POLAR UZAYLAR

Yılmaz Sarvan, Murat Güzlek, İbrahim Özgür

Özet **– Bu çalışma polar uzaylar hakkında bilinen çalışmaların bir derlemesidir. Özellikle polar uzay, polar uzayların direkt toplamı, absolute noktalar, isotropik, klik, genelleşmiş projektif düzlem ve homojen koordinat tanımları verildi. Polar uzay ve polar uzayların direkt toplamlarından bahsedilerek absolute ve absolute olmayan noktaların sayısı ile ilgili kobinatoriyel özellikler incelendi. Bir doğru ile bir kuadrik arasındaki ilişkiler incelenerek buna homojen koordinatlarda örnek verildi. Ayrıca polar uzay ve genelleşmiş projektif alt uzaylar arasındaki ilişkiye değinildi.**

Anahtar Kelimeler – Polar Uzay, Polar uzayların Direkt Toplamı, Dejenere Polar Uzay, Polarite, İndirgenemezlik.

Abstract **- In this paper, the known properties on polar spaces, the definitions of direct sum of polar spaces, absolute point, isotropic, clic, generelited projective plane and homogen coordinate has been given. We study combinatoric properties related to absolute and non absolute points. The relations between the line and the quadric have been invertigated and we give the examples in homogen coordinates. Further, we noted that polar spaces related to generalited projective subspaces.**

I.GİRİŞ

Bu çalışmada M. Lynn Batten'in "Combinatorics of Finite Geometries" kitabı esas alınmıştır. Dezargsel projektif uzayındaki bir polaritenin non dejenere absolute noktalarının kümesi, bir cisim üzerindeki projektif uzayda non dejenere kuadriklerle bir ç özellikler gösterir. Bütün bu sistemleri içine alan b yapının var olabileceğini Veldkamp ortaya çıkaran i kimsedir. Tits ise bu sistemi geliştirmiştir. Polar uzayl teorisi dezargsel projektif uzaylarda non dejene polaritelerinin absolute noktalarının kümesi ve cisiml üzerindeki projektif uzaylardaki non dejener kuadriklerle ilgili olarak ortaya çıkmıştır. Kullanıla "nokta" ve "doğru" kavramları sonlu sayıdadır. Ayı doğru üzerinde bulunan noktalara doğrudaş noktala aynı noktadan geçen doğrulara noktadaş doğrular olara adlandırıyoruz. Uzay ise verilen aksiyomatik yapını özelliklerini taşıyacağından konuya göre değişiklikle gösterir. Uzaylar nokta, doğru, düzlem ve birbirine gör durumları esas alınarak kurulur. Yaklaşık linee uzaylarda bazı noktaların doğruların üzerinde olmas şartı aranmazken iki noktadan en çok bir doğru geçe ifadesi de kullanılmıştır. Tek başına bir nokta doğr belirtmez. Uzaylarda çeşitli kural koyarak yeni uzayla elde edilir. Bu kurallara göre elde edilen uzayla aksiyomlarla tutarlılık göstermelidir.

Y. Sarvan, Doğantepe Pansiyonlu İlköğretim Okulu, Matematik Öğretmeni, Adapazarı,
M. Güzlek, Körfez Anadolu Teknik, Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi, Matematik Öğretmeni, Kocaeli,
İ. Özgür SA.Ü Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Adapazarı

II.TEMEL KAVRAMLAR

P={$p_1,p_2,p_3,\ldots,p_i$} noktalar kümesi ve L={$l_1,l_2,l_3,\ldots,l_i$} doğrular kümesi olsun. S=(P , L) ikilisine geometrik yapı denir. Verilen aksiyom sisteminin tümünü sağlayan bir geometrik yapı bulunabilirse bu aksiyom sistemine tutarlı aksi halde tutarsızdır denir.

(x,y) öklit noktalarının homojen koordinatları; $x=x_1\backslash x_3$ ve $y=x_2\backslash x_3$ olmak üzere x_1, x_2, x_3 sıralı sayı üçlü olup (x_1,x_2,x_3) biçiminde yazılır.[3]

S=(P , L) uzayı aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa uzaya kısmi düzlem veya yaklaşık lineer uzay denir.
YL1) Bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.
YL2) Farklı iki noktayı birleştiren en çok bir doğru vardır.

Yaklaşık lineer uzayda boyut kavramını verebilmek için noktalar kümesinin örtüsünün tanımına ihtiyaç vardır.

S=(P,L) bir yaklaşık lineer uzay, $X \subseteq P$ olsun. Noktalar kümesini kapsayan en küçük yaklaşık lineer uzaya X in örtüsü denir. <X>, X in örtüsü şeklinde gösterilir. X in örtüsü; X i kapsayan tüm yaklaşık lineer uzayların arakesitidir.

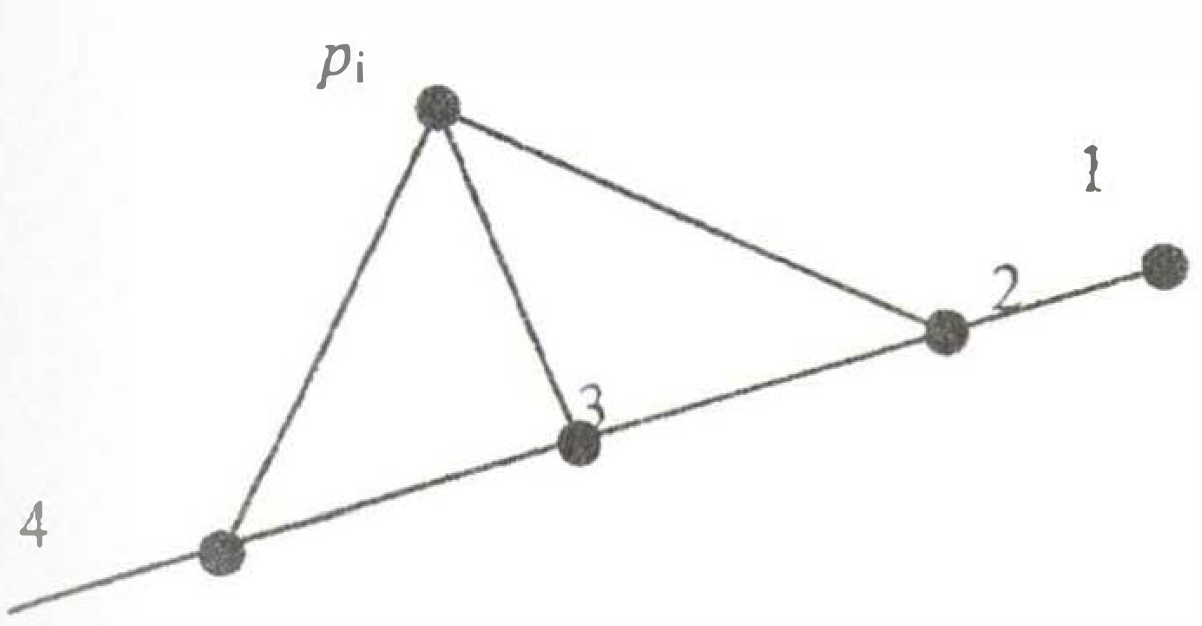
S=(P,L) nin bir bazı, örtüsü S olan bağımsız bir nokta kümesidir.

