

## Hasarlı Elastik Ortamlar İçin Bünye Denklemleri

M. R. USAL<sup>1</sup>, E. KORKMAZ<sup>1</sup>, M. USAL<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Süleyman Demirel Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Makine Eğitimi Bölümü Isparta  
e-mail: [usalmr@tef.sdu.edu.tr](mailto:usalmr@tef.sdu.edu.tr) (M.R. USAL), [korkmazi@tef.sdu.edu.tr](mailto:korkmazi@tef.sdu.edu.tr) (E. KORKMAZ), [esma@mmf.sdu.edu.tr](mailto:esma@mmf.sdu.edu.tr) (M. USAL)

**Özet:** Sürekli-Ortam Hasar Mekanikliği; Mikro-çatlak oluşumunun veya mikro-boşlukların büyümesinin bir sonucu olarak, yapısal zayıflamaya uğrayan elastik veya inelastik malzemelerle ilgilidir. Bu çalışmada, Sürekli-Ortam Hasar Mekanikliği çerçevesinde, mekanik yüklemeye maruz, mikro-boşluklu, elastik bir ortam için matematiksel bir model geliştirilmiştir. Böyle bir ortamda oluşan gerilme dağılımının ve hasar derecesine bağlı olarak değişen gerilme-enerjisi-yoğunluğunun değişim hızının bünye denklemleri elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Sürekli-Ortam, Hasar, Helmholtz serbest enerjisi, Gerilme, Gerilme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızı, Bünye denklemleri.

## Constitutive Equations for Damaged Elastic Media

**Abstract:** Continuum Damage Mechanics (CDM) deals with elastic or inelastic materials which undergo structural weakening as a result of micro-crack formation or void growth. In this study, in the frame of Continuum Damage Mechanics, a mathematical model is developed. This mathematical model represents an elastic media which has micro-voids and subjected to a mechanical loading. This investigation presents constitutive equations of stress and strain-energy density release rate for the media under consideration.

**Keywords:** Continuous media, Damage, Helmholtz free energy, Stress, Strain-energy density release rate, Constitutive equations.

### Giriş

Sürekli-Ortamlar Hasar Mekanikliği; mekaniğin birçok dallarını, mühendislik matematiğini ve malzeme bilimini bir arada kullanmayı gerekli kılan bir araştırma alanıdır. Hasar mekaniği, değişik yüklerin etkisi altında kalan malzemelerde genel manada “hasar” kapsamı içine giren bozulma, gerileme ve işe yaramama gibi durumları içeren mekanizmaları mekanik değişkenlere bağlı olarak inceler. Literatürde, Sürekli-Ortamlar Hasar Mekanikliği konusunda ve özellikle de sürünme ve yorulma hasarı ile ilgili ilk teorilerin 1958’de Kachanov, 1969’da da Rabotnov tarafından ileri sürüldüğü ifade edilmektedir (1,2).

Kachanov, daha sonra yayımlanan, Sürekli-Ortam Hasar Mekanikliğine giriş adlı eserinde hasar çeşitleri, hasar değişkenleri, izotropik hasar, hasarın kinetik denklemi, hasarlı elastik cisimler, tek eksenli gerilme altında sürünme ve çatlak, çok eksenli gerilmeler altında sürünme ve çatlak, çatlak büyümesi ve yorulma hasarı konularını incelemiştir (3). Klasik Çatlak Mekanikliği ile Sürekli-Ortamlar Hasar Mekanikliği arasındaki sınırları ve ilişkileri açıkça ifade eden Lemaitre (1996), o zamana kadar yapılan çalışmalarda tanımlanan farklı hasar değişkenlerini ve bu değişkenlere göre elde edilen bünye denklemlerini özet olarak vermiştir (4). Sürekli-Ortamlar Hasar Mekanikliği ile ilgili temel kavramlar ve tanımlar, hasar parametresinin seçimi, gevrek ve sünek deformasyon prosesleri, ve hasarlı malzemelerin bünye

denklemleri gibi konular Krajinovic tarafından da incelenmiştir (5-9). Hasar mekaniğini; istatistiksel modeller, mikromekanik modeller ve sürekli ortam modelleri şeklinde sistematik tarzda alt bölümlere

