

## Elastik Dielektrik Malzemelerin Sürekli Ortam Hasar Mekanikliği

Mustafa Reşit USAL

Süleyman Demirel Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Makine Eğitimi Bölümü / ISPARTA  
[usalmr@tef.sdu.edu.tr](mailto:usalmr@tef.sdu.edu.tr)

**Özet:** Sürekli-Ortam Hasar Mekanikliği; Mikro-çatlak oluşumunun veya mikro boşlukların büyümesinin bir sonucu olarak, yapısal zayıflamaya uğrayan mühendislik malzemeleri ile ilgilendirir. Bu çalışmada, elastik dielektrik hasarlı malzemelerin bünye denklemlerine ait genel ifadeler sürekli ortam hasar mekanikliğinin temel yasalarından türetilmiştir. Bu matematiksel model, mekanik bir yükün etkisi altında kalan ve mikro boşluklar içeren elastik dielektrik ortamlar için geliştirilmiştir. Malzeme normalde izotrop bir ortam olup sırf mikro-boşluk dağılımı nedeniyle güçlü bir anizotropi göstermektedir. Bu bağlamda cisim davranış olarak kendisini gerilme, elektriksel polarizasyon ve gerinme-enerjisi yoğunluğunun değişim hızı tarzında ifade edecektir. Sonuç olarak, gerilme, polarizasyon ve gerinme-enerjisi yoğunluğunun değişim hızına ait bünye denklemleri maddesel koordinat sisteminde elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Sürekli-Ortam Hasar Mekanikliği, Serbest Enerji, Gerilme, Polarizasyon, Gerinme-Enerjisi-Yoğunluğu Değişim Hızı, Bünye Denklemleri.

## Continuum Damage Mechanics for Elastic Dielectric Materials

**Abstract:** Continuum Damage Mechanics (CDM) deals with engineering materials which undergo structural weakening as a result of micro-crack formation or void growth. The general expressions of constitutive equations for isotropic elastic dielectric damaged materials were derived from the basic laws of continuum damage mechanics. This mathematical model represents an elastic dielectric media which has micro-voids and subjected to a mechanical loading. Due to micro-void distribution, overall structure attains a strong anisotropy, despite the fact that the material is otherwise isotropic. In this context the body will respond by means of stress, electric polarization and strain-energy density release rate. In the conclusion, constitutive response functions for the stress, polarization and strain-energy density release rate have been obtained in material coordinates.

**Keywords:** Continuum Damage Mechanics, Free Energy, Stress, Polarization, Strain-Energy Density Release Rate, Constitutive Equations.

### Giriş

Bilindiği gibi genel anlamda “Hasar” terimi malzemelerin bozulması, kırılması, kopması ve işe yaramaması anlamında kullanılmaktadır. Oksitlenme, korozyon, difüzyon, mekanik yükler ve yaşlanmadan dolayı zayıflama veya elektromanyetik yüklerden dolayı malzemenin yapısal bütünlüğünün bozulması, hasarı başlatıp devam ettirebilecek nedenlerden bazılarıdır. Hasar mekanikliği; düzensiz şekil, ölçü ve yönelimlerde rasgele dağılmış olan birçok mikro-çatlak tarafından zayıflatılmış malzemelerin davranışını ve mukavemetini araştıran güncel bir konudur. Malzemenin hasar görme mekanizmaları oldukça farklı ölçeklerde incelenebilir. Bu ölçeklendirmeler atomik ölçek, mikro ölçek, mezo ölçek (sürekli ortam ölçeği) ve makro ölçek şeklinde göz önüne alınabilir. Farklı ölçeklerde ortaya çıkan hasar mekanizmalarının durumu aşağıda kısaca özetlenmiştir. Uygun homojenleştirme teknikleri ile bu ölçekler arasında geçişler sağlanabilmektedir[1-3].

Atomik ölçekte bir malzeme, adyabatik ve rijit duvarlarla evrenin geri kalan kısmından ayrılmış ve birbirleri ile etkileşen N tane atomdan meydana gelen bir sistem olarak göz önüne alınmaktadır. Çevrenin bu sistem üzerindeki etkisi, sistemin dış yüzeylerini oluşturan atomlara gerilme kuvvetleri ve sıcaklık

şeklinde iletilmektedir. Her bir atom, bu topluluğun diğer atomları ile etkileşim halindedir. Kuantum Mekanikliği teorilerine göre, yoğunlaşmış fazlardaki atomlar belirli denge pozisyonlarını işgal eder ve atomlar arası enerjinin sınırlı bir aralığında titreşimlerini sürdürürler. Dışarıdan sisteme bir iş uygulandığı zaman atomlar kendilerine ait denge pozisyonlarından ayrılırlar ve böylece sistemin potansiyel enerjisi değiştirilmiş olur. Ortaya çıkan deformasyon elastik ise, sistemin potansiyel enerjisi tersinir bir tarzda depolanır, dış yükler kaldırıldığında atomlar denge pozisyonlarına geri döner ve sistemin potansiyel enerjisindeki artma azalır. Bu tersinir prosesin zamana bağımlı ve termal olarak aktive edilmiş durumu tersinmez bir proses olarak düşünülebilir. Bu durumda, atomlar daha önceki bağların kırılması sonucunda kendi enerji engellerini aşar ve bağların yeni konfigürasyonlarını oluşturarak serbest enerjinin yeni bir denge aralığına hareket ederler. Diğer bir deyişle, tersinmez bir yapısal değişim veya hasar oluşur. Dolayısı ile, kristal yapı malzemelerde ve polimerlerde hasar prosesi kimyasal bir reaksiyon olarak göz önüne alınabilmektedir. Bu kimyasal olaylar esnasında malzemenin temel kompozisyonu sabit kalmakla birlikte atomların bağ yapıları değişir. Bu durum malzeme içerisinde mikro-boşluklar ve süreksizlik yüzeyleri meydana getirebilir. Yukarıda bahsedilen yaklaşım kapsamında hasarın aslında reolojik bir yapıya sahip olduğu ve deformasyondan çok

farklı bir proses olduğu söylenebilir. Bir iç değişken olarak hasar parametresi  $D$  rasyonel bir şekilde belirlendiği sürece hasar prosesini tanımlamak için tersinmez proseslerin termodinamik teorisi uygun bir yaklaşım tarzı olarak gözükmektedir [4,5].

Mikro-ölçekte bir malzeme, değişik ölçü, şekil ve yönelimlere sahip çok sayıda rasgele dağılmış mikro-çatlak içeren ve genellikle izotrop yapıda olan bir matristen ibaretmiş gibi düşünülmektedir. Matrisin efektif özellikleri atomik ölçek modellerini (moleküler dinamik) kullanarak tanımlanmaktadır. Tane sınırlarında yer alanlar da dâhil olmak üzere bütün atomik kusurlar matrisin efektif özellikleri içerisinde modele dâhil edilmişlerdir. Mikro-mekanik modeller ve bu ölçekler çerçevesinde, mikro-çatlaklar ve diğer mikro-ölçekli kusurlar en fazla tanelerin, agregaların veya ara yerlere girmiş farklı mikro yapıların yüzeyleri kadar büyük olabilir. Bu durumda mikro-ölçekte hasar, kusurların veya ara yüzeylerin yakın civarında dislokasyonların ve mikro-gerilmelerin birikmesi ve bağların kopmasıdır. Eğer random mikro- yapı bir maddesel hacim istatistiksel olarak homojen ise, efektif katılık ve esneklik tansörleri heterojenliklerin, kusurların ve dalgalanmaların gerçek konumlarından ve bu alanların etkileşimlerinden bağımsızdır. Homojenleştirme işleminin sonucunda, bir çok mikro ölçekli kusurla yarılmış olan malzemenin homojenleştirilmiş matris formuna ait temsili hacim elemanının (THE) efektif momentum iletme özellikleri belirlenmeye çalışılır. İstatistiksel olarak homojen kabul edilen THE' ni için kusurların ve heterojenliklerin sayısı büyük olmalı, onların yeri rasgele olmalı ve ölçüleri de küçük olmalıdır. Mikro-ölçekte hasar parametresinin seçilmesi ile ilgili olarak öncelikle cevaplanması gereken soru, farklı mertebeden bir tansörle tahmin edilmiş olan mikro-çatlak dağılımının geometrisi ile seçilmiş hasar parametresinin kullanımının ne kadar doğru olduğudur [6,7].

Sürekli Ortam ölçeği (mezo ölçek) kapsamında yapılan incelemelerde ise, göz önüne alınan tipik bir malzemenin işgal ettiği uzayı boşluksuz bir şekilde doldurduğu ve bu anlamda sürekli olduğu düşünülmektedir. Sürekli ortam modellerinde mikro-ölçek kusurlarının etkisi mikro-mekanik modellerle tutarlı olan matematiksel bir yapıyla tanımlanmalıdır. Diğer bir deyişle, sürekli ortamın bir maddesel noktasındaki efektif bir özellik, buna karşılık gelen mikro-ölçekteki THE' nin aynı özelliğinden belirlenebilmelidir. Olabildiğince basit olan bu yaklaşım hasar parametresinin seçimi ile ilgili karışıklığa da bir çözüm olarak görülmektedir. Makro-çatlakların başlamasından önce, malzemelerin mekanik özelliklerinde yaygın şekilde gözlenen kademeli veya sürekli gerilemeyi tanımlamak için sürekli ortam hasar mekaniği oldukça önemli bir rol oynamaktadır. Kachanov, sürünme hasarını incelerken, malzemelerin mikro-yapısındaki kademeli gerilemeyi karakterize etmek için "süreklilik parametresi,  $\Psi$ " ve "efektif gerilme" kavramını tanımlayan ilk araştırmacıdır [1, 3]. Büyük plastik gerilmeler olmaksızın mezo-ölçekte bir

çatlak başladığı zaman "gevrek hasar" durumu söz konusudur. Belirli bir eşik değerden daha büyük plastik deformasyonla eş zamanlı olarak başlayan hasar ise "sünek hasar" olarak tanımlanmaktadır. Sürekli ortam hasar mekaniği kapsamında yapılan modellemelerde iki temel aşama vardır. Birinci aşamada bütün malzemeler için ortak olarak geçerli olan ilkeler (balans denklemleri) belirlenir. İkinci aşamada ise idealize edilmiş malzemeleri tanımlayan bünye denklemleri oluşturulur.