En az sayıdaki bazının eleman sayısının bir eksiğine uzayın boyutu denir.

boy S=min{ B : B, S için bir bazdır.}-1

şeklinde ifade edilir.

S=(P,L) bir yaklaşık lineer uzay için, $p_i \in P$, $l_j \in L$ ve $p_i ø l_j$ olsun (p_i noktası l_j doğrusunun üzerinde olmasın), l_j doğrusundaki p_i noktası ile doğrudaş olan noktaların sayısına bağ sayısı denir. Bağ sayısı c_{ij} ile gösterilir. $c_{ij} \leq v_j$ dir (v_j, l_j doğrusu üzerindeki toplam nokta sayısı). Eğer p noktası doğru üzerinde ise bağ sayısı 1 olarak alınır.



Şekil 2.1

Şekil 1.2 de ki p_i noktası ile l_j doğrusu arasındaki bağ sayısı $c_{ij}=c(p_i, l_j)=3$ dür.

S=(P,L), S'=(P',L') herhangi iki yaklaşık lineer uzay için, f: P P' ve her $l \in L$ için $f(l) \in L'$ özeliğinde ise f ye S den S' ye lineer fonksiyon denir. Bu fonksiyon kendi üzerine ise otomorfizm veya kolinasyon denir.

Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa S=(P,L) uzayı lineer uzaydır.

L1) Bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

L2) Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.[1]

Lineer uzaylarda bağ sayısı doğru üzerindeki nokta sayısı kadardır. Ve doğruların dışında kalan noktalar olmayacaktır (L2 aksiyomuna göre).

Bir S lineer uzayı için , S nin maximal bir proper alt uzayına bir hiperdüzlem denir. V; S nin bir hiper düzlemi ise $V \subset S$ dir ancak V ve S arasında başka alt uzay yok ise. Buradan R^4 de R^3 hiperdüzlemdir. R^3 de R^2 hiperdüzlemdir. R^2 de R hiperdüzlemdir. R de her bir nokta hiperdüzlemdir ve noktada nokta hiperdüzlemdir. $\emptyset$ nin hiperdüzlemi de $\emptyset$ dir.

Aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan lineer uzaya projektif düzlem denir:

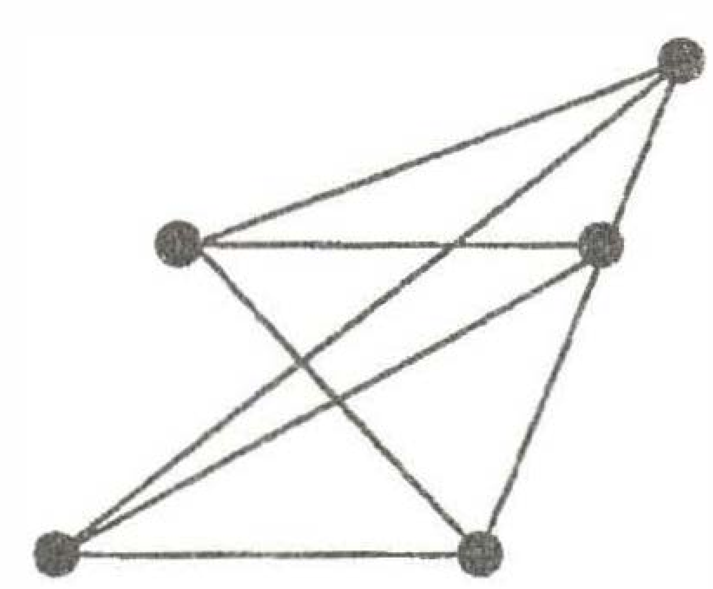
PD1) Farklı iki doğru kesişir.

PD2) Uzayda en az bir dörtgen vardır.

**

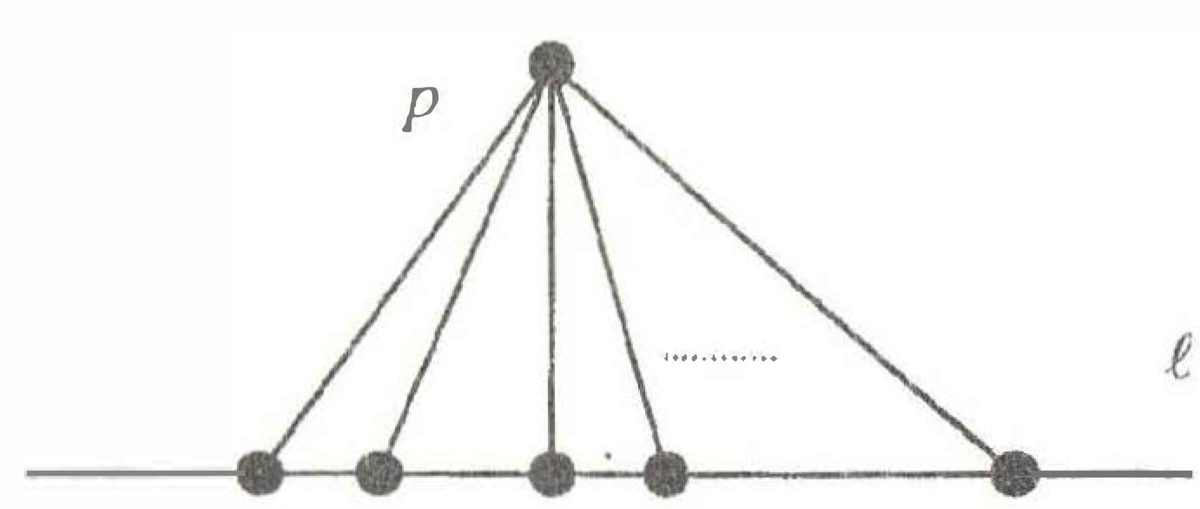
Buradan bir projektif düzlemin hiperdüzlemlerinin kesinlikle doğrular olduğu kolayca görülmektedir. [1]