ayırarak inceleyen Krajinovic (2003), bu eserinde konuyla ilgili olan yaklaşık 900 civarında kaynağı referans vermektedir (10). Bilindiği gibi, mikro ölçek göz önüne alındığında, atomlar arası mesafe kritik bir değerde iken, atomlar arası enerji maksimum değerine ulaşır. Dış yüklemeler neticesinde atomlar arasındaki bu mesafenin değişmesi sonucunda atomlar arası etkileşim enerjisinde de bir değişim söz konusudur. Bunun bir sonucu olarak da atomik bağlar zayıflamaya ve kohezyon kuvvetleri de azalmaya başlar. Bu durum malzeme içerisinde mikro-boşluk ve süreksizlik yüzeyleri meydana getirir. Böylece, malzeme içerisinde mikro düzeyde hasarın başladığı söylenebilir (11).

Hasar mekaniğinde hasar; mikro, mezo ve makro ölçek olmak üzere üç farklı seviyede ele alınmaktadır. Mikro-ölçekte hasar, kusurların veya ara yüzeylerin yakın civarında dislokasyonların ve mikro gerilmelerin birikmesi ve bağların kopmasıdır. Orta-ölçekli seviyede (mezo ölçek) ise; temsili bir hacim elemanı içerisinde mikro-çatlakların veya mikro-boşlukların birlikte hareket etmesi ve büyümesi ile beraber bir çatlak başlangıcı oluşur. Makro ölçekli seviyede ise çatlakların ve boşlukların büyümesi söz konusudur. İlk iki ölçek

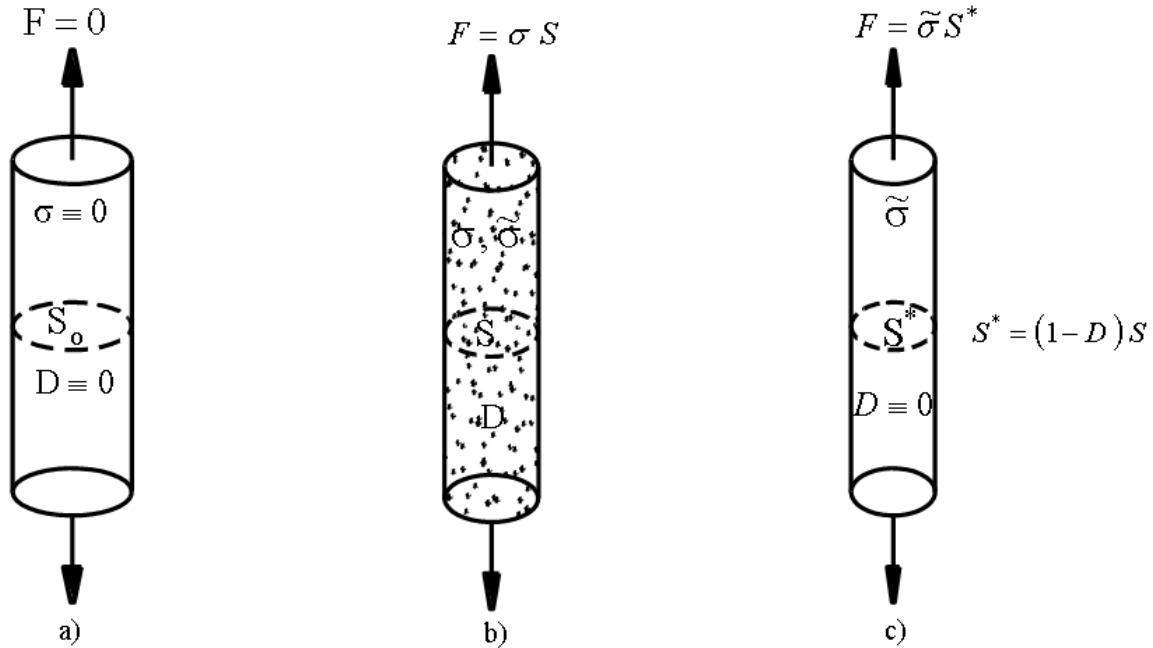
Sürekli-Ortamlar Mekanikinin hasar değişkenleri vasıtasıyla incelenebilir. Makro ölçek ise kırılma mekanikinin bir konusudur (4,10). Sürekli ortamlar mekanikinin temel ilkelerine ve efektif gerilme kavramına dayalı olarak hasar modellerini sonlu elemanlar yöntemi ile inceleyen sistematik bir çalışma Kattan ve Voyiadjis tarafından gerçekleştirilmiştir (12). İzotropik elastik hasarlı malzemelerin bünye denklemlerine ait genel ifadelerin tersinmez ortamlar termodinamiğinin temel yasasından türetildiği bir çalışmada, hasarlı bir malzeme için Helmholtz serbest enerjisi bünye fonksiyoneli olarak seçilmiş ve bu enerjinin analitik olması varsayımına dayanarak iki durum değişkenine göre Taylor serisine açılmıştır. Gerilme eşdeğerliği ilkesine bağlı olarak geliştirilen klasik hasar bünye denkleminin bu çalışmada verilen genel ifadenin basitleştirilmiş bir formu olduğu ifade edilmektedir (13). Ferroelektrik malzemelerde hasarın elektro-mekanik davranışını inceleyen Bassiouny, termodinamik ilkelere yola çıkarak fenomenolojik bir model geliştirmiştir. Effektif büyüklükleri göz önüne alarak farklı tipteki elektro-mekanik kapling etkileri incelemiştir (14).

