, a) + \cdots + A(\lambda_n, \lambda_n, \dots, \lambda_n, a)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. A −fonksiyonu bir A −metriktir ve (X, A) bir A −metrik uzaydır.

(2.1) eşitliğindeki A −metriğe A −norm tarafından üretilen A −metrik denir ve $A_{\|\ \|}$ ile gösterilir.

Sonuç 2.5. Her A −normlu uzay bir A −metrik uzaydır.

Aşağıda Örnek 2.6'da verilen A −metrik bir A −norm tarafından üretilmiştir.

Örnek 2.6. X boştan farklı bir küme ve d fonksiyonu da X üzerinde tanımlı bir metrik olsun. $n \ge 3$ olmak üzere her $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in X$ için

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = d(\lambda_1, \lambda_2) + d(\lambda_2, \lambda_3) + \cdots + d(\lambda_{n-1}, \lambda_n) + d(\lambda_n, \lambda_1)$$

olacak şekilde tanımlanan $A: X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir A −metriktir.

$X = \mathbb{R}$ olsun. d fonksiyonu olarak X üzerindeki mutlak değer metriği düşünülsün. Her $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in X$ için $A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = |\lambda_1 - \lambda_2| + |\lambda_2 - \lambda_3| + \cdots + |\lambda_n - \lambda_1|$ olacak şekilde A −metriği elde edilir. Önerme 2.4'ten bu A −metrik Örnek 2.2'de tanımlanan A −norm tarafından üretilir. Gerçekten her $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in X$ için

$$\begin{aligned}
A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &= \|\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_n - \lambda_1\| \\
&= |\lambda_1 - \lambda_2| + |\lambda_2 - \lambda_3| + \cdots + |\lambda_n - \lambda_1|
\end{aligned}$$

$$= d(\lambda_1,\lambda_2) + d(\lambda_2,\lambda_3) + \cdots + d(\lambda_n,\lambda_1)$$
bulunur.

Önerme 2.7. X boştan farklı bir küme olmak üzere bir A −normlu X uzayında bir A −norm tarafından üretilen A −metrik her $\lambda_1,\dots,\lambda_n,a \in X$ ve her c sabiti için aşağıdaki koşulları sağlar:

(i) $A(\lambda_1 + a,\lambda_2 + a,\dots,\lambda_n + a) = A(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$

(ii) $A(c\lambda_1,c\lambda_2,\dots,c\lambda_n) = |c|A(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$

İspat. Önerme 2.4'ten norm ile metrik arasındaki ilişkiyi kullanarak,

(i)

$$\begin{aligned} A(\lambda_1 + a,\lambda_2 + a,\dots,\lambda_n + a) &= \|\lambda_1 + a - \lambda_2 - a,\lambda_2 + a - \lambda_3 - a,\dots,\lambda_n + a - \lambda_1 - a\| \\ &= \|\lambda_1 - \lambda_2,\lambda_2 - \lambda_3,\dots,\lambda_n - \lambda_1\| \\ &= A(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(ii) Önerme 2.4 ve (AN3) koşulundan,

$$\begin{aligned} A(c\lambda_1,c\lambda_2,\dots,c\lambda_n) &= \|c\lambda_1 - c\lambda_2,c\lambda_2 - c\lambda_3,\dots,c\lambda_n - c\lambda_1\| \\ &= \|c(\lambda_1 - \lambda_2),c(\lambda_2 - \lambda_3),\dots,c(\lambda_n - \lambda_1)\| \\ &= |c|\|\lambda_1 - \lambda_2,\lambda_2 - \lambda_3,\dots,\lambda_n - \lambda_1\| \\ &= |c|A(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı. Bu önerme tek taraflıdır. Yani bu iki koşulu sağlayan bir A −metrik bir A −normdan üretilmiştir denilemez. Bu önerme ile koşullardan en az birini sağlamayan bir A −metriğin A −normdan elde edilmediği söylenebilir.