$P=\{p_1,p_2,p_3,...,p_i\}$ noktalar kümesi ve $L=\{l_1,l_2,l_3,...,l_i\}$ doğrular kümesi olsun. $\forall p \in P$ ve $\forall l \in L$ olmak üzere p den l ye bağ sayısı $c(p,l)$ ve l üzerindeki noktaların sayısı $v(l)$ ile gösterilsin. $\forall p \in P$ ve $\forall l \in L$ için S=(P, L) yaklaşık lineer uzayında $c(p,l)=1$ veya $c(p,l)=v(l)$ ise S ye bir polar uzay denir.



Şekil 2.2 (a) Şekil 2.2 (b)

Dolayısıyla lineer uzaylar dejenere polar uzaylardır.



Şekil 2.3

S polar uzayının bir noktası diğer tüm noktalara doğrudaş ise uzaya dejenere polar uzay (Şekil 1.3.b) diğer durumda dejenere olmayan polar uzay denir.

S nin bazı p noktaları için, p den geçmeyen tüm $l_1, l_2, l_3,...$ doğruları için $c(p,l_i)=v(l_i)$ ise bu S=(P,L) uzayına dejenere polar uzay denir. Diğer durumdaki polar uzaylara non dejenere polar uzay denir. Şekil 2.2 (a) dejenere ve şekil 2.2 (b) non dejeneredir.

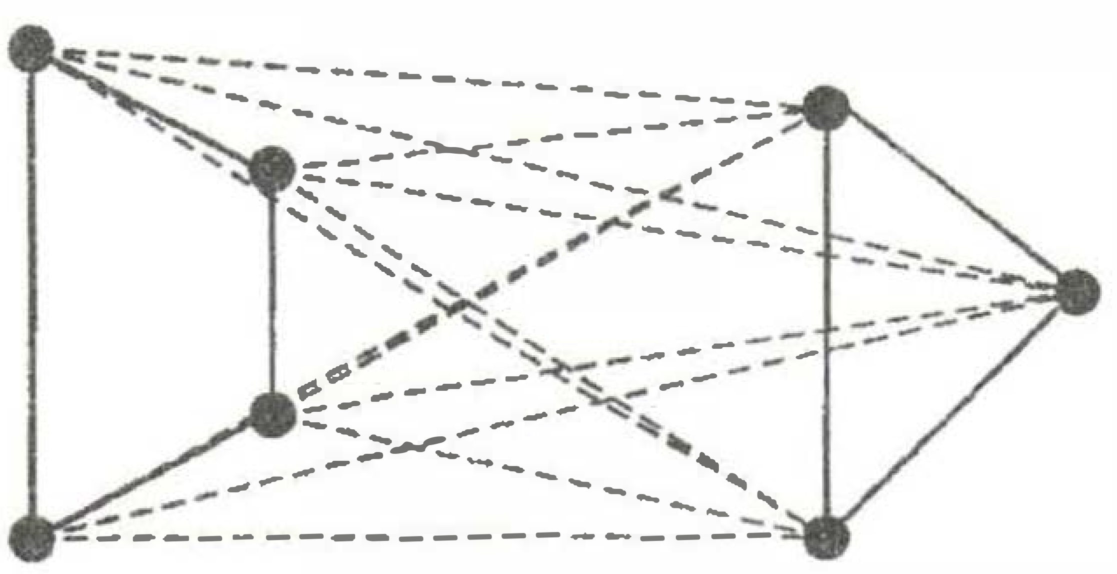
$\{S_i\}_{i \in I}$; ikişer ikişer ayrık olarak polar uzayların kümesi olsun.

$L' = \{(p,q): p \in S_i,\ q \in S_j,\ i\ j\} \cup \{\{S_i\}_{i\in I}$ nin doğrular kümesi$\}$

$P' = \{S_i\}_{i\in I}$ nın tüm noktalar kümesi olsun.

$S' = (P', L')$ olmak üzere;

$S' = \oplus S_i$ ifadesine $i \in I$ için S_i lerin direkt toplamı denir.



Şekil 1.5.

S nin direkt toplamının yaklaşık lineer uzay olduğu kolaylıkla görülebilir. p herhangi bir nokta ve $p \in l$ için l de S nin herhangi bir doğrusu olsun. Eğer p ve l aynı S_i de ise o zaman $c(p,l)=1$ ya da $c(p,l)=v(l)$ olduğu aşikardır. Eğer $p \in S_i$, $l \in S_j$ ve i j için $c(p,l)=v(l)$ dir. Eğer $p \in S_i$ ve l yeni bir 2 noktalı doğru ise en azından l nin bir noktasına birleştirilmiştir. Polar uzaylarının bazı i ler $(i \in I)$ için $\{S_i\}$ ailesinin direkt toplamı yine bir polar uzay olduğu görülür.

S polar uzay olsun. $S' \subset S$ alt uzay olsun. S' bir yaklaşık lineer uzay olsun. Alt uzay olduğundan S' nün kapsadığı her doğrunun S ye ait, S' tüm noktaları S ye aittir. Gösterelim ki S' bir polar uzaydır. S polar uzay olduğundan $c(p,l)=1$ veya $c(p,l)=v(l)$ dir. Buna göre S' polar uzaydır. Bu ise bir polar uzayının her alt uzayının da bir polar uzay olduğunu gösterir.