Bu çalışmada, Sürekli Ortamlar Hasar Mekanikliği kapsamında temsili bir hacim elemanı göz önüne alınarak, hasarın mekanik temsili, ikinci dereceden simetrik tansör karakteri gösteren iki adet iç durum değişkeni ile ifade

edilmiştir. Sürekli Ortamlar Mekanikliği çerçevesinde, balans denklemleri özetlenmiş ve fazla detaya girmeden, enerji denklemi ile entropi eşitsizliğinin birleştirilmiş formu verilmiştir. Gerekli bünye aksiyomları dikkate alınarak gerilme potansiyelinin hangi argümanlara bağlı olduğu belirlendikten sonra bünye teorisi formülasyonuna geçilmiş ve hasarlı-elastik izotrop ortam için bir bünye modeli oluşturulmuştur. Maddesel koordinat sisteminin ful-ortogonal transformasyonları dikkate alınarak, gerilme potansiyelinin bağlı olduğu ortak invariyanlar belirlendikten sonra “gerilme” ve “gerilme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızı” na ait bünye denklemleri elde edilmiştir.

### Hasarın Mekanik Temsili

Bünye denklemlerini elde etmek ve bu sayede de mekanik davranışı belirlemek için hasar değişkenlerinin öncelikle tespit edilmesi, serbest enerjinin hasar değişkeninin bir fonksiyonu olarak ele alınması ve invariyan ölçülerinin belirlenmesi gerekir. Bu amaçla, hasar değişkenlerinin yapısı belirlenmek durumundadır. Başlangıçta lineer, homojen ve izotrop olarak kabul edilen malzeme, hasar nedeniyle anizotrop bir hale gelmektedir. Örneğin tek eksenli gerilme halinde D ile gösterilen hasar parametresi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir (şekil 1):



Şekil 1. Tek eksenli çekme altındaki bir çubukta hasar parametresinin tanımı (4)

Malzemede hasarı temsil eden dağılı mikroskobik çatlaklar ve boşlukların varlığından dolayı, yük taşıyan efektif alan başlangıçtaki S₀ alanından daha küçüktür. Bu durumda, mikro-boşluklar çıkarıldıktan sonra geriye kalan efektif alanı temsil eden S\* aşağıdaki gibi verilir. Burada DS, hasar nedeniyle boşluğa dönüşen alanın değerini temsil etmekte olup DS<S dir. O halde, D < 1 için

$$S^* \equiv S - DS \quad \Rightarrow \quad D = 1 - \frac{S^*}{S} \quad [1]$$

yazabiliriz. Burada S\* hasarsız kesit alanını temsil etmektedir. Yukarıda verilen tanımı göz önüne alarak aşağıdaki sınırlamalar yazılır.

$$0 \leq D \leq 1$$

$$D = 0 \text{ (Başlangıç hasarsız durum)} \quad [2]$$

$$D = 1 \text{ (Son kopmuş, kırılmış durum)} \quad [3]$$

Yük taşıyan toplam alandaki azalma, dış kuvvet  $F$  ile oluşturulan  $\sigma$  gerilmesinin dağılımını belirler. Tanım [1]'e dayanarak efektif gerilme  $\tilde{\sigma}$  için aşağıdaki eşitliği yazarız.