Makro ölçekli seviyede ise çatlakların ve boşlukların büyümesi söz konusu olup kırılma mekaniğinin temel yaklaşımları dikkate alınmalıdır. Bu kapsamda hasar (damage) mekaniği, büyük ölçekli çatlakların (fracture) başlamasına kadar olan mekanizmayı incelemektedir.

Bu çalışmada, sürekli ortam hasar mekaniği kapsamında ele alınan elastik dielektrik (yalıtkan) ortamlara ait matematiksel bir model oluşturularak gerekli bünye denklemleri elde edilmiştir. Elastik dielektrik ortamlar ve makro ölçekte bu ortamların çatlak mekaniği bir çok araştırmacı tarafından incelenmiş ve çok sayıda temel araştırmanın konusu olmuştur [8-11]. Kullanım maksatları bakımından ikiye ayrılan dielektrik malzemelerden aktif dielektrik malzemeler maddenin polarize olma yeteneğini kullanır. Kondansatörlerde kapasite değerini yükseltmek için kullanılan kondansatör yalıtkanları, kaset ve video bantları ile bilgisayar hafızalarında kullanılan kalıcı polarizasyonlu ferro-elektrik malzemeler, ultrason dalgalar üreten kuartz kristalleri gibi mekanik uyarıları elektriksel sinyallere (veya tersine) çeviren piezoelektrik malzemeler önemli aktif dielektrik yapılarıdır. Pasif dielektrik malzemeler ise, elektrik akımını iletmede kullanılan iletkenleri birbirinden ve çevreden yalıtıma yarayan malzemelerdir. Piezoelektrik ve Ferroelektrik malzemeler seramiklerin önemli bir sınıfını oluşturmaktadır ( $BaTiO_3$ ,  $PbZrO_3$ ,  $PbTiO_3$ ). Genellikle çok kristalli seramikler halinde üretilen Ferroelektrik malzemelerin neredeyse tümü piezoelektrik özelliğe sahiptirler. Piezoelektrik malzemeler özellikle akıllı sistemlerin tasarımında algılayıcı ve harekete geçirici olarak da kullanılmaktadırlar. Dielektriklerin dayanabileceği elektrik alan şiddeti sınırlıdır. Eğer uygulanan gerilim kritik bir değeri aşarsa yalıtıkanda, özellikle kusurlu bölgelerde mevcut elektronlar enerji aralığını atlayarak serbest hale geçebilir, bunlarda diğer elektronlara çarparak bir elektron seli oluşturur ve ortaya çıkan akım yalıtkanı delip geçer. Bunun sonucu olarak malzemenin yalıtkanlık özelliği kaybolur. Buna elektriksel göçme denir. Her yalıtkan bu göçmeye karşı belirli bir dielektrik dirence sahiptir. İç yapı kusurları, kimyasal bozulma, çatlaklar, boşluklar ve yüksek sıcaklık bu direnci azaltır. Bu ve benzeri sebeplerden dolayı seramikler gibi orta düzeyde koheziv mukavemete sahip malzemelerin davranışlarının sürekli ortamlar hasar mekaniği ile incelenmesi önem arz etmektedir [11,12].

Ferroelektrik malzemelerde hasarın belirlenmesi için fenomenolojik bir model Bassiouny [13] tarafından oluşturulmuş ve hasar üzerinde polarizasyonun etkisi incelenmiştir. Bu çalışmada, efektif büyüklükler göz önüne alınarak elektro-mekanik kapling etkiler araştırılmıştır. Bassiouny v.d., daha önceki çalışmalarında kapıl elektromekanik histerisis etkiler için termodinamik bir formülasyon geliştirmişlerdir [14-17].

Bu araştırmanın teorik temellerini oluşturan çalışmalarda fiber takviyeli elastik dielektrik ortamların elektro-termomekanik davranışına ait matematiksel bir model oluşturulmuş ve elektrostatik alanlarla mekanik alanların nonlineer etkileşimleri ele alınmıştır [18,19]. Bir diğer çalışmada, mikro-boşluklu elastik ortamlar için bünye denklemlerinin oluşturulmasına ait matematiksel bir formülasyon sürekli ortam hasar mekanikliği kapsamında geliştirilmiştir. Hasarın mekanik temsili ve bir iç durum değişkeni olarak hasar tansörünün göz önüne alınışı daha detaylı olarak verilmekle birlikte sadece mekanik büyüklükler göz önüne alınmış, elektrostatik kaynaklı kuvvet ve kuvvetçifti ifadelerine yer verilmemiştir [20].

Bu çalışmada ise elektrostatik alanlar için geçerli olan Maxwell denklemleri daha başlangıçta dikkate alınmış ve mikro-boşluklu elastik dielektrik malzemeler için sürekli ortamlar mekanikliği çerçevesinde matematiksel bir model kurulmuştur.

### Hasarın Mekanik Temsili:

Şekil 1 de görülen temsili hacim elemanı, ( $\mathbf{F} = \mathbf{n} F$ ) şeklinde bir kuvvetle yüklendiğinde bilinen tek eksenli gerilme  $\sigma = F/S$  olur. Malzeme içerisinde yer alan mikro boşlukların dışarıdan uygulanan çekme kuvvetine karşı herhangi bir direnç göstermediği dolayısı ile yük taşımadığı düşünülürse, efektif olarak yük taşıyan yüzeyin dik kesit alanından mikro boşlukların alanını çıkararak elde edilen yüzey ( $S-S_D$ ) olur. Dolayısıyla da **efektif gerilme**

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir.

**Hasar parametresini** mikro boşlukların toplam alanının toplam kesit alanına oranı

$$D \equiv \frac{S_D}{S} \quad (2)$$

olarak tanımlayabiliriz [21-23]. Kachanov [1], malzeme içerisindeki belli bir kesit boyunca **süreklilik parametresini** hasar parametresi ile ilişkilendirmiş ve süreklilik parametresini  $\Psi = 1 - D$  şeklinde tanımlamıştır. Bu durumda (1) ve (2) ifadelerini dikkate alarak,

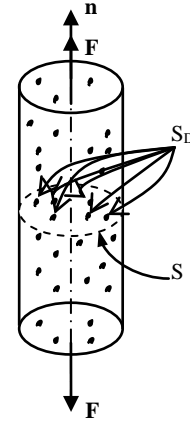
$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S \left(1 - \frac{S_D}{S}\right)} = \frac{F/S}{1-D} = \frac{\sigma}{1-D} = \frac{\sigma}{\Psi} \quad (3)$$

yazabiliriz. Yukarıda verilen ifadeleri göz önüne alarak aşağıdaki sınırlamaları yazılabilir;

$$0 \leq D \leq 1 \quad (4)$$

$D = 0$  (başlangıçtaki hasarsız durum,  $\Psi = 1$ )

$D = 1$  (malzemenin kopma veya kırılma durumu,  $\Psi = 0$ )



Şekil 1. Tek eksenli çekme altındaki bir çubukta hasar parametresinin tanımı

Lemaitre ve aynı şekilde Simo ve Ju, efektif gerilme ilkesine benzer şekilde efektif gerilme içinde uygun tanımlar kullanarak izotropik hasar durumu için eşdeğer gerilmeyi  $\tilde{\varepsilon} = (1-D)\varepsilon$  şeklinde ifade etmişlerdir. Bu aşamada **gerilme eşdeğerliği** ve **gerilme eşdeğerliği** hipotezlerini vermek açıklayıcı olacaktır [24, 25] :

**Gerilme eşdeğerliği hipotezi:** Hasarlı bir malzemenin gerilme davranışı orijinal veya hasarsız malzemenin bünye denklemi ile temsil edilebilir, ancak hasarsız malzemenin bünye denkleminde ortaya çıkan gerilme yerine **efektif gerilme** kullanılmalıdır. Başka bir ifadeyle, uygulanan gerilme altında malzemenin hasarlı durumu ile ilgili gerilme, efektif gerilme altında malzemenin hasarsız durumu ile ilgili gerilmeye eş değerdir. Efectif gerilme kavramı ve gerilme eşdeğerliği hipotezi doğal olarak bünye denklemlerinin gerilme-tabanlı formülasyonları için kullanılabilir.

**Gerilme eşdeğerliği hipotezi:** Uygulanan gerilme altında hasarlı durumla ilgili gerilme, **efektif gerilme** altında malzemenin orijinal (hasarsız) durumu ile ilgili gerilmeye eşdeğerdir.

Efectif gerilme ilkesini kullanarak hasarlı bir malzeme ile hasarsız bir malzemenin elastisite modülü arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir:

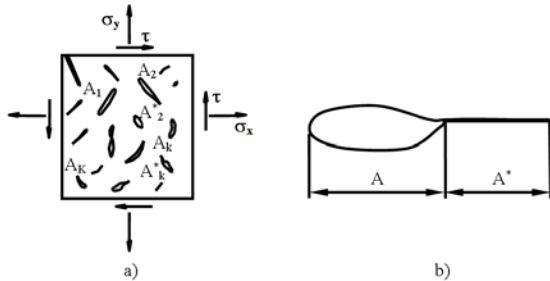
$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \Rightarrow \tilde{E} = E(1-D) \quad (5)$$

Burada,  $DE$  hasar nedeniyle elastisite modülünde meydana gelen azalmayı,  $\tilde{E}$  ise hasarlı malzemenin elastisite modülünü göstermektedir.