Yukarıdaki iki ifadeden yararlanarak M, $S = \oplus S_i$ polar uzayının maxsimal alt uzayı ise, $M_i = M \quad S_i$ tüm i ler için S_i de maximal olduğunu gösterebiliriz. M_j nin bazı j ler için S_j de maximal olmadığını kabul edelim. O zaman $M_j \not\subset \overline{M}_j \not\subset S_j$ dir. $M = \oplus M_j$ için $M_j = M \quad S_j$ olduğundan aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

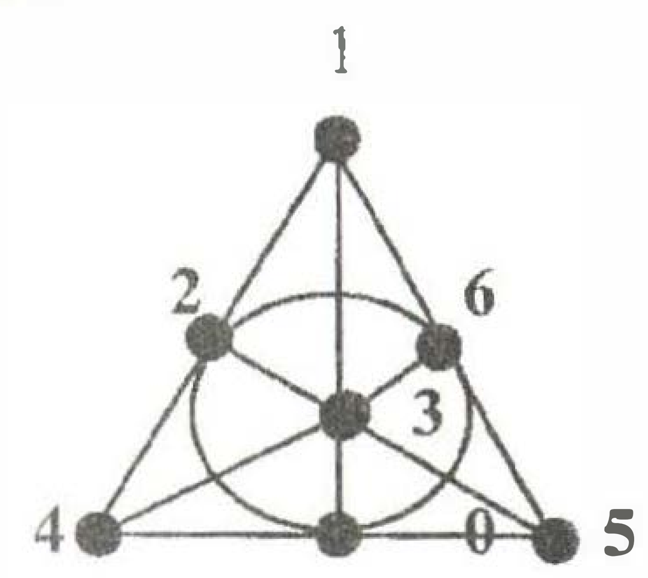
$$M = \oplus M_i \not\subset \underset{i\neq j}{\oplus}\left(M_i \oplus \overline{M}_j\right) \not\subset \oplus S_i = S$$

Bu ifade M nin maximal olmasıyla çelişir. Buradan M_j nin, S_j de maxsimal olduğu kolaylıkla görülür.

III.ABSOLUTE NOKTALAR

Bu bölümde polaritenin tanımı yapılarak absolute nokta ve absolute doğrular hakkında bilgiler verilerek kombnatoriyel özellikleri incelenecektir. Sonlu d-boyutlu S projektif uzayında bir σ korelasyonu, S nin alt uzayları kümesinde kendi üzerine bir 1-1 dönüşümüdür. Öyle ki bu dönüşüm bütün R ve T alt uzayları için, $R \subseteq T$ ise, $\sigma(R) \supseteq \sigma(T)$ ve boy$\sigma(R)$=d−1−boy R dir. Böylece bir korelasyon kapsamayı tersine çevirir ve boy$\sigma(R)$ nin S ye uzaklığı ile R nin $\varnothing$ ye uzaklığı aynı kalır. İkinci mertebeden bir korelasyon, yani $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = 1$ i sağlayan, özdeşlik dönüşümüne bir polarite denir. Eğer σ bir polarite ise $R \subseteq \sigma(T)$ ise $\sigma(R) \supseteq T$ dir. Özel olarak p, q noktaları için $p \in \sigma(q)$ olması $q \in \sigma(p)$ olmasını gerektirir. $\sigma(p)$ ve $\sigma(q)$ S nin hiper düzlemler olduğu anlamına gelir.

σ polaritesinin bir σ alt uzayı R nin bir alt uzayı olsun. $R \subseteq \sigma(R)$ veya $\sigma(R) \supseteq R$ ise R ye absolutetur denir. Buradan R absolute ise $\sigma(R)$ de absolutetur ve tersine $\sigma(R)$ absolute ise R de absolutetur.



Şekil 3.1.

σ polaritesini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

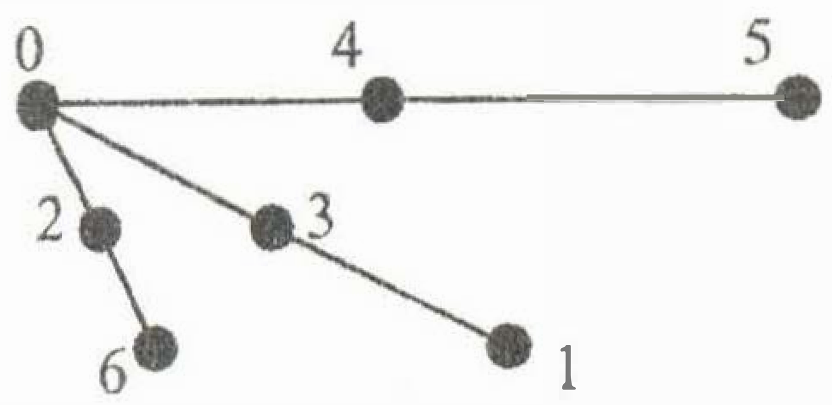
$\sigma : S \dashrightarrow S$

0	045
1	235
2	124
3	156
4	026
5	013
6	346

Absolute(Mutlak) noktaların 0,2 ve 6 olduğunu görmek çok basittir.

$\sigma(0)=045 \Rightarrow 0 \in 045$	absolute
$\sigma(1)=235 \Rightarrow 1 \notin 235$	absolute değil
$\sigma(2)=124 \Rightarrow 2 \in 124$	absolute
$\sigma(3)=156 \Rightarrow 3 \notin 156$	absolute değil
$\sigma(4)=026 \Rightarrow 4 \notin 026$	absolute değil
$\sigma(5)=013 \Rightarrow 5 \notin 013$	absolute değil
$\sigma(6)=346 \Rightarrow 6 \in 346$	absolute

045, 124, 346} absolute doğrular, 0,2,6} absolute noktalar. Doğruları noktalara, noktaları doğrulara dönüştüren bu σ polaritesi doğrudaş noktaları noktadaş doğrulara dönüştürür.



Şekil 3.2.

Sonlu mertebeden projektif düzlemin σ polaritesinin her absolute doğrusu kesinlikle bir absolute nokta ihtiva eder. Dual olarak her absolute nokta bir absolute doğru üzerindedir. σ, bir polarite l, bir absolute doğru olsun. Böylece $\sigma(l)$ noktası absolutedır. l nin iki ya da daha fazla absolute nokta ihtiva ettiğini kabul edelim. Böylece $p,q\in l$, $\sigma(l)\in\sigma(p)$ ve $\sigma(l)\in(q)$ olur. Ayrıca $p\in\sigma(p)$ ve $q\in\sigma(q)$ dur. Böylece $\sigma(p)$, l nin üstünde her ikisini de ihtiva eder. Burada $\sigma(l)$ noktası p ve q olmadığından $\sigma(p)=\sigma(p)=l$ elde ederiz. 1-1 oluğundan $p=q$ bir çelişki elde edildi.

Sonlu bir projektif düzlemin bir polaritesi daima absolute olmayan noktalara sahiptir.

