DOĞRUSAL PARABOLİK DENKLEM İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN UZUN ZAMAN DAVRANIŞI

Metin Yaman

Özet- **Bu çalışmada doğrusal parabolik denklem için ters problemin çözümünün uzun zaman davranışı araştırılmıştır. Problemin ek şartı integral formunda verilmiştir.**

Anahtar Kelimeler- Ters problem, parabolik denklem, integral ek şartı, uzun zaman davranışı.

Abstract- **In this paper, it is investigated long time behaviour of the solution to inverse problem for parabolic equation. Additional condition is given in form of integral overdetermination.**

Keywords- inverse problem, parabolic equation, integral overdetermination, long time behaviour.

I. GİRİŞ

Parabolik denklemler için ters problemlerin çözümünün varlık ve teklik ispatları daha önce çeşitli araştırmacılar tarafından çalışılmıştır[1],[3]. Fakat bu ters problemlerin çözümünün uzun zaman davranışları ve çözümlerin asimptotik kararlı olup olmadıkları pek çalışılan bir konu değildir. Ters problemler, Hadamard anlamında iyi konulmamış (ill-posed) problemler sınıfından olup matematiksel fizik içerisinde büyük öneme sahiptir[4].

II. PROBLEMİN İFADESİ

Ω bölgesi, sınırı yeterince düzgün olan IR^n de sınırlı bir bölgeyi göstermek üzere aşağıda verilen başlangıç sınır değer problemini düşünelim.

$$u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=f(t)g(x,t),\ x\in\Omega, t>0 \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega \tag{2}$$

$$u(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega, t>0 \tag{3}$$

M.Yaman;Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümü,
myaman@sakarya.edu.tr

$$(u(t),w)=\varphi(t),\ \forall t>0 \tag{4}$$

(4) şartı, ters problemin ek şartıdır ve integral formunda verilmiştir. Fiziksel olarak anlamı o bölgedeki sıcaklığın verilen bir fonksiyon yardımıyla ölçülmesidir. (1)-(4) probleminin çözümünün varlık ve tekliği daha önce çalışılmıştır [1].

Burada u_0, g, w, φ fonksiyonları verilen fonksiyonlardır ve aşağıdaki şartları sağlarlar.

$$u_0, w\in H_0^1(\Omega),\ \|g(t)\|\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$$
$$\|g(t)\|\le K_g,\ |(g(t),w)|\ge g_0>0,\ \forall t>0. \tag{5}$$

$(u,v)=\int\limits_\Omega uvdx$, $\|u\|=(u,u)^{1/2}$. Ayrıca

$$\gamma=\frac{1}{2}-\frac{K_g}{g_0}\|\nabla w\|\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{K_g}{2g_0}\|\nabla w\|\right) \tag{6}$$

varsayılsın. λ_1 değeri,

$$-\Delta\phi(x)=\lambda\phi(x), x\in\Omega$$
$$\phi(x)=0,\ x\in\partial\Omega \tag{7}$$

özdeğer probleminin 1. özdeğeridir.

Tanım 1: Eğer $u\in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $f\in L_2(0,T)$ ise ve

$$(u_t(t),\psi)+(\nabla u(t),\nabla\psi)=f(t)(g(t),\psi),\ \forall\psi\in H_0^1(\Omega)$$

özdeşliği sağlanırsa $\{u(x,t),f(t)\}$ fonksiyon çiftine (1)-(4) probleminin zayıf çözümüdür denir.

Şimdi (1) denklemi w ile çarpılıp bölgesinde integrali alınırsa, ve (4) dikkate alınırsa

$$f(t)=\frac{1}{(g(t),w)}\{\varphi_t+(\nabla u(t),\nabla w)\} \tag{8}$$

eşitliği elde edilir.

III. KESTİRİMLER ve SONUÇLAR

Theorem 1: (5)-(6) şartları sağlansın. Eğer

$$\lim_{k\to\infty}\int_k^{k+1}\|\varphi_t(t)\|^2\,dt=0 \tag{9}$$

ise aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

$$\lim_{t\to\infty}\|\nabla u(t)\|=0\ ,\quad \lim_{k\to\infty}\int_k^{k+1}|f(t)|^2\,dt=0$$

İspat: (1) denklemini u ile çarpıp Ω bölgesine göre integrali alınırsa

$$(u_t,u)+(\nabla u,\nabla u)=f(t)(g,u) \tag{10}$$

bulunur. (10), (3) ve (8) eşitliklerinden

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2=\frac{(g,u)}{(g,w)}\{\varphi_t+(\nabla u,\nabla w)\} \tag{11}$$

eşitliği yazılır. (11), (5), (7) ve Cauchy eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2\le\frac{K_g}{g_0\lambda_1}\|\nabla u(t)\|\{|\varphi_t|+\|\nabla w\|\|\nabla u(t)\|\}$$

eşitsizliği elde edilir. Üstteki ifadede

$$2|ab|\le a^2+b^2\ ,\ a,b\in R^1 \tag{12}$$

Aritmetik-Geometrik eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{K_g}{g_0\lambda_1}\|\nabla w\|\right)\|\nabla u(t)\|^2\le\frac{1}{2}\left(\frac{K_g}{g_0\lambda_1}\right)^2|\varphi_t|^2 \tag{13}$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi de (1) denklemini u_t ile çarpıp Ω bölgesine göre integrali alınırsa