Şimdi, gerçek hasarlı duruma mekanik olarak eşdeğer olan ve  $F$  yükünün etkisi altında,  $S^* \equiv S - DS$  şeklinde tanımlanan bir kesit alanına sahip hayali bir elemanı göz önüne alabilir ve bu durumu hasarsız bir durum olarak adlandırabiliriz. Eğer mekanik olarak eşdeğer olan bu iki durumdaki  $S$  ve  $S^*$  alanları arasındaki ilişki bir şekilde belirlenebilirse hasar değişkeni  $D$ ' de belirlenmiş olur. Efectif gerilme  $\tilde{\sigma}$ , çekmeye zorlanan malzeme durumunda

geçerlidir. Malzemenin basınca zorlanması halinde bazı mikro-boşluklar kapanacağından (malzemedeki hasar durumu muhtemelen değişmeden kalacak) yüke direnen alan (S-S<sub>D</sub>) den daha büyük olacaktır. Bu durumda efektif gerilme ile bilinen gerilme arasındaki fark ihmal edilebilir. “Efektif” kavramı, çekme veya kayma gerilmeleri ile zorlanan malzemedeki, mikro boşlukların (veya kusurların) birbirleri ile olan karşılıklı etkileşimlerinin ve mikro gerilme konsantrasyonlarının dikkate alınması sonucunda ortaya çıkan “toplam mukavemet” olarak anlaşılmalıdır. Aslında “efektif gerilme” kavramına kesin bir yaklaşım, deneysel sonuçları ve istatistiksel yöntemleri kullanan mikro-mekanik bilim dalı kapsamında yapılabilir. Ancak bu çalışmada Sürekli Ortamlar Mekaniği kapsamında (mezo ölçekte) malzemenin global davranışını dikkate alarak bünye denklemleri üzerinde durulmuştur.

Bazı araştırmalarda, hasar değişkenlerini belirleyebilmek için K sayıda mikro çatlak içeren bir temsili hacim elemanı (THE) göz önüne alınmıştır. Herhangi bir k-ncı mikro çatlakın açık veya aktif kısmı  $A^{(k)}$  ile bu mikro çatlakın kapalı veya pasif yüzeyi de  $A^{*(k)}$  ile gösterilmiştir. Bir çatlakla ait aktif veya pasif yüzeyler gerilme, sıcaklık ve nem oranına göre kendi aralarında yer değiştirebilir. Buna rağmen Weitsman bu açık ve kapalı yüzeylerin belli bir zaman aralığında malzemenin durumunu karakterize eden bağımsız değişkenler olarak seçilebileceğini ifade etmektedir [26,27].



**Şekil 2. a)** K sayıda mikro çatlak içeren temsili hacim elemanının düzlemsel görüntüsü (27), b) Bir mikro çatlakın açık ve kapalı yüzeyleri.

Makro seviyede gerilmeler ve gerinmeler THE'nin hacmi üzerinde ortalama büyüklüklere sahiptir. İnfinitesimal deformasyonları da bu makro büyüklükler arasında sayabiliriz. THE'nin davranışını tam anlamıyla dikkate almak için  $A^{(k)}$  ve  $A^{*(k)}$  ( $k=1, \dots, K$ ) yüzeylerini temsil eden  $2K$  sayıda çatlak parametresini dikkate almak gerekir. Bu yüzeylerin gerçek şekli mezo ölçekte tam olarak bilinmediğinden, Weitsman bunları eşdeğer düzlemsel yüzeyler olarak düşünerek  $A^{(k)} = A^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}$  ve  $A^{*(k)} = A^{*(k)} \mathbf{n}^{(k)}$  vektörleri ile temsil etmiştir, ( $k = 1, \dots, K$ ). Burada  $\mathbf{n}^{(k)}$ , bir mikro çatlak düzlemine ait birim normal vektörü göstermektedir [26]. Cismin içerisinde bir maddesel nokta civarında konveksiteleri farklı olan iki mikro çatlak göz önüne alalım. Malzeme, üzerine gelen yüklemeye durumuna göre, farklı konveksitelere sahip çatlak yüzeylerinden dolayı farklı

davranışlar gösterebilir. Eğrilik yarıçapları çok büyük olan farklı infinitesimal çatlak yüzeyleri topolojik ve mekanik açıdan eş değer kabul edilebilir. Bu durumda çatlak yüzeyinin topolojik temsili çatlak yüzeyinin yönünden bağımsız olarak ifade edilebilir. Matematiksel olarak bu temsili, iki vektörün diyadik çarpımı ile oluşturulan bir simetrik tansör kullanarak gösterebiliriz. Bu durumda, her bir mikro çatlakla aşağıdaki gibi simetrik diyadlarla tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{H}^{(k)} \equiv \mathbf{A}^{(k)} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \quad \text{ve} \quad \mathbf{H}^{*(k)} \equiv \mathbf{A}^{*(k)} \otimes \mathbf{A}^{*(k)},$$

$$H_{ij}^{(k)} \equiv A_i^{(k)} A_j^{(k)} \quad (6)$$

$\mathbf{A}^{(k)}$  ve  $\mathbf{A}^{*(k)}$  yüzeylerinin ölçüsü ve yeri hakkında detaylı bilgiler ancak istatistiksel olarak mikro ölçekte mevcut olduğundan, Sürekli-Ortamlar Mekaniğinin kullanıldığı mezo ölçekte (6) ifadesi ile verilen tansörel ifadelerin birleşik etkilerini aşağıdaki diyadik çarpımların toplamları ile gösterebiliriz. Bu işlem, mikro ölçekten mezo ölçege geçerken yapılan homojenleştirme şeklinde de yorumlanabilir.

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{(k)} \otimes \mathbf{A}^{(k)}, \quad \mathbf{H}^* = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{*(k)} \otimes \mathbf{A}^{*(k)} \quad (7)_1$$

Böylece hasarın etkisi mezo ölçekte iki adet iç durum değişkeni ile ifade edilebilmektedir. Bu iki durum değişkeni de tanımları gereğince ikinci dereceden simetrik tansörel karakter taşır. İnfinitesimal deformasyonların göz önüne alınması, hasarı temsil eden tansörlerin de aynı infinitesimal karakterde olması anlamına gelmez [27]. Dolayısıyla bir kuvvet serisi temsili gerinmeler için kullanılırken, hasar tansörleri için uygun olmayabilir. Bu çalışmada bünye değişkeni olarak, sadece açık mikro yüzeylerin etkisini dikkate alan bir tek hasar tansörü göz önüne alınmış ve bu tansör bir iç durum değişkeni olarak kullanılmıştır. Açık mikro-çatlak yüzeylerinin temsili hacim elemanı içerisindeki ortalama değerlerini  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$  vektörü ile, bu vektörün zamanla değişimini  $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t)$  ile gösterebiliriz. Bu vektörlerin, temsili hacim elemanına ait herhangi bir karakteristik yüzeyin alanına bölerek boyutsuzlaştırıldığını düşünmek formülasyonun genel yapısını etkilemez. Diğer taraftan, malzeme mikro-çatlak yüzeylerinin pozitif ve negatif taraflarını fark edemeyeceği için, matematiksel olarak  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$  ve  $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t)$  vektörlerine olan bağımlılığı (7)<sub>1</sub> ifadesini de göz önüne alarak,

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \Rightarrow \dot{\mathbf{H}} \equiv \dot{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \dot{\mathbf{A}} \quad (7)_2$$

formundaki tansörel çarpımlarla ifade edebiliriz. Bu tansörler ileride verilecek olan gerilme potansiyelinin argümanları arasında yer alacaktır.

## Balans Denklemleri

### Elektrostatik balans denklemleri

Göz önüne aldığımız ve t anında V(t) hacmini kaplayan ortamın çevresi ile olan etkileşiminde mekanik olmayan kuvvetlerin tabi olduğu quazi-statik elektrik alanı yöneten integral denklemler “Genelleştirilmiş” Gauss ve Stokes teoremleri kullanılarak yerleştirildiğinde aşağıdaki diferansiyel ifadeler elde edilmiş olur [28, 29]:

Gauss Yasası:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad \text{V(t) içinde} \quad (8)$$

Faraday yasası:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \phi^E \quad \text{V(t) içinde} \quad (9)$$

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{veya} \quad D_r \equiv \varepsilon_0 E_r + P_r \quad (10)$$

Burada,  $\mathbf{D}$  elektrik yer-değiştirme vektörü,  $\mathbf{E}$  elektrik alan vektörü,  $\phi^E$  elektrostatik potansiyel,  $\varepsilon_0$  boşluğun elektriksel permitivitesi,  $\mathbf{P}$  polarizasyon alan vektörünü göstermektedir.

### Termomekanik Denge Denklemleri

Benzer şekilde global balans denklemleri ( kütle, lineer momentum, açısız momentum, enerji, ve entropi üretimi) yerleştirildiği takdirde elde edilen diferansiyel ifadeler şu şekilleri alır:

#### Kütlenin Korunumu

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \quad \text{V(t) içinde} \quad (11)$$

Maddesel gösterimde kütlenin korunumu:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J(\mathbf{x}, t)} \quad (12)$$

#### Lineer Momentumun Dengesi

$$\rho \dot{v}_i = t_{i,l} + \rho f_i + F_i^E \quad \text{V(t) içinde} \quad (13)$$

#### Açısız Momentumun Dengesi

$$\varepsilon_{nrp} (t_{rp} + P_r E_p) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{nrp} \bar{t}_{rp} = 0 \Rightarrow \bar{t}_{rp} = \bar{t}_{pr} \quad \text{V(t) içinde} \quad (14)$$

$$t_{rp} = \bar{t}_{rp} - P_r E_p \quad (15)$$

#### Enerji Korunumu:

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{ij} v_{j,i} - q_{i,i} + \rho h + \rho h^E + C_i^E w_i \quad \text{V(t) içinde} \quad (16)$$

#### Clausius-Duhem Eşitsizliği (Termodinamiğin İkinci Kanunu )

V(t) içinde:

$$\rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} q_{i,i} - \frac{1}{\theta^2} q_i \theta_{,i} \equiv \rho \gamma \geq 0 \quad (17)$$

Burada,  $\mathbf{v}$  sürekli ortamın hızı,  $\mathbf{u}$  süreksizlik yüzeyinin hızı,  $\rho_0$  deformasyondan önceki kütle yoğunluğu,  $\rho$  deformasyondan sonraki kütle yoğunluğu,  $J$  jakobiyen,  $\dot{\mathbf{v}}$  ivme,  $t_{ij}$  gerilme tansörü,  $f_i$  birim kütle başına mekanik hacimsel kuvvet,  $F_i^E$  birim hacim başına elektrostatik gövde kuvveti,  $\bar{t}_{ij}$  simetrik gerilme

tansörü,  $C_i^E$  birim hacim başına elektrostatik kuvvet çifti,  $\varepsilon$  birim kütle başına iç-enerji yoğunluğu,  $q_i$  ısı akısı vektörü (birim zamanda ve birim yüzey alanından sisteme giren ısı miktarı olup bu vektör daima yüzey dışına doğru yönelmiş olarak seçilmektedir ve bu durum, enerji denklemi yazılırken dikkate alınmıştır),  $h$  birim kütle başına ısı kaynağı,  $h^E$  elektrostatik enerji kaynağı,  $w_i$  açısız hız,  $\eta$  birim kütle başına entropi yoğunluğu,  $\theta(\mathbf{X}, t)$  bir t anında mutlak sıcaklık dağılımı,  $\rho \gamma$  birim kütle başına entropi üretimi olup  $\varepsilon_{nrp}$  permütasyon tansörünü göstermektedir.