Yardımcı Teorem 3.1. Sonlu mertebeden bir projektif düzlemde her absolute olmayan doğru, çift sayıda absolute olmayan nokta kapsar.

Sonuç 3.2. Bir projektif düzlemin k mertebesi çiftse her doğru tek sayıda absolute nokta kapsar. l absolute olsun. Bu takdirde üzerinde tek absolute nokta vardır. Doğru absolute değilse; bu takdirde absolute olmayan nokta sayısı çifttir.

Bir projektif düzlemin k mertebesi çiftse her doğru tek sayıda absolute nokta kapsar. Absolute bir doğrunun kesinlikle bir absolute noktası olduğunu belirtmiştik. Diğer taraftan eğer l absolute olmayan doğrusu ve kesin olarak bir absolute noktası varsa yardımcı teorem 2.1. le çelişkiye düşer.

Teorem 3.3. t, k. mertebeden projektif Π düzlemi üzerindeki σ polaritelerinin toplam absolute noktalar sayısı olsun. O zaman t k+1(mod 2) ve eğer p herhangi bir tek asal sayı ve $i\in Z^+$ olmak üzere;

$$(t-k-1)k^{(p^i-1)/2}\left(k^{(p-1)p^i/2}-1\right)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p^{i+1})$$

dır. 2. denklik, t için verilen bir k ya göre mümkün olan değerlerin sayısında büyük bir kısıtlama getirir.

S, d-boyutlu bir projektif uzay olsun. S nin alt uzayı R tamamen isotropiktir denir; Eğer $R\neq\emptyset$ için, $\sigma(R)$ R = R ise.Eğer $R=\emptyset$ için $\sigma(R)$ R = R ise ,R alt uzayına isotropik olmayan denir. Eğer d=3 ise o zaman toplam isotropik doğrular l için $\sigma(l)=l$ olan doğrudur. Biz burada tamamen isotropik doğrularla ilgileneceğiz.

σ polaritesine sahip d-boyutlu (sonlu) bir projektif uzayda bir doğru sadece ve sadece, l üzerindeki herhangi bir p için tüm l üzerindeki q lar için, $p\in\sigma(q)$ isotropiktir.

Yardımcı Teorem 3.4. σ polaritesine sahip d-boyutlu (sonlu) bir projektif uzayda bir doğru sadece ve sadece, l üzerindeki herhangi bir p için tüm l üzerindeki q lar için, $p\in\sigma(q)$ isotropiktir. l doğrusunun tamamen isotropik olduğunu farz edelim. q da l nin herhangi bir noktası olsun. (Bu $q=p$ halini ihtiva eder) O zaman $q\in l$, $\sigma(l)\subseteq\sigma(q)$ tamamen isotropik olarak verdiği zaman $l\subseteq\sigma(l)$ yi belirtir. Böylece $p\in l\subseteq\sigma(q)$ olur. l doğrusunun tamamen isotropik olduğunu farz edelim. q da l nin herhangi bir noktası olsun. (Bu $q=p$ halini ihtiva eder) O zaman $q\in l$, $\sigma(l)\subseteq\sigma(q)$ tamamen isotropik olarak verdiği zaman $l\subseteq\sigma(l)$ yi belirtir. Böylece $p\in l\subseteq\sigma(q)$ olur.

Şimdi l üzerindeki tüm p ve q lar için $p\in\sigma(q)$ olduğunu var sayalım. O halde tüm $q\in l$ için $l\subseteq\sigma(q)$ olur. Böylece tüm $q\in l$ için $q\in\sigma(l)$ olur. Bu da, $l\subseteq\sigma(l)$ dir. Sonuç olarak l tamamen isotropiktir

Teorem 3.5. S, σ polariteli sonlu –boyutlu projektif bir uzay olsun. O halde σ nın absolute noktalarının cümlesi, σ formlu bir polar uzayın tamamen izotropik doğruları ile ekipmanlanır.
l tamamen isotropik bir doğru olsun, p de l üzerinde olmayan bir mutlak nokta olsun. x, l de herhangi bir nokta olsun. Böyle olunca xp doğrusu sadece ve sadece yardımcı teorem 3.7. ye göre $x\in\sigma(p)$ olduğunda tamamen isotropiktir. $\sigma(p)$ bir hiper düzlemdir ve l ile tek bir nokta olarak çakışmalı ya da l de kendisiyle çakışmalıdır. Sonuç olarak p, l nin bir noktasına ya da hepsine komşudur.

Örnek 3.1. S, F kompleks sayılarının üstünde üç boyutlu projektif uzay olsun.

$\sigma : p=[p_0,p_1,p_2,p_3] \quad \sum_{i=0}^{3} p_i x_i = 0$

O zaman $\sum_{i=0}^{3} p_i^2 = 0$

olduğunda p tamamen $\sigma(p)$ nin içindedir. Eğer $p\in\sigma(p)$ ve $q\in\sigma(p)$, $p\neq q$ ise pq nun herhangi $a=[a_0,a_1,a_2,a_3]$ noktası $a=\lambda p+\mu q$ dur.($\lambda, \mu\in F$)

Fakat $\sum_{i=0}^{3} a_i x_i = \lambda.\sum_{i=0}^{3} p_i x_i + \mu.\sum_{i=0}^{3} q_i x_i = 0$, $a\in\sigma(a)$ açıklar. Buradan böyle bir doğrunun her bir noktası absolute olur. Doğrularda bu durumda tamamen isotropiktir.

IV. KUADRİKLER

$k\in Z^+$, her k elemanlı bir cisim bulunmayabilir. Fakat $k=p^n$ (p asal) biçiminde ise bu durumda k elemanlı bir cisim kesinlikle vardır. p ye böyle bir cismin karakteristiği denir.

k üzerine inşa edilen sonlu d-boyutlu S, polar uzayını alalım. $p=[x_0,x_1,\ldots,x_d]$
$S(x,x)$ $a_{00}x_0^2+a_{01}x_0x_1+a_{02}x_0x_2+\ldots+a_{dd-1}x_dx_{d-1}+a_{dd}x_d^2=0$
biçimindeki denklemi sağlayan p noktasının geometrik yerine 2. dereceden hiperyüzeyler veya kuadrikler denir.[3]

$$\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} a_{ij}x_i x_j = 0, \quad \sum_{i,j=0}^{d} a_{ij}x_i x_j = 0,$$

$x_ix_j=x_jx_i$ olduğundan $a_{ij}+a_{ji}$ nin katsayıları bulmanın birkaç yolu vardır.