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S^*} = \frac{F}{S(1-D)} = \frac{\sigma}{(1-D)} \quad [4]$$

Bazı araştırmacılar aynen efektif gerilme ilkesine benzer şekilde efektif gerilme için de uygun bir tanımlama yapmıştır (4,15). İzotropik hasar durumu için eşdeğer gerilmeyi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\tilde{\varepsilon} = (1-D)\varepsilon$$

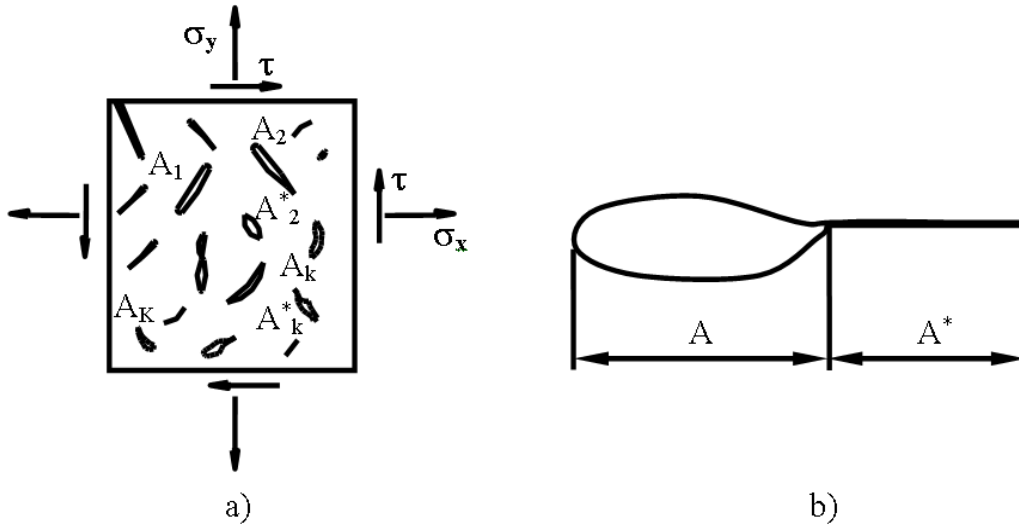
Efektif gerilme prensibini kullanarak hasarlı bir malzeme ile hasarsız bir malzeme arasındaki ilişkiyi de;

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \Rightarrow \tilde{E} = E(1-D) \quad [5]$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada, DE hasar nedeniyle elastisite modülünde meydana gelen azalmayı,  $\tilde{E}$  ise hasarlı malzemenin elastisite modülünü göstermektedir.

Şimdi, hayali hasarsız durumu tanımlamak için gerçek hasarlı duruma mekanik olarak eşdeğer,  $S^*$  kesit alanlı ve uygulanan  $F$  yükünün etkisinde hayali bir eleman düşünebilir ve bu durumu hasarsız durum olarak adlandırabiliriz (Şekil 1c). Eğer mekanik olarak eşdeğer olan iki durumdaki  $S$  ve  $S^*$  alanları arasındaki ilişki bir şekilde belirlenebilir ise hasar değişkeni  $D$ , [1] denklemi yardımıyla tayin edilebilir (2,4).

Bazı araştırmalarda, hasar değişkenlerini belirleyebilmek için  $K$  sayıda mikro çatlak içeren bir temsili hacim elemanı (THE) göz önüne alınmıştır. Herhangi bir  $k$ -ıncı mikro çatlağın açık veya aktif kısmı  $A^{(k)}$  ile, bu mikro çatlağın kapalı veya pasif yüzeyini de  $A^{*(k)}$  ile göstermiştir (şekil 2 a,b). Bir çatlağa ait aktif veya pasif yüzeyler gerilme, sıcaklık ve nem oranına göre kendi aralarında yer değiştirebilir. Buna rağmen Weitsman bu açık ve kapalı yüzeylerin belli bir zaman aralığında malzemenin durumunu karakterize eden bağımsız değişkenler olarak seçilebileceğini ifade etmektedir (16,17).