Denge denklemlerinde geçen elektrostatik kaynaklı kuvvet ve kuvvet-çifti ve enerji kaynak ifadeleri

$$\mathbf{F}^E = \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{E} \quad \square \quad F_i^E = P_j E_{i,j} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}^E \equiv \mathbf{P} \times \mathbf{E} \quad \square \quad C_i^E = \varepsilon_{ijn} P_j E_n \quad (19)$$

$$\rho h^E \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{t}^E : \mathbf{d} \quad \square \quad \rho h^E = E_i P_i + t_{ij}^E d_{ij} \quad (20)$$

şeklinde olup burada, (20) ifadesindeki (\*) işareti aşağıdaki anlamda kullanılmıştır.

$$\mathbf{P} \equiv \dot{\mathbf{P}} - P_i v_{,i} + \mathbf{P} v_{i,i} \quad (21)$$

Burada sembol üzerindeki nokta da maddesel türevi göstermektedir. Antisimetrik bir tansör olan  $\mathbf{t}^E$ , polarizasyon gerilme tansörü olarak bilinir ve

$$\mathbf{t}^E = \mathbf{P} \otimes \mathbf{E} \quad \square \quad t_{ij}^E = P_i E_j \quad (22)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [28, 30]. Burada  $\otimes$ , tansörel çarpımı göstermektedir.  $d_{kl}$  ise,

$$d_{ij} \equiv v_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) = d_{ji} \quad (23)$$

şeklinde tanımlanan deformasyon hızları tansörünü göstermekte ve  $v_{(i,j)}$  hız gradyanı tansörünün simetrik kısmı olarak tanımlanmakta; bu tansörün antisimetrik kısmı da spin tansörü olarak

$$w_{ij} \equiv v_{[i,j]} \equiv \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) = -w_{ji} \quad (24)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu ayrışım

$$\mathbf{L} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad \text{veya} \quad v_{i,j} = d_{ij} + w_{ij} \quad (25)$$

şeklinde de gösterilmekte olup kinematik olarak birinci terim bir maddesel noktanın maruz kaldığı deformasyon hızlarını, ikincisi de rijid dönme hızlarını temsil etmektedir.

Yukarıda verilen (12) ifadesinin diverjansı alınıp ve (18) ifadesi ile birlikte (13) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\rho \dot{v}_p = \rho f_p + \bar{t}_{rp,r} - P_{r,r} E_p \quad (26)$$

şeklinde lineer momentum denklemimiz simetrik bir gerilme tansörü cinsinden yazılmış olur.

Diğer taraftan (21), (22) ve (23) ifadelerini (20) de yerine yazıp, açışal hızı spin tansörünün düalinden  $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$  şeklinde çekerek ve (19) da verilen

$\mathbf{C}^E$  nin tanımını göz önüne alırsak, yerel enerji denklemi olan (16) ifadesinin son iki terimi

$$\rho h^E + \mathbf{C}^E \cdot \mathbf{w} = \rho \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{\Pi}} \quad (27)$$

şeklinde elde edilir. (27) ifadesi (16) da yerine yazıldığında enerji korunumu için

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{ij} v_{j,i} - q_{i,i} + \rho h + \rho \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{\Pi}} \quad (28)$$

şeklinde yerel denklem ortaya çıkmış olur. Burada birim kütle başına polarizasyon vektörü,

$$\mathbf{\Pi} \equiv \frac{\mathbf{P}}{\rho} \quad (29)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Yukarıda verilen balans denklemleri bir süreksizlik yüzeyini de içerecek şekilde daha önceki çalışmalarımızda verilmiştir [31, 32].

### Termodinamik Kısıtlar

Enerji denklemi ile entropi eşitsizliği uygun şekilde birleştirilir ve serbest enerji için aşağıdaki şekilde bir Legendre transformasyonu kullanarak,

$$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta - \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Pi} = \varepsilon - \theta \eta - \rho^{-1} E_i P_i \quad (30)$$

Entropi eşitsizliği maddesel formda aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-(\dot{\Sigma} + \rho_0 \eta \dot{\theta}) + \frac{1}{2} \bar{T}_{MN} \dot{C}_{MN} - \frac{1}{\theta} \theta_{,M} Q_M - \Pi_M \dot{E}_M \geq 0 \quad (31)$$

elde edilmiş olur. Burada geçen yeni büyüklüklerle ilgili terimler aşağıda verilmektedir:

$$\Sigma \equiv \rho_0 \psi \quad (\Sigma : \text{gerilme potansiyeli}) \quad (32)$$

$$\dot{C}_{MN} = 2 d_{mn} x_{m,M} x_{n,N} \Rightarrow$$

$$d_{mn} = \frac{1}{2} \dot{C}_{MN} X_{M,m} X_{N,n} \quad (33)$$

$$\bar{T}_{MN} \equiv J X_{M,m} X_{N,n} \bar{t}_{mn} \Rightarrow$$

$$\bar{t}_{mn} = J^{-1} x_{m,M} x_{n,N} \bar{T}_{MN} \quad (34)$$

$$Q_M \equiv J X_{M,m} q_m \Rightarrow$$

$$q_m = J^{-1} x_{m,M} Q_M \quad (35)$$

$$\Pi_M \equiv J X_{M,m} P_m \Rightarrow$$

$$P_m = J^{-1} x_{m,M} \Pi_M \quad (36)$$

$$E_M \equiv x_{m,M} E_m \Rightarrow$$

$$E_m = X_{M,m} E_M \quad (37)$$

$$\theta_{,M} = x_{m,M} \theta_{,m} \Rightarrow$$

$$\theta_{,m} = X_{M,m} \theta_{,M} \quad (38)$$

(31) eşitsizliği, quazi-elektrostatik bir alanın etkisinde bulunan termomekanik ortamlar için entropi üretiminin genel bir ifadesidir.

Mekanik bir yüklemeye maruz, mikro-çatlaklar içeren ve bu çatlakların zamanla şekillerinin değiştiği düşünülen elastik bir ortamın gerilme potansiyeli  $\Sigma$  'nın argümanları Sürekli-Ortamlar Mekanizmasının aksiyomlarına göre  $(C_{MN}, H_{MN}, \dot{H}_{MN}, E_M, \theta)$  olarak belirlenmiştir. Bu durumda gerilme potansiyelini

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[C_{MN}, H_{MN}, \dot{H}_{MN}, E_M, \theta] \quad (39)$$

şeklinde bir fonksiyon olarak yazabiliriz. Bünye aksiyomlarını kullanarak gerilme potansiyelindeki argümanların belirlenmesi daha önceki çalışmalarımızda kapsamlı bir şekilde verildiği için burada fazla detaya girilmemiştir. Bu fonksiyonun zamana göre maddesel türevini alırsak

$$\dot{\Sigma} = \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{MN}} \dot{C}_{MN} + \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{MN}} \dot{H}_{MN} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{H}_{MN}} \ddot{H}_{MN} + \frac{\partial \Sigma}{\partial E_M} \dot{E}_M + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (40)$$

ifadesini elde ederiz.

(40) ifadesi (31) eşitsizliğinde yerine yazılır, ortak terimlerin parantezleri alınır aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\bar{T}_{MN} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{MN}}) \dot{C}_{MN} - \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{MN}} \dot{H}_{MN} - \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{H}_{MN}} \ddot{H}_{MN} - (\Pi_M + \frac{\partial \Sigma}{\partial E_M}) \dot{E}_M - \\ & - \rho_0 (\eta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}) \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} Q_M \theta_{,M} \geq 0 \end{aligned} \quad (41)$$

(41) eşitsizliğinin keyfi her bağımsız termodinamik proseste sağlanabilmesi için gerilme potansiyelinin argümanları içinde bulunmayan  $\dot{C}_{MN}$ ,  $\dot{H}_{MN}$ ,  $\dot{E}_M$ ,  $\dot{\theta}$ , ve  $\theta_{,M}$  terimlerin katsayılarının sıfıra eşit olması gerekir.  $\dot{H}_{MN}$ ,  $\Sigma$  nin argümanları içerisinde yer aldığından bu eşitsizlikteki  $\dot{H}_{MN}$  nin katsayısı sıfıra eşitlenemez (5, 20).  $\dot{H}_{MN}$  nin katsayısına, gerilme-enerjisi yoğunluğunun değişim hızı olarak adlandırılan ve  $\bar{Y}_{MN}$  ile tanımlanan bir atama yapılır

$$\bar{Y}_{MN} \equiv - \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{MN}} \quad (42)$$

yazılabilir. Ayrıca pozitif bir büyüklükle uğraşmak için;  $Y_{MN} \equiv -\bar{Y}_{MN}$  tanımlaması kullanılarak, gerilme enerjisi yoğunluğunun değişim hızı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$Y_{MN} \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{MN}} \quad (43)$$

(41) eşitsizliğindeki  $\dot{C}_{MN}$ ,  $\ddot{H}_{MN}$ ,  $\dot{E}_M$ ,  $\dot{\theta}$ , ve  $\theta_{,M}$  nın katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{MN} &\equiv 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{MN}} , \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{H}_{MN}} = 0 , \\ \Pi_M &= -\frac{\partial \Sigma}{\partial E_M} , \eta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} , Q_M = 0 , \\ \bar{Y}_{MN} \dot{H}_{MN} &\geq 0 , -Y_{MN} \dot{H}_{MN} \geq 0 \Rightarrow Y_{MN} \dot{H}_{MN} \leq 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Yukarıda verilen (44) ifadelerinde, başlangıçta belirttiğimiz gibi ortamda ısı iletiminin olmadığı ve serbest enerji yoğunluğunun da hasarın maddesel değişim hızına bağlı olmadığı görülmektedir.