Eğer cismin karakteristikleri 2 olmasaydı, eşi olmayan simetrik matrise ihtiyaç duyardık. Bizim burada yapmaya çalıştığımız şey için bu çokta gerekli değildir.

Herhangi bir durumda eğer $x=[x_0,x_1,\ldots,x_d]$, $1x(d+1)$ matris ise (bir vektör)

$$x^t = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_d \end{bmatrix}$$

$A=(a_{ij})$, $A_{(d+1)x1}$ matris, x in değiştirilmiş halidir ve A kuadriğinin denkleminin katsayılarını temsil eden herhangi bir matristir. O zaman denklem $xAx^t=0$ olarak yazılabilir.

Şimdi bir doğrunun bir kuadrikle kesişme olasılıklarını inceleyelim. Q aşağıdaki denklemle ifade edilen bir kuadrik olsun.

$$\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} a_{ij}x_i x_j = 0$$

l de $p=[p_0,p_1,\ldots,p_d]$ ve $q=[q_0,q_1,\ldots,q_d]$ noktalarıyla ifade edilen bir doğru olsun. Böylelikle l doğrusu p ve q nun lineer kombinasyonları olan noktalar cümlesidir. Bu sebeple l nin herhangi bir noktası için $x=[x_0,x_1,\ldots,x_d]$ dır. Sahip olduğumuz $x_i=\lambda p_i+\mu q_i$ denklemleri için $\lambda, \mu\in F$ dir. Fakat her ikisi de sıfır değildir. Q ve l kesişmesi Q üzerinde de olan bu x noktalarının cümlesidir.

Bu sebeple aşağıdaki sağlanmalı:

$$\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} a_{ij}(\lambda p_i+\mu q_i)(\lambda p_j+\mu q_j) = 0 \text{ yada}$$

$$\lambda^2\left(\sum_i\sum_j a_{ij}p_ip_j\right)+\lambda\mu\left(\sum_i\sum_j (a_{ij}+a_{ji})p_iq_j\right)+\mu^2\left(\sum_i\sum_j a_{ij}q_iq_j\right)=0$$

(*)

Örnek 4.1. Q kuadriğine bakalım:

$$x_0^2+2x_1^2+3x_2^2=0$$

F=GF(5) cismi üzerindeki 2 boyutlu l doğrusu üzerinde $p=[1,0,1]$ ve $q=[1,2,0]$ dır. Q ve l nin kesişmesindeki herhangi bir x noktası

$$x=\lambda[1,0,1]+\mu[1,2,0]$$

ve ayrıca

$$4\lambda^2+2\lambda\mu+4\mu^2=0$$

sağlar. Eğer $\mu=0$ ise o zaman $\lambda=0$ dır. Böylece bunu şöyle tekrar yazabiliriz:

$$4(\lambda\mu^{-1})^2+2(\lambda\mu^{-1})+4=0$$

veya

$$2(\lambda\mu^{-1})^2+\lambda\mu^{-1}+2=0$$

olur. G F(5) te ki tek çözüm $\lambda=\mu$ dir. Bu yüzden de $x=[2,2,1]$ dir. Aslında bir doğruyla kuadriğin kesişmesindeki noktaların sayısını yazabiliriz.

Yardımcı Teorem 4.2. Q, F cisminde ve l doğrusu üzerindeki projektif d-uzayında **bir kuadrik** olsun. O zaman l Q =0,1,2 ya da l Q =v(l) olur.

İspat. l Q >2 iken $l\subseteq Q$ olduğunu göstermişti. Bunları p ve q (*) denklemini sağlayan noktalar olarak varsayabiliriz. Böyle alınca λ^2 ve μ^2 li terimler sıfırdır. Eğer $\lambda.\mu$ nün katsayıları sıfırsa λ ve μ nün tüm seçenekleri tatmin edicidir. Böylelikle l nin tüm noktaları Q içindedir. Eğer λ nın katsayıları sıfır değilse hem λ hem μ=0 dır. Sıfır olmayan değişken "1" olarak varsayılabilir. Buda p ve q nun tek çözümü olması ile çelişki elde edilir.

Öklid 3-uzayında,p noktasındaki tüm teğetleri alırsak buna tanjant düzlemi elde edilir:
Q_p: Q ya p den teğet olan doğrular cümlesi olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 4.3. Eğer Q matris $A=(a_{ij})$ de F cismi üzerindeki projektif d-uzayında bir kuadrikse ve $l=p=[p_0,p_1,\ldots,p_d]\in Q$ ise Q_p hiper düzlemdir, ya da bütün bir uzaydır, ve aşağıdaki denkleme sahiptir:

$$\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d}\left(\left(a_{ij}+a_{ji}\right)p_i\right)x_j=0$$

İspat: $q\neq p$, Q_p nin herhangi bir noktası olsun. Böylece qp doğrusu p den q ya doğru tanjanttır. (*) ni kullanarak $p\in Q$. $\sum_i\sum_j a_{ij}p_ip_j=0$ ı belirtir. μ=0, p çözümüne karşılaştıkça μ≠0 farz ederek (*) durumunda aşağıdaki denklemlere indirgenir. Bu aynı zamanda $\lambda\mu^{-1}$ de lineer denklemdir.

$$\lambda\left(\sum_i\sum_j\left(a_{ij}+a_{ji}\right)p_iq_j\right)+\mu\left(\sum_i\sum_j a_{ij}q_iq_j\right)=0$$

veya

$$\lambda\mu^{-1}\left(\sum_i\sum_j\left(a_{ij}+a_{ji}\right)p_iq_j\right)=-\left(\sum_i\sum_j a_{ij}q_iq_j\right)$$

dır. Bunu devam ettirirsek hem F nin tüm elemanları (böylece pq Q=pq) sağlar. Hem de tamamen F nin bir elemanı(böylece pq Q={p}) sağlar. Böylece pq doğrusu Q yu ancak ve ancak $\sum_i\sum_j\left(a_{ij}+a_{ji}\right)p_iq_j=0$ olduğunda tanjanttır. Bu denklem q_j de homojen lineer bir denklemdir ve bu yüzden hem bir hiperdüzlemi hem de uzayı temsil eder.