Şekil 2. a)  $K$  sayıda mikro çatlak içeren temsili hacim elemanın düzlemsel görüntüsü (17), b) Bir mikro çatlağın açık ve kapalı yüzeyleri

Makro seviyede gerilmeler ve gerinmeler THE'nın hacmi üzerinde ortalama büyüklüklerdir. İnfinitesimal deformasyonları da bu makro büyüklükler arasında sayabiliriz. THE'nın davranışını tam anlamıyla dikkate almak için  $A^{(k)}$  ve  $A^{*(k)}$ , ( $k=1, \dots, K$ ) yüzeylerini temsil eden  $2K$  sayıda çatlak parametresini dikkate almak gerekir. Bu yüzeylerin gerçek şekli meso ölçekte tam olarak bilinmediğinden, Weitsman bunları eşdeğer düzlemsel yüzeyler olarak düşünerek  $\mathbf{A}^{(k)} = A^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}$  ve

$\mathbf{A}^{*(k)} = A^{*(k)} \mathbf{n}^{(k)}$  vektörleri ile temsil etmiştir ( $k = 1, \dots, K$ ). Burada  $\mathbf{n}^{(k)}$ , bir mikro çatlak düzlemine ait birim normal vektörü göstermektedir (17). Malzeme içerisinde bir maddesel nokta civarında konveksiteleri farklı olan iki mikro çatlak göz önüne alalım. Malzeme üzerine gelen yükleme durumuna göre, farklı konveksitelere sahip çatlak yüzeylerinden dolayı farklı davranışlar gösterebilir. Eğrilik yarıçapları çok büyük olan farklı infinitesimal çatlak yüzeyleri mekanik açıdan eşdeğer kabul edilebilir. Bu durumda çatlak yüzeyinin topolojik temsili çatlak

yüzeyinin yönünden bağımsız olarak ifade edilebilir. Matematiksel olarak bu temsili, iki vektörün diyadik çarpımı ile oluşturulan bir simetrik tansör kullanılarak gösterebiliriz. Bu durumda, her bir mikro çatlağı aşağıdaki gibi simetrik diyadlarla tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{H}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \text{ ve } \mathbf{H}^{*(k)} = \mathbf{A}^{*(k)} \otimes \mathbf{A}^{*(k)}, \quad [6]$$

$$H_{ij}^{(k)} = A_i^{(k)} A_j^{(k)},$$

$\mathbf{A}^{(k)}$  ve  $\mathbf{A}^{*(k)}$  yüzeylerinin ölçüsü ve yeri hakkında detaylı bilgiler ancak istatistiksel olarak mikro ölçekte mevcut olduğundan, Sürekli-Ortamlar Mekaniğinin kullanıldığı mezo ölçekte [6] ifadesi ile verilen tansörel ifadelerin birleşik etkilerini aşağıdaki diyadik çarpımların toplamları ile gösterebiliriz. Bu işlem, mikro ölçekten mezo ölçeye geçerken yapılan homojenleştirme anlamına gelmektedir.

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{(k)} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \text{ ve } \mathbf{H}^* = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{*(k)} \otimes \mathbf{A}^{*(k)} \quad [7]$$

böylece hasarın etkisi mezo ölçekte iki adet iç durum değişkeni ile ifade edilebilmektedir. Bu iki durum değişkeni de tanımları gereğince ikinci dereceden simetrik tansörel karakter taşır. İnfinitesimal deformasyonların göz önüne alınması, hasarı temsil eden tansörlerin de ayrı infinitesimal karakterde olması anlamına gelmez (17). Dolayısıyla bir kuvvet serisi temsili gerilmeler için kullanılırken, hasar tansörleri için uygun olmayabilir. Biz bu çalışmada bünye değişkeni olarak, sadece açık mikro yüzeylerin etkisini dikkate alan bir tek hasar tansörünü göz önüne alacağız.

## Formülasyon-Balans Denklemleri

Bu bölümde; çalışmamızın hacmini büyültmemek için, Sürekli-Ortamlar Mekaniğinin denge denklemlerini aşağıdaki gibi yerel formda özet olarak veriyoruz. Bu konuda detaylı bilgiler Sürekli-Ortamlar mekaniği ile ilgili temel kaynaklarda bulunabilir (18-20).