Açısal momentum balansının ve elektrostatik kaynaklı kuvvet-çiftinin bir sonucu olarak gerilme tansörü asimetrik bir karakterle ortaya çıkmıştı (15). Asimetrik formda ortaya çıkan toplam gerilmenin maddesel koordinatlardaki ifadesi sürekli ortamlar mekanikliğinin rutin hesaplamaları ile aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\begin{aligned} T_{PQ} &= \bar{T}_{PQ} - \Pi_P X_{M,n} X_{Q,n} E_M \\ &= \bar{T}_{PQ} - \Pi_P E_M C_{MQ}^{-1} \end{aligned} \quad (45)$$

Burada,  $C_{MN}^{-1} = X_{M,m} X_{N,n}$  Piola şekil değiştirme tansörü olarak bilinir. Diğer taraftan, serbest enerji yoğunluğunun bağlı olduğu argümanlar ve iç enerji aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma [C_{MN}, H_{MN}, E_M, \theta] \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{\rho_0} (\Sigma + \rho_0 \theta \eta) + \rho^{-1} P_i E_i = \\ &= \frac{1}{\rho_0} (\Sigma - \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \theta - \frac{\partial \Sigma}{\partial E_M} E_M) \end{aligned} \quad (47)$$

(44)<sub>1</sub> ifadesini, (34)<sub>2</sub> ifadesine götürürsek, simetrik gerilme tansörü için,

$$\bar{t}_{mn} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{m,M}} x_{n,M} \quad (48)$$

ifadesi elde edilir. Ortam sıkışmaz olduğu takdirde,  $J^2 = \det \mathbf{C} = 1$  veya  $\text{III} = 1$  şartı sağlanmalıdır [32]. Buna göre (48) denkleminde  $\Sigma$  yerine kendisine eşdeğer olan ve fakat sözü edilen kısıtlamayı içeren aşağıdaki fonksiyon alınabilir.

$$\Sigma - p(\mathbf{x}, t) (J - 1) \quad (49)$$

Burada  $p$ , bir Lagrange çarpanıdır. Bu ifadedeki fonksiyonun  $x_{l,L}$  ye göre türevi alınıp (48) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{t}_{mn} = -p \delta_{mn} + 2x_{m,M} x_{n,N} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{MN}} \quad (50)$$

elde edilir. Bu ifadenin maddesel koordinatlardaki formu ise

$$\bar{T}_{MN} = -p C_{MN}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{MN}} \quad (51)$$

Olur [31]. Gerilme enerjisi yoğunluğu değişim hızı, bilindiği gibi daha önce  $Y_{MN} \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{MN}}$  şeklinde

tanımlanmıştı. Bu ifadede  $\Sigma$ ' nin deformasyon gradyanına göre türevi yer almadığı için Lagrange çarpanı sıfır olur. Bu durumda elde etmemiz gereken bünye denklemleri, yapılan kabullere bağlı olarak  $T_{MN}$ ,  $\Pi_M$  ve  $Y_{MN}$  dir ve bunların serbest enerji fonksiyonu  $\Sigma$ ' ya bağlı olduğu (43) ve (44) denklemlerinden açıkça görülmektedir. O halde yapılacak ilk iş  $\Sigma$ ' nin açık formunu ortaya koymak olacaktır.

### Hasarlı Elastik Dielektrik Ortamlar İçin Bünye Denklemleri

Bu çalışmada, mekanik yüklemeye maruz mikro-boşluklu dielektrik bir ortamın izotrop olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda  $\Sigma$ ' ya ait argümanların somut olarak belirlenmesi için invaryantlar teorisine ait sonuçlar kullanılmıştır. Ortamın anizotropisi sadece mikro-boşluklardan kaynaklanmaktadır. Bu yaklaşıma göre  $\Sigma$  gerilme potansiyelinin formu maddesel koordinat sisteminin ful-ortogonal transformasyon grubu altında invaryant kalmalıdır [33]. Matematiksel olarak ifade edilecek olursa,  $\Sigma$  aşağıdaki kısıtlamayı sağlamalıdır:

$$\Sigma(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{E}, \theta) = \Sigma(\mathbf{MCM}^T, \mathbf{MHM}^T, \mathbf{ME}, \theta) \quad (52)$$

Burada  $\mathbf{M}$ , maddesel koordinat sistemlerinin ful ortogonal transformasyonlarını gösterdiğinden ortogonal bir matris olup,  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$  şartını sağlamaktadır. İnvaryantlar teorisine göre, bu argümanların skaler bir fonksiyonu olan  $\Sigma$ ' nin, bu argümanlara müşterek invaryantları vasıtası ile bağlı olması gerekir. Bu durumda,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{H}$  simetrik matrisleri ile  $\mathbf{E}$  vektörünün birbirinden bağımsız 16 adet müşterek invaryantları aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$\begin{aligned} I_1 &= C_{NN}, I_2 = C_{NM} C_{MN}, I_3 = C_{NM} C_{ML} C_{LN}, I_4 = H_{NN}, \\ I_5 &= H_{NM} H_{MN}, I_6 = H_{NM} H_{ML} H_{LN}, I_7 = E_N E_N, \\ I_8 &= E_N C_{NM} E_M, I_9 = E_N C_{NM} C_{ML} E_L, I_{10} = E_N H_{NM} E_M, \\ I_{11} &= E_N H_{NM} H_{ML} E_L, I_{12} = E_N C_{NM} H_{ML} E_L, \\ I_{13} &= C_{NM} H_{MN}, I_{14} = C_{NM} C_{ML} H_{LN}, I_{15} = C_{NM} H_{ML} H_{LN}, \\ I_{16} &= C_{NM} C_{ML} H_{LR} H_{RN} \end{aligned} \quad (53)$$

$\mathbf{H}$  hasar tansörü,  $\mathbf{A}$  vektörünün kendi kendisi ile tansörel çarpımı (7)<sub>2</sub> olarak seçildiğinden  $I_{11} = I_4 \cdot I_{10}$ ,  $I_{15} = I_4 \cdot I_{13}$  ve  $I_{16} = I_4 \cdot I_{14}$  yazılabileceği görülmektedir. Bu sebepten  $I_{11}$ ,  $I_{15}$  ve  $I_{16}$  invaryantlar listesinden çıkarılabilir.

İnvaryantların kendisini oluşturan birimlerin simetrik bir fonksiyonu olması gereğine dayanarak, yukarıda hasar tansörü için yaptığımız bu kabul teorisinin genel sistematikğini bozamaz. Bu durumda serbest enerji fonksiyonumuz yukarıda verilen argümanların fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\Sigma = \Sigma(I_1, I_2, I_3, \dots, I_{14}) \quad (54)$$

İkinci dereceden bir tansör olan Green deformasyon tansörünün asal invaryantlarının

$$I = I_1, II = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2), \quad (55)$$

$$III = \frac{1}{3!}(I_1^3 - 3I_1 I_2 + 2I_3)$$

şeklinde olduğu dikkate alınarak (53) ifadesindeki  $(I_1, I_2, I_3)$  invaryantları yerine, (55) ifadeleri ile verilen asal invaryantlar kullanılabilir. Ortam sıkışmaz kabul edildiğinden  $III=1$  olur. Bu durumda  $\Sigma$  nın bağlı olduğu invaryantlar, (53) ve (55) ifadeleri yardımıyla aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\Sigma = \Sigma(I, II, I_4, I_5, I_6, \dots, I_{10}, I_{12}, I_{13}, I_{14}) \quad (56)$$

Ortam sıkışmaz olduğundan gerilmenin, polarizasyonun ve gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemlerini ((51), (44)<sub>3</sub> ve (43)) aşağıdaki gibi bir arada yazmak işlemleri takip etmeyi kolaylaştıracaktır.

$$\bar{T}_{PQ} = -p C_{PQ}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PQ}} \quad (57)$$

$$\Pi_R = - \frac{\partial \Sigma}{\partial E_R} \quad (58)$$

$$Y_{PQ} = \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{PQ}} \quad (59)$$

(57) – (59) ifadelerindeki kısmi türevler (56) ifadesini dikkate alarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PQ}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \frac{\partial II}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \frac{\partial I_8}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} \frac{\partial I_9}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{13}} \frac{\partial I_{13}}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{14}} \frac{\partial I_{14}}{\partial C_{PQ}} \quad (60)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial E_R} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \frac{\partial I_7}{\partial E_R} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \frac{\partial I_8}{\partial E_R} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} \frac{\partial I_9}{\partial E_R} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} \frac{\partial I_{10}}{\partial E_R} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial E_R} \quad (61)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial H_{PQ}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial H_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} \frac{\partial I_5}{\partial H_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \frac{\partial I_6}{\partial H_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} \frac{\partial I_{10}}{\partial H_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial H_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{13}} \frac{\partial I_{13}}{\partial H_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{14}} \frac{\partial I_{14}}{\partial H_{PQ}} \quad (62)$$