Teorem 4.4. Q, F cismi üzerindeki projektif d-uzayında bir kuadrik olsun. Böylece bulunduğu doğrularla Q nun noktaları polar bir uzay oluşturur.

İspat. l, Q nun bir doğrusu ve p de l üzerinde bulunmayan Q nun bir noktası olsun. Yardımcı Teorem 4.2 de Q_p hem bir hiperdüzlem hem de bütün bir uzaydır. Bu olasılıklar p ye l nin bir ya da tüm noktalarına komşuluk verir.

Q bir kuadrik için $p,q\in Q$ olsun. Eğer polar uzay olarak "dejenere" ise pAq^t ya bağlı olarak A matrisi ile p ve q noktalarının konjuge olduğu söylenir. Eğer A simetrik ise bu $qAp^t=0$ dır. Q nun tüm noktalarının birbirine konjuge olduğuna dikkat edilmelidir.

Yardımcı Teorem 4.5. p ve q karakteristiği 2 olmayan bir cisim üzerindeki bir kuadriğin 2 ayrı noktası olsun. O zaman ancak ve ancak pq doğrusu Q içinde bulunursa p ve q konjugedir.

İspat. r, pq doğrusunda herhangi bir doğru olsun. $r=p+q$ koordinatlarını seçebiliriz. Daha sonra ;
$rAr^t=(p+q)A(p+q)^t=pAp^t+pAq^t+qAq^t$
p ve q noktaları koniğin noktaları olduğundan $pAp^t=qAq^t=0$ dır. Daha ötesi, qAp^t $|x|$ matris olduğundan (bir cisim elemanı) ve böylece $qAp^t=(qAp)^t=pAq^t$ sonuç olarak $rAr^t=2pAq^t$. Eğer p ve q konjuge ise, $pAq^t=0$ dır, ve $rAr^t=0$, $r\in Q$ yu ifade eder. Ters çevirirsek eğer $r\in Q$, $pAq^t=0$ ise p ve q konjuge olur.

Örnek 4.2. F gerçek sayıların cismi olsun. Q da aşağıdaki matrisle belirlensin.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$p=[1,1/2,0,0]$ noktası Q üstündedir. p ye konjuge olan Q nun tüm noktalarının $[2x_0,x_0-x_2,0,2x_2]$ formuna sahip olduğunu görülmektedir. Bu x_0 ve x_2 nin tüm seçenekleri için her ikisi de sıfır olmamalıdır.

GF(k) üzerindeki 2d-boyutlu projektif uzayda bir düzgün kuadrik d–1 doğrudan fazla fakat daha yüksek olmayan boyutların projektif uzaylarının alt uzayların sahiptir.
Tek boyutlu projektif uzaylarda 2d-1 boyutu yerine (d-1) boyutlu alt uzay ya da en yüksek boyut olarak (d-2) boyutlu alt uzay olduğunu söyleyebiliriz., ilk durumda kuadrik hiperbolik veya kurallı , sonraki durumda da eliptik veya kuralsız diye adlandırılır.

GF(k) üzerinde bulunan projektif uzayların farklı alt uzaylarının sayısı aşağıda gösterildiği gibi düzgün kuadriklerde bulunabilirler:
i) boyut 2d ve m≤d-1 ise alt uzayların sayısı

$$\prod_{i=0}^{m}\frac{\left(k^{2.(d-m+i)}-1\right)}{\left(k^{(m+1-i)}-1\right)}\ \text{dır.}$$

ii) boyut 2d-1 ve m≤d-2 ise alt uzayların sayısı

$$\prod_{i=0}^{m} \frac{k^{(2d-1-2m+2i)} + k^{(d-m+i-1)} - k^{(d-m+i)} - 1}{k^{(m+1-i)} - 1}$$

dır.

iii) boyut 2d-1ve m≤d-1 ise alt uzayların sayısı

$$\prod_{i=0}^{m} \frac{k^{(2d-1-2m-2i)} - k^{(d-m+i-1)} + k^{(d-m+i)} - 1}{k^{(m+1-i)} - 1}$$

dır.

V.LİNEER ALT UZAYLAR

S yaklaşık lineer uzayı lineer olmadığı halde lineer alt uzaya sahip olabilir. Burada polar uzayınlar da görülen özel alt kümelere yakından bakalım. Bunlar lineer uzay olan lineer alt uzaylar ya da S nin alt uzaylarıdır. S nin herhangi bır noktası ya da doğrusu S nin lineer alt uzayıdır, ve tabi ki S nin kendisi de bir lineer uzaydır. O halde her alt uzay lineerdir.

Yaklaşık lineer uzayın noktalarının C alt cümlesi olsun, eğer C nin herhangi ikili noktası doğrudaş ise klik denir. S bir polar uzay olsun.R de bir alt uzay olsun ki bir $p \in S$ noktası olsun. $R_p \neq R$ olsun. O zaman R_p, R nin projektif hiperdüzlemidir.

Yardımcı Teorem 5.1. S sınırlı mertebeden bir non dejenere polar uzay olsun. S nin herhangi R lineer alt uzayı için R den maximal lineer alt uzayları vardır.

Yardımcı Teorem 5.2. S bir non dejenere ve sonlu mertebeden olsun ve R de S nin alt uzayı olsun. Böyle olunca R nin her non dejenere maximal lineer Q alt uzayı R nin projektif hiperdüzlemi olur.

Yardımcı Teorem 5.3. $L_{-1}<L_0<L_1<L_2<\ldots<L_{n-1}$, n sınırlı düzenin S polar uzayında lineer alt uzayların maximal zinciri olsun. Eğer $S=\oplus S_i$ ise her i için zincirin farklı elemanları

$L_{-1}\ S_i \subseteq L_0\ S_i \subseteq L_1\ S_i \subseteq L_2\ S_i \subseteq \ldots \subseteq L_{n-1}\ S_i$, S_i nin lineer alt uzaylarının maxsimal zincirini oluşturur.

Yardımcı Teorem 5.4. $S=\oplus S_i$, S sonlu mertebeden bir polar uzay olsun. Eğer S_i nin tüm maximal zincirleri aynı miktarda elemanlara sahipse tüm maximal S zincirleri aynı miktarda elementlere sahip olur.

VI.İNDİRGENEMEZLİK

Bir polar uzay, en az iki boş olmayan polar uzayın direkt toplamı ise indirgenebilirdir denir. Aksi halde indirgenemezdir denir.