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{Kütlenin korunumu}) \quad [8]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0 \quad (\text{Lineer momentumun balansı}) \quad [9]$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^T \text{ veya } t_{ij} = t_{ji} \quad (\text{Açısal momentum balansı}) \quad [10]$$

$$\rho \dot{\varepsilon} - \mathbf{t} : \mathbf{d} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho h = 0 \quad (\text{Enerjinin korunumu}) \quad [11]$$

$$\rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \geq 0 \quad (\text{Entropi eşitsizliği}) \quad [12]$$

Burada;  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $h$ ,  $\eta$  ve  $\theta$  sırasıyla birim hacim için kütle yoğunluğu, hız vektörü, gerilme tansörü, birim hacim başına gövdesel kuvvet yoğunluğu, ivme vektörü, şekil değiştirme hızı tansörü

$$\left( \mathbf{d}_{kl} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{k,l} + \mathbf{v}_{l,k}) \right), \text{ ısı akısı vektörü, birim kütle}$$

başına ısı kaynağı, entropi yoğunluğu ve mutlak sıcaklığı ifade etmektedir. Sembollerin üzerindeki noktalar ilgili büyüklüğün hareketi takiben türevini göstermektedir

(örneğin,  $\dot{\rho} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$ ). Yukarıda verilen [11] ve

[12] ifadelerini uygun şekilde birleştirdiğimiz zaman

$$-\frac{\rho}{\theta} (\dot{\varepsilon} - \theta \dot{\eta}) + \frac{1}{\theta} \mathbf{t} : \mathbf{d} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad [13]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Entropi yoğunluğunun maddesel türevi termodinamik bir proses içinde kontrol edilemeyeceğinden, bu türevi [13] eşitsizliğinde ortadan kaldırmak için,

$$\Psi \equiv \varepsilon - \theta \eta \quad [14]$$

şeklinde bir Legendre transformasyonu tanımlanır. Burada,  $\Psi$  Helmholtz serbest enerjisi adını alır ve Termodinamik bakımdan enerjinin kullanılabilir kısmını temsil eder. Yukarıda verilen tanımdan [14],  $\varepsilon$ 'u çekip maddesel türevini alarak [13] eşitsizliğinde kullanırsak, entropi eşitsizliği kontrol edilebilir bağımsız değişkenler cinsinden,

$$-\rho (\dot{\Psi} + \eta \dot{\theta}) + t_{kl} v_{(l,k)} - \frac{1}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad [15]$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$v_{(l,k)} = d_{kl} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l}, \quad [16]$$

$$C_{KL} \equiv x_{k,K} x_{k,L}, \quad \dot{C}_{KL} \equiv \frac{D C_{KL}}{D t} = \frac{\partial C_{KL}}{\partial t}$$

olup,  $C_{KL}$  Green deformasyon tansörü,  $d_{kl}$  ise deformasyon hızları tansörü olarak bilinmektedir, semboller üzerindeki noktalar, ilgili büyüklüğün hareketi takiben türevini göstermektedir. Kütle korunumunun maddesel koordinatlardaki ifadesi olan

$$\rho = \rho_0 j^{-1} \quad (\text{Kütlenin korunumu}), \quad [17]$$

$$j \equiv \det [x_{k,K}] = \det \underline{\underline{F}}$$

denklemleri yardımıyla [15] ve [16] ifadelerini kullanarak;

$$-\rho_0 (\dot{\Psi} + \eta \dot{\theta}) + j t_{kl} d_{lk} - \frac{j}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad [18]$$

yazılabilir. Burada  $\rho_0$  cismin başlangıç durumundaki kütle yoğunluğunu göstermektedir. Gerilme potansiyelini

$$\Sigma \equiv \rho_0 \Psi \quad [19]$$

şeklinde tanımlayarak aşağıda verilen ifadeye ulaşırız.

$$-\left(\dot{\Sigma} + \rho_0 \eta \dot{\theta}\right) + j t_{k1} d_{1k} - \frac{j}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad [20]$$

$\Sigma$ 'nın [20] ile verilen ifadesindeki argümanların tümü uzaysal koordinatlara bağımlı olduğundan, Objektivite aksiyomu gereğince [20] ifadesindeki diğer terimleri de objektif olacak tarzda ifade edelim. Bunun için aşağıdaki tanımları,

$$T_{KL} = j X_{K,k} X_{L,l} t_{kl}, \quad [21]$$

$$t_{kl} = j^{-1} x_{k,K} x_{l,L} T_{KL}$$

$$Q_K = j X_{K,k} q_k, \quad [22]$$

$$q_k = j^{-1} x_{k,K} Q_K$$

$$\Sigma = \rho_0 \Psi = \rho_0 (\varepsilon - \theta \eta) \quad [23]$$

ve

$$\frac{1}{2} \dot{C}_{KL} = d_{kl} x_{k,K} x_{l,L}, \quad [24]$$

$$\theta_{,K} = \theta_{,k} x_{k,K}$$

büyükliklerini [20] denklemi ile verilen entropi eşitsizliğinde yerine yazdığımız zaman vektörel ve tansörel büyükliklerin maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden entropi eşitsizliği,