$$(u_t,u_t)+(\nabla u,\nabla u_t)=f(t)(g,u_t) \tag{14}$$

eşitliği yazılır. (14) ve (8) ifadelerinden

$$\|u_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2=\frac{(g,u_t)}{(g,w)}\{\varphi_t+(\nabla u,\nabla w)\} \tag{15}$$

elde edilir. (15) eşitliğinde Cauchy eşitsizliği ve (kullanılırsa

$$\|u_t(t)\|^2+\frac{d}{2dt}\|\nabla u(t)\|^2\le\frac{K_g}{g_0}\|u_t(t)\|\{|\varphi_t|+\|\nabla w\|\|\nabla u(t)\|\} \tag{16}$$

eşitsizliği bulunur. (16) ve (12) den

$$\frac{d}{2dt}\|\nabla u(t)\|^2\le\frac{1}{2}\left(\frac{K_g}{g_0}\right)^2|\varphi_t|^2+\frac{1}{2}\left(\frac{K_g}{g_0}\right)^2\|\nabla w\|^2\|\nabla u(t)\|^2 \tag{17}$$

yazılır. (13) ve (17) eşitsizlikleri toplanırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2\right)+\gamma\|\nabla u(t)\|^2\le M|\varphi_t|^2 \tag{18}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\gamma=\frac{1}{2}-\frac{K_g}{g_0}\|\nabla w\|\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{K_g}{2g_0}\|\nabla w\|\right)$$

$$M=\frac{1}{2}\left(\frac{K_g}{g_0}\right)^2\left(1+\frac{1}{\lambda_1^2}\right)$$

pozitif sabittir. (18) ve (7) den

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2\right)+\frac{\gamma}{\lambda_1^2}\|u(t)\|^2\le M|\varphi_t|^2 \tag{19}$$

bulunur. (18) ve (19) eşitsizliklerinden

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2\right)+\beta\left(\|u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2\right)\le M|\varphi_t|^2 \tag{20}$$

eşitsizliği elde edilir. $\beta=\min\left\{\gamma,\frac{\gamma}{\lambda^2}\right\}>0.$

$E(t)=\|u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2$ gösterimi ile (20) ifadesi

$$\frac{d}{dt}E(t)+\beta E(t)\le\delta(t) \tag{21}$$

şeklinde yazılır. $\delta(t)=M|\varphi_t(t)|^2$

Şimdi kestirim için kullanılan Lemmayı ifade edelim.

Lemma 1: η fonksiyonu,

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+T}\eta(\tau)d\tau > 0,\ \limsup_{t\to\infty}\int_t^{t+T}\eta^-(\tau)d\tau < \infty$$

şartlarını bazı $0 < T < \infty$ için sağlayan , (0,) arasında integrallenebilen reel değerli bir fonksiyon olsun. Burada

$$\eta^- = \max\{-\eta, 0\}.$$

μ fonksiyonu , $\mu^+ = \max\{\mu, 0\}$ olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{t+T}\mu^+(\tau)d\tau = 0$$

olacak biçimde, (0,) aralığında integrallenebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuç geçerlidir.

$$\frac{d}{dt}\zeta + \eta\zeta \le \mu\ ,\ \zeta(t)\xrightarrow{t\to\infty}0.$$

Şimdi bu lemmayı (21) için kullanırsak

$$\lim_{t\to\infty}\|\nabla u(t)\| = 0 \tag{22}$$

sonucu elde edilir. (8) eşitliğinden

$$|f(t)| \le \frac{1}{g_0}\left\{|\varphi_t| + \|\nabla w\|\|\nabla u(t)\|\right\} \tag{23}$$

eşitsizliği yazılır. (22) de her tarafın karesi alınıp (k,k+1] aralığında t ye göre integrali alınırsa

$$\int_k^{k+1}|f(t)|^2 dt \le \frac{2}{g_0^2}\left\{\int_k^{k+1}|\varphi_t|^2 dt + \|\nabla w\|^2\int_k^{k+1}\|\nabla u(t)\|^2 dt\right\} \tag{24}$$

kestirimi bulunur. (24), (9) ve (22) den

$$\lim_{k\to\infty}\int_k^{k+1}|f(t)|^2 dt = 0$$

sonucu elde edilir.

Sonuç olarak, (1)-(4) ters probleminin $\{u, f\}$ çözümleri H^1 normunda asimptotik kararlıdır. Yani çözümler belli koşullar altında $t \to \infty$ için sıfıra yakınsamaktadırlar.

IV. KAYNAKLAR

[1] A.I.Prilepko, D.G.Orlovsky, I.A.Vasin, "Methods for solving inverse problems in mathematical physics", Marcel Dekker, Inc., 1999.

[2] V.L.Kamynin, I.A.Vasin, "Asymptotic behaviour of the solutions of inverse problems for parabolic equations with irregular coefficients", Sobornik Math., 188, 371-387, 1997

[3] M.Yaman, "Parabolik denklemler için ters problemin çözümünün asimptotik davranışı", Doktora tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2002.

[4] I.A.Vasin, V.L.Kamynin, "On the asymtotic behavior of solutions of inverse problems for parabolic equations", Siberian Math. Journal, 38, 647-662, 1997.

[5]V.L.Kamynin, "On the unique solvability of an inverse problem for parabolic equations under a final overdetermination condition", Math. Notes, vol.73, no.2, 202-211, 2003.