Graf G nin tamamlayıcısı, G nin G' alt uzayıdır.(Örneğin eğer G yi yaklaşık lineer uzay alırsak aynı zamandan bir alt uzaydır.) Öyle ki G' nün hiçbir noktası G\G' nün herhangi bir noktasına komşu olmaz. G' connected component olarak adlandırılır

Yardımcı Teorem 6.1 Her non dejenere polar uzay ~ bağıntısıyla bağlanmış elemanların direkt toplamlarıdır Bu elemanlar indirgenemezdir

Sonuç 6.2. Bir non dejenere polar uzay sadece ve sadece ~ bağıntısının bir grafını bağlıyorsa indirgenemez olur.

Yardımcı Teorem 6.3. Her hangi bir polar uzay en fazla, indirgenemez polar uzayların direkt toplamı olarak bir bileşene sahiptir.

Yardımcı Teorem 6.4. Her hangi bir p ve q komşu olmayan noktalı bir S polar uzayında $p^{*}\ q^{*}$, S nin alt uzayıdır.(aynı zamanda polar uzaydır)

Yardımcı Teocrem 6.5. Sınırlı bir düzende S, indirgenemez bir polar uzay olsun. p~q ve p~q de S nin noktaları olsun. Böyle olunca p' q' ve p' q' polar uzayları izomorfiktir. (p' q' p' q' olarak yazılar)

VII.PROJEKTİF UZAYLAR VE ALT POLAR UZAYLAR

Genelleşmiş bir projektif düzlem, PD1 (Farklı iki doğru kesişir.) yi tatmin eden ama mecburen PD2 (Uzayda en az bir dörtgen vardır) yi tatmin etmeyen bir lineer uzaydır. Genelleştirilmiş projektif düzlemin her düzlemi lineer uzay ise genelleşmiş projektif uzay denir.

Yardımcı Teorem 7.1. S sınırlı düzenden non dejenere bir polar uzay olsun. M de S nin bir maximal lineer alt uzayı olsun. R de non dejenere bir M nin maximal lineer alt uzayı olsun. O halde p ve q ya komşu olmayan noktalar vardır.Öyle ki $R \subseteq p\ \ q$ ve R, p q nin maximal lineer alt uzaydır.

Yardımcı Teorem 7.2. n sınırlı düzende S, non dejenere bir polar uzay olsun. O halde lineer alt uzayların her maximal zincirleri n+1 elemanlarına sahiptir.

Yardımcı Teorem 7.3. S sonlu mertebeden non dejenere polar uzayı olsun. Bu durumda S nin her lineer alt uzayı genelleşmiş projektif alt uzayıdır.

VIII.SONUÇ

Bir S polar uzayı, ayrı alt kümeleriyle birlik noktalar kümesidir ve alt uzaylar olarak adlandırılır. Öyle ki;

i) İçinde bulundurduğu alt uzaylarıyla birlikte bir alt uzayı, bazı indis n ler için (görünen en küçük n, S nin mertebe olarak adlandırılır.) $-1<i$ n-1 ile i boyutlu projektif bir uzaydır.

ii) İki alt uzayın kesişimi yine bir alt uzaydır.

iii) n-1 buyutlu R alt uzayı alarak verilen ve bir $p \in S$ noktasında M eşsiz bir alt uzay vardır. Ve M, dim(M R)=n-2 olarak *p* yi ihtiva eder. M, R nin tüm noktalarını ihtiva eder ve bunlar bazı *l* buyutlu alt uzayları ile *p* ye birleşirler.

iv) n-1 boyutun birleşmeyen alt uzayları vardır.

S, 3 ten büyük yada eşit bir polar uzay olsun. Öyleyse aşağıdaki durumdan bir yada sadece bir tanesi gerçekleşir.

i. S, trace-değerli σ-hermityen biçiminde tanımlanan bir projektif uzay içindeki bir polariteden doğan bir polar uzaydır.

ii. S projektif uzayında bir F' halkası üzerindeki yarı kuadrikten doğan bir polar uzaydır. F, 2 karakteristliği taşır ve eklenen anti otomorfizm σ, $\sigma^2=1$ve $\{t \in F \; t^{\sigma}=t\} \neq \{u+\sigma(u) \mid u \in F\}$ yi sağlar.

iii. S, karakteristliği 2 olan cismin üzerinde projektif bir uzayda boş polariteden doğmuş polar bir uzaydır.

iv. S maximal alt uzayları Moufang düzlemleri olan 3. seviyede bir polar uzaydır.

v. S değişken olmayan bölüm halkası üzerinde 3 boyutlu uzayda karşılaştırılan 3. seviyede bir polar uzaydır.

2. seviyedeki polar uzaylar kuadrikler olarak genellenir. Ernest Shult bağımsız olarak GF(2) cismi üzerindeki karekterizasyon problemini incelemiştir. Sonuçları graf teorik dilinde çerçevelenmiştir ve teorem aşağıdaki gibidir.

Bir Shult S uzayı bir kardinalitesi 2 den büyük yada eşit farklı alt kümeleri ile birlikte noktalar kümesidir ve doğru olarak adlandırılır. Öyle ki S nin her *l* doğrusu için ve $p \in S$ için her *p*, *l* nin bir yada tüm noktalarına komşudur.

Bir Shult uzay, hiçbir nokta diğer noktaların hepsine komşu değilse non dejeneredir denir.

Bir S, Shult uzayının R alt uzayı boş olmayan çift yönlü komşu noktalar kümesidir. Öyle ki birden fazla noktada R ile kesişen herhangi bir doğru R içinde bulunur. Eğer bir indis n varsa S sonlu seviyededir öyle ki S nin farklı $R_1 \subseteq R_2 \subseteq \ldots \subseteq R_n$ alt uzayının her zinciri en fazla n elemanlıdır.

Teorem 8.1. S nin tüm doğruları 3 e eşit yada büyük olan sınırlı seviyenin bir non dejenere Shult uzayı olsun. O halde S bir polar uzaydır.

Teorem 8.2. Her polar uzay bir shult uzayıdır.

Bu kounun, bundan sonraki çalışmalara bir basamak teşkil edebileceği gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Kaya,R. Projektif Geometri,(1992)
[2] Hacısalihoğlu,H. Dönüşümler ve Geometriler (1985)
[3] Hacısalihoğlu,H. Analitik Geometri,(1998)
[4] Batten,L. Combinatorics of Finite Geometries,(1986)