$$-\left(\dot{\Sigma} + \rho_0 \eta \dot{\theta}\right) + \frac{1}{2} T_{KL} \dot{C}_{KL} - \frac{1}{\theta} Q_K \theta_{,K} \geq 0 \quad [25]$$

şeklinde yazılır (21). Bu aşamadan sonra, gerekli bünye aksiyomlarını kullanarak gerilme potansiyelinin hangi argümanlara bağlı olduğunu açıkça ifade etmek gerekir. Gelecek bölümde bu işlemler yapılacaktır.

## Gerilme Potansiyelinin Tanımı

Kozalite ve Determinizm aksiyomlarına göre [18, 19]  $\Sigma$ ,  $(\mathbf{X}$  maddesel noktasının  $t$  anındaki gerilme potansiyeli) cismi meydana getiren tüm maddesel noktaların hareket ve sıcaklık tarihine bağlıdır. Buna göre;

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'), \mathbf{X}], \mathbf{X}' \in B, -\infty < t' < t \quad [26]$$

Burada  $t$  şimdiki veya sonraki herhangi bir zaman,  $t'$  de geçmişteki bir zamandır. Burada ele aldığımız durum uyarınca malzemenin hafızasının olmadığını düşünürsek bu ifade;

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t), \theta(\mathbf{X}', t), \mathbf{X}] \quad [27]$$

şekline dönüşür. Diğer taraftan objektivite aksiyomu  $\Sigma$ 'nın;  $\mathbf{X}'$  maddesel noktalarının bireysel hareketlerine değil, fakat  $\mathbf{X}'$  ve  $\mathbf{X}$  in hareketlerinin farkına bağlı olduğunu belirler. Yakın civarsallık aksiyomu ise,

$\Sigma$ 'nın argümanlarına olan bağımlılığının  $\mathbf{X}'$  ve  $\mathbf{X}$  arasındaki mesafe arttıkça hızla sönümleneceğini ifade eder. Bu aksiyomların sağlanması için gerilme potansiyeli aşağıdaki gibi yazılmalıdır.

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[C_{KL}(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}, \mathbf{L}_K] \quad [28]$$

Burada  $\mathbf{L}_K$  "Maddesel tasvir vektörü" adını alır ve ortamın anizotropisini belirlemeye yarar. Ayrıca, incelenen ortamdaki Termodinamik proseslerin izotermal şartlarda ( $\theta_{,K} = 0$ ) gerçekleştiği kabul edilmiştir.

Yukarıda verilen [28] no'lu ifade, nonlinear ortamların diğer fiziksel etkileşimlerini dikkate alabilme açısından da bir prototip oluşturmaktadır (21). Bu çalışmada, malzemenin mikro-boşlukların varlığı nedeniyle yönlü bir ortam özelliği kazanmış olduğu, yani hasardan dolayı anizotropik bir yapının oluştuğu düşünülmektedir. Başlangıç durumunda malzemenin izotrop olduğunu ve anizotropinin sadece mikro-boşlukların dağılımından kaynaklandığını farz ediyoruz. Böyle bir ortam için maddesel tasvir vektörlerinin rolünü, açık mikro çatlak yüzeylerinin temsili hacim elemanı içerisindeki ortalama değerlerini temsil eden  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$  vektörü ile bu vektörün zamanla değişimini gösteren  $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t)$  vektörü üstlenecektir. Bu vektörleri, temsili hacim elemanına ait herhangi bir karakteristik yüzeyin alanına bölerek boyutsuz hale getirdiğimizi düşünüyoruz. O halde mekanik bir yüklemeye maruz, boşluklu ve bu boşlukların zamanla şekillerinin değiştiği düşünülen elastik bir ortamın gerilme potansiyelindeki argümanları;

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[C_{KL}(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}, t), \mathbf{A}(\mathbf{X}, t), \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}] \quad [29]$$