(53) ve (55) ifadeleri ile verilen invaryantların sırasıyla  $C_{PQ}$ ,  $E_R$  ve  $H_{PQ}$  ya göre türevleri (60), (61) ve (62) denklemlerinde yerine yazılır ve elde edilen ifadeler (57), (58) ve (59) denklemlerine taşınırsa; mekanik bir yüklemeye maruz, mikro-boşluklu ve sıkışmaz olarak kabul edilen elastik bir dielektrik ortamdaki simetrik gerilme, polarizasyon ve gerinme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızına ait nonlinear bünye denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \bar{T}_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + 2 \left[ \frac{\partial \Sigma}{\partial I} (\delta_{PQ}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} (C_{RR} \delta_{PQ} - C_{PQ}) + \right. \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (E_P E_Q) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} (C_{PR} E_R E_Q + C_{QR} E_R E_P) + \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (E_P H_{QR} E_R) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{13}} (H_{PQ}) + \\ & \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{14}} (C_{PR} H_{RQ} + H_{PR} C_{RQ}) \right] \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \Pi_R = & - \left[ 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} E_R + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (C_{RL} E_L) + \right. \\ & 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} (C_{RM} C_{ML} E_L) + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} (H_{RL} E_L) + \\ & \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (C_{RL} H_{LM} E_M + E_M C_{ML} H_{LR}) \right] \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} Y_{PQ} = & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} (\delta_{PQ}) + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} (H_{PQ}) + 3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} (H_{PR} H_{RQ}) + \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} (E_P E_Q) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (E_R C_{RP} E_Q) + \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{13}} (C_{PQ}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{14}} (C_{PR} C_{RQ}) \end{aligned} \quad (65)$$

(63), (64) ve (65) denklemlerinin matris formdaki ifadeleri de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \bar{T} = & -p \mathbf{C}^{-1} + 2 \left[ \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \mathbf{I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} (\text{tr} \mathbf{C} \mathbf{I} - \mathbf{C}) + \right. \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (\mathbf{E} \mathbf{E}^T) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} (\mathbf{C} \mathbf{E} \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{C}) + \\ & \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (\mathbf{H} \mathbf{E} \mathbf{E}^T) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{13}} \mathbf{H} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{14}} (\mathbf{C} \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{C}) \right] \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & - \left[ 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \mathbf{E} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \mathbf{C} \mathbf{E} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} \mathbf{C}^2 \mathbf{E} + \right. \\ & \left. 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} \mathbf{H} \mathbf{E} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (\mathbf{C} \mathbf{H} \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{H}) \right] \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \mathbf{I} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} \mathbf{H} + 3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \mathbf{H}^2 + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} \mathbf{E} \mathbf{E}^T + \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (\mathbf{C} \mathbf{E} \mathbf{E}^T) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{13}} (\mathbf{C}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{14}} (\mathbf{C}^2) \end{aligned} \quad (68)$$

(63) denkleminde gözükten Lagrange çarpanı  $p$ , hidrostatik basınç olarak bilinir ve alan denklemleri ve sınır şartları ile belirlenebilir. (66), (67) ve (68) denklemlerinin daha somut şeklini elde etmek için bu denklemlerdeki  $\Sigma$ ' nın invaryantlarına göre türevlerinin değerlendirilmesi gerekir.  $\Sigma$ ' nın bağlı olduğu invaryantlar daha önce (56) ifadesi ile verilmiş ancak bu invaryantlara nasıl bağlı olduğu henüz belirlenmemiştir. Değişik malzemelerde bu bağımlılık farklı şekillerdedir (örneğin Money-Rivlin malzemeleri).  $\Sigma$ , bu invaryantların analitik bir fonksiyonu ise, ilk akla gelen yaklaşım bu fonksiyonun bir kuvvet serisi ile temsil edilebileceğidir. Bu kuvvet serisinin kaçınıcı mertebeden olacağı ve kaç teriminin alınacağı, yani  $\Sigma$ ' nın kaçınıcı mertebeden bir polinomla temsil edileceği deformasyon



büyükliklerinin olaydaki etkileşim paylarına kısacası nonlineerlik mertebelerine bağlıdır [31-33].

Diğer taraftan, iç enerji pozitif tanımlı olduğundan bu polinomun pozitif tanımlı olması gerekir. Ayrıca invaryanların sırasının  $\Sigma'$  yı etkilememesi için bu polinomun simetrik katsayılı olması, yani kuadratik bir form şeklinde olması gerekir. Serbest enerji yoğunluğu fonksiyonu için mevcut invaryanlar cinsinden bir polinom seçilmesi durumunda aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\Sigma = \sum_{i,j} a_{ij} I_i I_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (69)$$

( $i, j = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14$ ),

Bu ifadedeki  $a_{ij}$  katsayılarının hepsi,  $\mathbf{X}$  parçacığına ve ortamın  $\theta$  sıcaklığına bağlıdır. (66), (67) ve (68) ifadelerinde yer alan  $\Sigma'$  nin invaryanlara göre türevleri (69) polinom açılımından faydalanarak bulunabilir. Bu türevlerin alınışı tüm detayları ile daha önceki çalışmalarda yer aldığından burada verilmemiştir [5, 18, 20]. (69) ifadesinin ihtiva ettiği invaryanlara göre  $\Sigma'$  nin kısmi türevleri alınarak (63), (64) ve (65) denkleminde yerine yazıldıktan sonra deformasyon tansörü  $\mathbf{C}'$  nin birinci dereceden, elektrik alan vektörü  $\mathbf{E}$  ve hasar tansörü  $\mathbf{H}'$  in ikinci dereceye kadar olan terimleri dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \bar{T}_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + 2[2a_{11} C_{RR} \delta_{PQ} + 2a_{14} H_{RR} \delta_{PQ} + \\ & 2a_{15} H_{RL} H_{LR} \delta_{PQ} + 2a_{17} E_R E_R \delta_{PQ} + 2a_{18} E_R C_{RL} E_L \delta_{PQ} + \\ & 2a_{1,10} E_R H_{RL} E_L \delta_{PQ} + 2a_{1,12} E_R C_{RL} H_{LM} E_M \delta_{PQ} + \\ & 2a_{1,13} C_{RL} H_{LR} \delta_{Pq} + 2a_{24} H_{LL} C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & 2a_{25} H_{ML} H_{LM} C_{RR} \delta_{PQ} + 2a_{27} E_M E_M C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & 2a_{2,10} E_M H_{ML} E_L C_{RR} \delta_{PQ} + 2a_{24} H_{RR} C_{PQ} - \\ & 2a_{25} H_{RL} H_{LR} C_{PQ} - 2a_{27} E_R E_R C_{PQ} - \\ & 2a_{2,10} E_R H_{RL} E_L C_{PQ} - 2a_{18} C_{RR} E_P E_Q + \\ & 2a_{8,13} C_{RL} H_{LR} E_P E_Q + 2a_{1,12} C_{RR} E_P H_{QN} E_N + \\ & 2a_{12,13} C_{RL} H_{LR} E_P H_{QN} E_N + 2a_{1,13} C_{RR} H_{PQ} + \\ & 2a_{13,13} C_{RL} H_{LR} H_{PQ} ] \quad (70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Pi_R = & 4a_{17} C_{NN} E_R + 4a_{7,13} C_{NL} H_{LN} E_R + \\ & 4a_{1,10} C_{NN} H_{RP} E_P + 4a_{10,13} C_{NL} H_{LN} H_{RP} E_P \quad (71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{PQ} = & 2a_{14} C_{RR} \delta_{PQ} + 2a_{44} H_{RR} \delta_{PQ} + \\ & 2a_{45} H_{NL} H_{LN} \delta_{PQ} + 2a_{47} E_R E_R \delta_{PQ} + \\ & 2a_{48} E_R C_{RL} E_L \delta_{PQ} + 2a_{4,10} E_R H_{RL} E_L \delta_{PQ} + \\ & 2a_{4,12} E_R C_{RL} H_{LM} E_M \delta_{PQ} + 2a_{4,13} C_{RL} H_{LR} \delta_{PQ} + \\ & 4a_{15} C_{RR} H_{PQ} + 4a_{57} E_R E_R H_{PQ} + 4a_{58} E_R C_{RL} E_L H_{PQ} + \\ & 4a_{5,10} E_R H_{RL} E_L H_{PQ} + 4a_{5,12} E_R C_{RL} H_{LM} H_{PQ} + \\ & 4a_{5,13} C_{RL} H_{LR} H_{PQ} + 6a_{16} C_{NN} H_{PR} H_{RQ} + \\ & 6a_{67} E_N E_N H_{PR} H_{RQ} + 6a_{68} E_R C_{RL} E_L H_{PR} H_{RQ} + \\ & 2a_{1,10} C_{RR} E_P E_Q + 2a_{10,13} C_{RL} H_{LR} E_P E_Q \quad (72) \end{aligned}$$

denklemleri bulunur.