Her A −metrik bir A −norm tarafından üretilemez. Aşağıdaki örnek bununla ilgilidir.

Örnek 2.8. X boştan farklı bir küme olmak üzere $A: X^n \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in X$ için

$$A(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) = \begin{cases} 0, & \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n \\ 1, & \quad diğer\ durumlar \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. A fonksiyonu X üzerinde bir A −metriktir ve ayrık A −metrik olarak adlandırılır. Bu ayrık A −metrik bir A −norm tarafından üretilemez. Bu durumun tersi kabul edilip bu A −metriğin bir A −norm tarafından üretildiği varsayılsın. $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} \neq \lambda_n$ olacak şekilde $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in X$ ve $c \neq 0, c \neq 1$ olacak şekilde c skaleri alınsın. $\lambda = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} \neq \lambda_n$ olduğundan $c\lambda_1 = c\lambda_2 = \cdots = c\lambda_{n-1} \neq c\lambda_n$ olup

$$\begin{aligned} A(c\lambda_1,c\lambda_2,\dots,c\lambda_n)=1 &\neq |c|A(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \\ &= |c| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum ise Önerme 2.7'nin (ii) koşulu ile çelişki ortaya çıkarır. Sonuç olarak ayrık A −metrik bir A −norm tarafından üretilemez.

Norm ile A −norm arasındaki ilişkiyi araştırmadan önce norm tanımını hatırlatmakta fayda vardır.

Tanım 2.9. N bir reel vektör uzayı ve $\|\cdot\|: N \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\lambda,\mu \in \mathbb{N}$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için,

N1) $\|\lambda\| \geq 0$

N2) $\|\lambda\| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

N3) $\|c\lambda\| = |c|\|\lambda\|$

N4) $\|\lambda + \mu\| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$

şartları sağlanırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna N üzerinde bir norm ve $(N,\|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

Aşağıdaki önerme her normun bir A −norm ürettiğini ifade etmektedir.

Önerme 2.10. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $\|\cdot, \cdots, .\|: X^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in X$ için
$\|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\| = \|\lambda_1\| + \|\lambda_2\| + \cdots + \|\lambda_n\|$
şeklinde tanımlansın. O halde $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ bir A −normlu uzaydır. Bu A −norm fonksiyonuna $\|\cdot\|$ normu tarafından üretilen A −norm denir.

İspat. Her $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ için,
(AN1) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olup (N1) şartını sağlar. Böylece $i = \overline{1, n}$ olmak üzere her $\lambda_i \in X$ için $\|\lambda_i\| \geq 0$ olup $\|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\| \geq 0$ sağlanır.
(AN2) Normlu uzayın (N2) şartından $\|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\| = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$ olduğu açıktır.
(AN3) Normlu uzayın (N3) şartı ile birlikte

$$\begin{aligned} \|c\lambda_1, c\lambda_2, \ldots, c\lambda_n\| &= \|c\lambda_1\| + \|c\lambda_2\| + \cdots + \|c\lambda_n\| \\ &= |c|\|\lambda_1\| + |c|\|\lambda_2\| + \cdots + |c|\|\lambda_n\| \\ &= |c|(\|\lambda_1\| + \|\lambda_2\| + \cdots + \|\lambda_n\|) \\ &= |c|\|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\| \end{aligned}$$

elde edilir.
(AN4) $\overline{\lambda_1', \lambda_n'} \in X$ olsun.

$$\begin{aligned} \|\lambda_1 + \lambda_1', \lambda_2 + \lambda_2', \ldots, \lambda_n + \lambda_n'\| &= \|\lambda_1 + \lambda_1'\| + \|\lambda_2 + \lambda_2'\| + \cdots + \|\lambda_n + \lambda_n'\| \\ &\leq \|\lambda_1\| + \|\lambda_1'\| + \|\lambda_2\| + \|\lambda_2'\| + \cdots + \|\lambda_n\| + \|\lambda_n'\| \\ &= (\|0\| + \|0\| + \cdots + \|\lambda_1\| + \|\lambda_n'\|) + \cdots + (\|0\| + \|0\| + \cdots + \|\lambda_n\| + \|\lambda_1'\|) \\ &= \|0,0, \ldots, \lambda_1, \lambda_n'\| + \cdots + \|0,0, \ldots, \lambda_n, \lambda_1'\| \end{aligned}$$