Yukarıda verilen (70), (71) ve (72) denklemindeki katsayıları aşağıdaki gibi tanımlayacak olursak,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \equiv & 4a_{11}, \alpha_2 \equiv 4a_{14}, \alpha_3 \equiv 4a_{15}, \alpha_4 \equiv 4a_{17}, \alpha_5 \equiv 4a_{18}, \\ \alpha_6 \equiv & 4a_{1,10}, \alpha_7 \equiv 4a_{1,12}, \alpha_8 \equiv 4a_{1,13}, \alpha_9 \equiv 4a_{24}, \alpha_{10} \equiv 4a_{25}, \\ \alpha_{11} \equiv & 4a_{27}, \alpha_{12} \equiv 4a_{2,10}, \alpha_{13} \equiv 4a_{8,13}, \alpha_{14} \equiv 4a_{12,13}, \\ \alpha_{15} \equiv & 4a_{13,13}, \beta_1 \equiv 4a_{17}, \beta_2 \equiv 4a_{7,13}, \beta_3 \equiv 4a_{1,10}, \\ \beta_4 \equiv & 4a_{10,13}, \lambda_1 \equiv 2a_{44}, \lambda_2 \equiv 2a_{45}, \lambda_3 \equiv 2a_{47}, \lambda_4 \equiv 2a_{48}, \\ \lambda_5 \equiv & 2a_{4,10}, \lambda_6 \equiv 2a_{4,12}, \lambda_7 \equiv 2a_{4,13}, \lambda_8 \equiv 4a_{57}, \lambda_9 \equiv 4a_{58}, \\ \lambda_{10} \equiv & 4a_{5,10}, \lambda_{11} \equiv 4a_{5,12}, \lambda_{12} \equiv 4a_{5,13}, \lambda_{13} \equiv 6a_{16}, \\ \lambda_{14} \equiv & 6a_{67}, \lambda_{15} \equiv 6a_{68} \quad (73) \end{aligned}$$

Simetrik gerilme tansörü, polarizasyon ve gerinme enerjisi yoğunluğunun değişim hızına ait bünye denklemleri maddesel koordinatlarda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + \alpha_1 C_{RR} \delta_{PQ} + \alpha_2 H_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \alpha_3 H_{RL} H_{LR} \delta_{PQ} + \alpha_4 E_R E_R \delta_{PQ} + \alpha_5 E_R C_{RL} E_L \delta_{PQ} + \\ & 2a_{1,10} E_R H_{RL} E_L \delta_{PQ} + 2a_{1,12} E_R C_{RL} H_{LM} E_M \delta_{PQ} + \\ & \alpha_8 C_{RL} H_{LR} \delta_{Pq} + \alpha_9 H_{LL} C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \alpha_{10} H_{ML} H_{LM} C_{RR} \delta_{PQ} + \alpha_{11} E_M E_M C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \alpha_{12} E_M H_{ML} E_L C_{RR} \delta_{PQ} + \alpha_9 H_{RR} C_{PQ} - \alpha_{10} H_{RL} H_{LR} C_{PQ} - \\ & \alpha_{11} E_R E_R C_{PQ} - \alpha_{12} E_R H_{RL} E_L C_{PQ} - \alpha_5 C_{RR} E_P E_Q + \\ & \alpha_{13} C_{RL} H_{LR} E_P E_Q + \alpha_7 C_{RR} E_P H_{QN} E_N + \\ & \alpha_{14} C_{RL} H_{LR} E_P H_{QN} E_N + \alpha_8 C_{RR} H_{PQ} + \alpha_{15} C_{RL} H_{LR} H_{PQ} ] \quad (74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Pi_R = & \beta_1 C_{NN} E_R + \beta_2 C_{NL} H_{LN} E_R + \\ & \beta_3 C_{NN} H_{RP} E_P + \beta_4 C_{NL} H_{LN} H_{RP} E_P \quad (75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{PQ} = & \frac{1}{2} \alpha_2 C_{RR} \delta_{PQ} + \lambda_1 H_{RR} \delta_{PQ} + \lambda_2 H_{NL} H_{LN} \delta_{PQ} + \\ & \lambda_3 E_R E_R \delta_{PQ} + \lambda_4 E_R C_{RL} E_L \delta_{PQ} + \lambda_5 E_R H_{RL} E_L \delta_{PQ} + \\ & \lambda_6 E_R C_{RL} H_{LM} E_M \delta_{PQ} + \lambda_7 C_{RL} H_{LR} \delta_{PQ} + \\ & \alpha_3 C_{RR} H_{PQ} + \lambda_8 E_R E_R H_{PQ} + \lambda_9 E_R C_{RL} E_L H_{PQ} + \\ & \lambda_{10} E_R H_{RL} E_L H_{PQ} + \lambda_{11} E_R C_{RL} H_{LM} H_{PQ} + \\ & \lambda_{12} C_{RL} H_{LR} H_{PQ} + \lambda_{13} C_{NN} H_{PR} H_{RQ} + \\ & \lambda_{14} E_N E_N H_{PR} H_{RQ} + \lambda_{15} E_R C_{RL} E_L H_{PR} H_{RQ} + \\ & \frac{1}{2} \alpha_6 C_{RR} E_P E_Q + \frac{1}{2} \beta_4 C_{RL} H_{LR} E_P E_Q \quad (76) \end{aligned}$$

(45) denklemi dikkate alındığı zaman asimetrik toplam gerilme tansörü de aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} T_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + \alpha_1 C_{RR} \delta_{PQ} + \alpha_2 H_{RR} \delta_{PQ} + \alpha_3 H_{RL} H_{LR} \delta_{PQ} + \\ & \alpha_4 E_R E_R \delta_{PQ} + \alpha_5 E_R C_{RL} E_L \delta_{PQ} + 2a_{1,10} E_R H_{RL} E_L \delta_{PQ} + \\ & 2a_{1,12} E_R C_{RL} H_{LM} E_M \delta_{PQ} + \alpha_8 C_{RL} H_{LR} \delta_{Pq} + \alpha_9 H_{LL} C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \alpha_{10} H_{ML} H_{LM} C_{RR} \delta_{PQ} + \alpha_{11} E_M E_M C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \alpha_{12} E_M H_{ML} E_L C_{RR} \delta_{PQ} + \alpha_9 H_{RR} C_{PQ} - \alpha_{10} H_{RL} H_{LR} C_{PQ} - \\ & \alpha_{11} E_R E_R C_{PQ} - \alpha_{12} E_R H_{RL} E_L C_{PQ} - \alpha_5 C_{RR} E_P E_Q + \\ & \alpha_{13} C_{RL} H_{LR} E_P E_Q + \alpha_7 C_{RR} E_P H_{QN} E_N + \\ & \alpha_{14} C_{RL} H_{LR} E_P H_{QN} E_N + \alpha_8 C_{RR} H_{PQ} + \alpha_{15} C_{RL} H_{LR} H_{PQ} ] \\ & + [ \beta_1 C_{NN} E_P + \beta_2 C_{NL} H_{LN} E_P + \\ & \beta_3 C_{NN} H_{PR} E_R + \beta_4 C_{NL} H_{LN} H_{PR} E_R ] E_M C_M^{-1} \quad (77) \end{aligned}$$

## Sonuçlar

Mekanik bir yüklemeye maruz, mikro-boşluklu elastik bir dielektrik ortamın nonlineer davranışı modern sürekli ortamlar mekaniği kapsamında ele alınmıştır. Matematiksel model oluşturulurken, Termodinamiğin birinci yasası ve ikinci yasası (Clausius-Duhem eşitsizliği), bünye aksiyomlarından özellikle objektivite ve maddesel simetri aksiyomları ile malzemenin simetri grubuna ilişkin kavramlar, bünye fonksiyonelinin bulunması ve argümanlarının somut bir şekilde tayin edilmesi için invariantslar teorisine ait bulgular kullanılmıştır.

Bünye fonksiyonelinin argümanları Green deformasyon tansörü, hasar tansörü ve elektrik alan vektörü olarak belirlenmiştir. Bağımsız bünye değişkenleri arasında deformasyon tansörünün yer alması, gerinme tabanlı bir yaklaşımın esas alındığını göstermektedir. Bu bünye fonksiyoneli vasıtası ile malzemede ortaya çıkan gerilme, polarizasyon ve gerinme-enerjisi yoğunluğunun değişim hızına ait bünye denklemleri maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden elde edilmiştir. İncelenen malzeme esas yapısı itibarı ile izotrop olup, mikro-boşlukların varlığı nedeniyle yani hasardan dolayı anizotrop bir form kazanmıştır. Bu nedenle matris malzeme izotrop alınarak, simetrik gerilme, polarizasyon ve gerinme-enerjisi yoğunluğunun değişim hızına ait bünye denklemleri invariantslar teorisine ait bulgular kullanılarak (66), (67) ve (68) denklemleri ile nonlineer bir formda ortaya konmuştur. Bu bünye denklemlerinin daha somut bir şekilde elde edilmesi için,  $\Sigma$ 'nin bağlı olduğu invariantslarına göre türevlerinin bilinmesi gerekmektedir. Bu nedenle gerilme potansiyeli  $\Sigma$ , ikinci dereceden bir polinomla temsil edilerek invariantslarına göre türevleri hesaplanmıştır. Nonlineer davranışın derecesini tespit etmek açısından, deformasyon tansörü  $C'$ 'nin birinci dereceden, hasar tansörü  $H$  ve elektrik alan vektörü  $E'$ 'nin ikinci dereceye kadar olan etkileri dikkate alınmıştır.  $C'$ 'nin birinci dereceden etkilerinin dikkate alınma sebebi, seramik malzemelerde ortaya çıkan deformasyonların infinitesimal olmasıdır. İnfinitesimal bir deformasyonun karesi ihmal edilebilir bir etki olarak düşünülmüştür. Böyle bir kabul hiperelastik veya viskoelastik malzemeler için geçerli değildir.

Bu durumda simetrik gerilmenin, polarizasyonun ve gerinme enerjisi-yoğunluğu değişim hızının bünye denklemleri, maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden (74), (75) ve (76) denklemleri ile verilmiştir. Son olarak, (45) ifadesi dikkate alındığında asimetrik bir formda ortaya çıkan toplam gerilme (77) denklemi ile ifade edilmiştir. Bu bünye denklemleri uygun lineerleştirme işlemleri ile daha basit formlara da dönüştürülebilir.

Yukarıda elde ettiğimiz (74)-(77) bünye denklemleri üzerinde yorumlanması gereken özellikler vardır. Simetrik gerilme bünye denklemi (74)'de yer alan terimlere baktığımızda; ilk terim sıkışmazlık kabulünden kaynaklanmaktadır. İkinci terim

deformasyon tansörünün lineer etkisinden, üçüncü terim hasar tansörünün lineer etkisinden, 4. terim hasar tansörünün nonlineer etkisinden kaynaklanmaktadır. 5. terim elektrik alanının karesini içermekte olup bu etki elektrostriksiyon adını alır. Elektrostriksiyon karesel (ikinci mertebeden) bir etki olduğundan elektrik alanının yönüne bağlı değildir. Lineer etkileşimler dikkate alındığında bu etki gözlenmez. Elektrik alan şiddetinin çok küçük olduğu durumlarda ise ihmal edilebilir. 6. terim ve ondan sonraki terimler kapıl (birleşik) etkileşimleri göstermektedir. 6, 12, 16 ve 18. terimler elektrik alanının nonlineer deformasyon tansörünün lineer etkileşimlerinden, 7. terim elektrik alanının nonlineer hasar tansörünün lineer etkileşimlerinden, 8,13, 17,19 ve 20. terimler elektrik alanının nonlineer hasar ve deformasyon tansörünün ise lineer etkileşiminden kaynaklanmakta olup üçlü etkileşimleri ifade eder. 9, 10,14 ve 22. terimler deformasyon ve hasar tansörlerinin lineer etkileşiminden, 11, 13 ve 25. terimler ise deformasyon tansörünün lineer hasar tansörünün ise nonlineer etkileşimlerinden kaynaklanan terimlerdir. 21. terim hasar tansörünün ve elektrik alan vektörünün nonlineer deformasyon tansörünün lineer etkileşimlerinden kaynaklanan bir terim olup üçlü etkileşimlere ilginç bir örnektir.

Polarizasyon denkleminde (75) baktığımız zaman ise bütün terimlerde elektrik alan vektörü birinci dereceden yer almakta olup elektrostriksiyon etkinin polarizasyona katkısı gözükmemektedir. Birinci terim deformasyon tansörü ve elektrik alan vektörünün lineer etkileşiminden, ikinci ve üçüncü terim üçlü etkileşimlerden olup deformasyon ve hasar tansörü ile elektrik alan vektörünün lineer etkileşiminden, son terim ise hasar tansörünün nonlineer deformasyon tansörünün lineer elektrik alan vektörünün lineer etkileşiminden kaynaklanmaktadır.

Gerinme enerjisi-yoğunluğu değişim hızının bünye denklemi (76)'da ilk terim deformasyon tansörünün lineer etkisinden, ikinci terim hasar tansörünün lineer etkisinden, üçüncü terim ise hasar tansörünün nonlineer etkisinden kaynaklanmaktadır. 4. terim elektrostriksiyonun katkısını göstermektedir. 5 ve 18. terimler elektrik alanının nonlineer deformasyon tansörünün lineer etkileşiminden, 6 ve 10. terimler elektrik alanının nonlineer hasar tansörünün lineer etkileşimlerinden, 7, 11 ve 19. terimler elektrik alan vektörünün lineer hasar ve deformasyon tansörlerinin lineer etkileşimlerinden kaynaklanan terimleri ifade eder. 8 ve 9. terimler hasar ve deformasyon tansörlerinin lineer etkileşimlerini, 12 ve 16. terimler elektrik alan vektörü ve hasar tansörünün nonlineer etkileşimlerini, 14 ve 15. terimler deformasyon tansörünün lineer hasar tansörünün nonlineer etkileşimlerini gösterir. 13. terim elektrik alan vektörünün ve deformasyon tansörünün lineer hasar tansörünün nonlineer etkileşimini ve 17. terim ise deformasyon tansörünün lineer elektrik alan vektörü ve hasar tansörünün nonlineer etkileşimini temsil etmektedir. Benzer mülâhazalar toplam gerilme tansörü (77) için de yapılabilir. Bünye denklemlerinde ortaya çıkan katsayıların belirlenmesi, geliştirilen analitik modellerin doğruluğunun onaylanması ve eksikliklerin giderilmesi için kapsamlı deneysel çalışmalara ihtiyaç vardır. Doğruluğu onaylanmış deneysel parametreler elde edildikten sonra, sonlu elemanlar gibi sayısal yöntemler yardımıyla bu konu daha detaylı olarak incelenebilir.

## Kaynaklar

- [1]. Kachanov, L.M., 1986. Introduction to Continuum Damage Mechanics, Martinus Nijhoff Publishers, Boston, 135 p.
- [2]. Lemaitre, J., 1996. A Course on damage Mechanics, Springer-Verlag, Berlin , 228 p.
- [3]. Krajcinovic, D., 2003. Damage Mechanics, North holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Volume 41, Amsterdam, Elsevier, 760 p.
- [4]. Woo, C.W., Li, D.L., 1993. A Universal Physically Consistent Definition of Material Damage, International Journal of Solid and Structures, 30, 15, 2097-2108.
- [5]. Korkmaz, E., 2001. Sürekli Ortam Hasar Mekanikliği Yardımıyla Mekanik Davranışın Belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, 110 s.
- [6]. Krajcinovic, D., 1998. Selection of Damage Parameter – Art or Science?, Mechanics of Materials, 282, 165-129.
- [7]. Ibijola, E.A., 2002. On Some Fundamental Concepts of continuum Damage Mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191, 1505-1520.
- [8]. Makarov, P.V., Schmauder, S., Cherepanov, O.I., Smolin, I.Y., Romanova, V.A., Balokhonov, R.R., Saraev, D.Y., Sopa, E., Kizler, P., Fischer, G., Hu, S., Ludwig, M., 2001. Simulation of Elastic-Plastic Deformation and Fracture of Materials at Mico-, Meso-, and Macrolevels. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 37, 183-244.
- [9]. Borst, R., 2002. Fracture in Quasi-brittle Materials: A Review of Continuum Damage-Based Approachs. Engineering Fracture Mechanics, 69, 95-112.
- [10]. Chow, c.L., Wang, J., 1988. A Finite Element Analysis of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture. International Journal of Fracture, 38, 83-102.
- [11]. Onaran, K., 1991. Malzeme Bilimi, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul, 319 s.
- [12]. Yüksel, M., 2000. Malzeme Bilgisine Giriş (Malzeme Temel Bilgileri), TMMOB, Makine Mühendisleri Odası, Y.No: 245, Denizli, 266 s.
- [13]. Bassiouny, E., 2005. Damage Mechanics in ferroelectric Ceramics-Model and Application, Journal of Applied Sciences, 5, 257-266.
- [14]. Bassiouny, E., Ghaleb, A.F., Maugin, G.A., 1988. Thermodynamical Formulation for Coupled Electromechanical Hysteresis Effects-I. Basic Equations, Int. J. Engng. Sci., 26, 1279-1295.
- [15]. Bassiouny, E., Ghaleb, A.F., Maugin, G.A., 1988. Thermodynamical Formulation for Coupled Electromechanical Hysteresis Effects-II. Poling of Ceramics, Int. J. Engng. Sci., 26, 1297-1306.
- [16]. Bassiouny, E., Maugin, G.A., 1989. Thermodynamical Formulation for Coupled Electromechanical Hysteresis Effects-III. Parameter Identification, Int. J. Engng. Sci., 27, 975-987.
- [17]. Bassiouny, E., Ghaleb, A.F., Maugin, G.A., 1989. Thermodynamical Formulation for Coupled Electromechanical Hysteresis Effects-IV. Combined Electromechanical Loading, Int. J. Engng. Sci., 27, 989-1000.
- [18]. Usal, M.R., 1994. Fiber Takviyeli Elastik Dielektrik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışlarına Ait Matematiksel Bir Model, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri, 108 s.
- [19]. Usal, M., 2001. Biyolojik Bir Konstrüksiyon Elemanı İçin Matematiksel Modelleme, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, 232 s.
- [20]. Usal, M.R., Korkmaz, E., Usal, M., 2006. Hasarlı Elastik Ortamlar İçin Bünye Denklemleri, S.D.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10, 125-135.
- [21]. Chaboche, J.L., 1981. Continuous Damage Mechanics – A Tool to Describe Phenomena before Crack Initiation, Nuclear Engineering and Design, 64, 233-247.
- [22]. Chaboche, J.L., 1987. Continuum Damage Mechanics: Present State and Future Trends, Nuclear Engineering and Design, 105, 19-33.
- [23]. Chaboche, J.L., 1988. Continuum Damage Mechanics: Part I-General Concepts, Journal of Applied Mechanics, 55, 59-64.
- [24]. Lemaitre, J., 1985. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture, J. Engrg. Mater. Tech., Trans ASMR 107, 83-87.
- [25]. Simo, J.C., Ju, J.W., 1978. Strain and Stres-Based Continuum Damage Models-I Formulation, Int. J. Solids struct. 23, 7, 821-840.
- [26]. Weitsman, Y., 1988. Damage Coupled With Heat conduction in Uniaxially Reinforced Composites, Journal of Applied Mechanics, 55, 641-647.
- [27]. Weitsman, Y., 1988. A Continuum Damage Model for Viscoelastic Materials. Journal of Applied Mechanics, 55, 773-780.
- [28]. Eringen, A.C., Maugin, G.A., 1990. Electrodynamics of Continua, vol.I. Foundations and Solid Media, North – Holland, 436 p.
- [29]. Eringen, A.C., Maugin, G.A., 1990. Electrodynamics of Continua, vol.II. Fluids and Complex Media, North – Holland, 782 p.
- [30]. Parkus, H., 1979. Electromagnetic Interactions in Elastic Solids, Springer-Verlag, Wien-New York.
- [31]. Erdem, A.Ü., Usal, M.R., Usal, M., 2005. Keyfi Fiber takviyeli Viskoelastik Piezoelektrik Bir Cismin Elektro-Termomekanik Davranışı için Matematiksel Bir Model, Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der., 20, 305-319.
- [32]. Erdem, A.Ü., Usal, M., Usal, M.R., 2005. İzotropik Matris Malzemesi Olan Fiber Takviyeli Dielektrik Viskoelastik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışı için Matematiksel Bir Model, Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der., 20, 321-334.
- [33]. Spencer, A.J.M., 1971. Theory of Invariants, In Continuum Physics, Vol.I., (Ed., A.C. Eringen), Academic Pres, N.Y., and London, 353 p.