Sonuç olarak $\|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\| = \|\lambda_1\| + \|\lambda_2\| + \cdots + \|\lambda_n\|$ fonksiyonu A −normlu uzay olmanın tüm koşullarını sağlar ve $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ bir A −normlu uzaydır.

Örnek 2.11. Örnek 2.2'de tanımlanan A −norm alışılmış norm tarafından üretilmiştir.

III. SONUÇ

Bu makalenin amacı yeni bir genelleştirilmiş norm yapısı olarak A −normlu uzayı tanıtmaktır. Bu genelleştirilmenin yapılabilmesi için A −metrik uzayın özelliklerinden faydalanıldı. Daha sonra bu iki uzay arasındaki ilişki irdelendi ve her A −normlu uzayın bir A −metrik ürettiği fakat tersinin doğru olmadığı gösterildi. Normlu uzaylar ile genelleştirilmiş norm yapısı olan A −normlu uzay arasındaki ilişki tek taraflı incelendi. Her normlu uzayın bir A −norm ürettiği gösterildi. "Herhangi bir norm tarafından üretilemeyen A −norm var mıdır?" sorusunun cevabı açık problem olarak ilgilenenlere bırakıldı.

IV. KAYNAKLAR

[1] Fréchet,M. M., "Sur quelques points du calcul fonctionnel," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940),* vol. 22, no. 1, pp. 1-72, 1906.

[2] S. Gähler, "2Metriche raume und ihre topologische strukture,"*Math. Nachr*. vol. 26, pp. 115–148, 1963.

[3] K. S. Ha, Y. J. Cho and A. White, "Strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces," *Math. Jpn.*, vol. 33, no. 3, pp. 375–384, 1988.

[4] B. C. Dhage, "Generalized metric spaces and mapping with fixed point,"*Bull. Cal.Math. Soc.*,vol. 84, pp. 329–336, 1992.

[5] Z. Mustafa and B. Sims, "Some remarks concerning metric spaces," in*International Conferences on Fixed Point Theory and Application,*Valencia, Spain, 2003, pp. 189-198.

[6] Z. Mustafa, and B. Sims, "A new approach to generalized metric spaces,"*Journal of Nonlinear and Convex Anal*ysis, vol. 7, no.2, pp. 289-297, 2006.

[7] S. Sedghi,N. Shobeand A. Aliouche, "A generalization of fixed point theorem in metric spaces,"*Matematicki Vesnik*, vol. 64, no. 3, pp. 258-266, 2012.

[8] M. Abbas, B. Ali and Y. I. Suleiman, "Generalized coupled common fixed point results in partially ordered A-metric spaces," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. *2015*, no. 1, pp. 1-24, 2015.

[9] S. Gähler, "Lineare 2-normierte räume,"*Math. Nachr*. vol. 28,pp. 1–43, 1964.

[10] K. A. Khan, "Generalized normed spaces and fixed point theorems," *Journal of Mathematics and Computer Science,* vol. 13, pp. 157-167, 2014.

[11] A. Mutlu, U. Gürdal and K. Özkan, "A New Approach to $G-$Normed Spaces: Functionally Generalized Normed Spaces," *Celal Bayar University Journal of Science,* vol. 14, pp. 1-12, 2018.

[12] N. Taş and N. Özgür, "A New Generalization of Rhoades' Condition,"2021, *arXiv:2105.13129*.

[13] G. Zaim Erçınar, "Sabit Noktaların Bazı Geometrik Özellikleri," Ph.D. dissertation, Dept. Mathematics, Osmangazi Üniversitesi,Eskişehir, Türkiye, 2020.