şeklinde ifade edebiliriz. Diğer taraftan, malzeme mikro-boşluk yüzeylerinin pozitif ve negatif taraflarını fark edemeyeceği için  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$  ve  $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t)$  vektörüne olan bağımlılığı,

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \quad \dot{\mathbf{H}} \equiv \dot{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \dot{\mathbf{A}} \quad [30]$$

şeklinde tansörel çarpımlarıyla ifade edebileceğimizi daha öncede belirtmiştik. Bunu indeks formunda ise aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$H_{KL} \equiv A_K A_L, \quad \dot{H}_{KL} \equiv \dot{A}_K A_L + A_K \dot{A}_L \quad [31]$$

Bu durumda gerilme potansiyeli;

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma(C_{KL}, H_{KL}, \dot{H}_{KL}, \theta) \quad [32]$$

olup malzemenin homojen olduğu kabul edilerek (izotropik hasar)  $\mathbf{X}'$ e olan doğrudan bağımlılık ortadan kaldırılmıştır. Bu noktada, incelediğimiz mikro-boşluklu ortam için, gerilme potansiyelinin hangi argümanlara

bağlı olduğu ortaya çıkmıştır. Ancak bu argümanlara nasıl bağlı olduğunu daha sonraki işlemler vasıtasıyla belirleyeceğiz (22).

## Bünye Teorisi Formülasyonu

$\Sigma$ 'nın maddesel türevini [32] denkleminde

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} = & \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} + \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{KL}} \dot{H}_{KL} \\ & + \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{H}_{KL}} \ddot{H}_{KL} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} \end{aligned} \quad [33]$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeyi entropi eşitsizliğinde, [29], yerine yazıp düzenlediğimiz takdirde,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} T_{KL} - \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \right) \dot{C}_{KL} - \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{KL}} \dot{H}_{KL} \\ & - \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{H}_{KL}} \ddot{H}_{KL} - \rho_0 \left( \eta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} Q_k \theta_{,k} \geq 0 \end{aligned} \quad [34]$$

ifadesini elde ederiz. Yukarıda verilen [34] eşitsizliğindeki argümanları sağdan başlayarak  $\theta$  yı  $\dot{\theta}$  ve  $\theta_{,k}$  şeklinde,  $\dot{H}$ 'nin türevini  $\ddot{H}$  şeklinde ve  $H$  yı  $\dot{H}$  şeklinde keyfi olarak değiştirebileceğimizden, [34] ifadesinin her termodinamik proseste geçerli olabilmesi için,  $\dot{\theta}$ 'nin,  $\theta_{,k}$ 'nin,  $\ddot{H}_{KL}$ 'nin ve  $\dot{C}_{KL}$ 'nin katsayıları sıfır olacaktır.  $\dot{H}_{KL}$ 'nin katsayısı sıfır olamaz, çünkü  $\dot{H}_{KL}$ ,  $\Sigma$ 'nın argümanlarında mevcut olduğu için  $\dot{H}_{KL}$  keyfi olarak değiştirilemez. O halde  $\dot{H}_{KL}$ 'nin katsayısına, gerinme-enerjisi-yoğunluğunun değişim hızı olarak adlandırılan  $Y_{KL}$  şeklinde bir atama yapılırsa,  $Y_{KL}$  aşağıdaki gibi tanımlanabilir (23,24).

$$\bar{Y}_{KL} \equiv - \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{KL}} \quad [35]$$

Ayrıca, pozitif bir büyüklükle uğraşmak için;  $Y_{KL} \equiv -\bar{Y}_{KL}$  tanımlaması kullanılarak, gerinme-enerjisi-yoğunluğunun değişim hızı aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$Y_{KL} \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{KL}} \quad [36]$$

[34] eşitsizliğindeki  $\dot{C}_{KL}$ ,  $\ddot{H}_{KL}$ ,  $\dot{\theta}$  ve  $\theta_{,k}$ 'nin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} T_{KL} = & 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}}, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{H}_{KL}} = 0 \\ \eta = & - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}, \quad Q_k = 0 \\ \bar{Y}_{KL} \dot{H}_{KL} \geq & 0, \quad -Y_{KL} \dot{H}_{KL} \geq 0 \\ Y_{KL} \dot{H}_{KL} \leq & 0 \end{aligned} \quad [37]$$

Yukarıda verilen [37] ifadelerinde, başlangıçta kabul ettiğimiz şekilde ortamda ısı iletiminin olmadığı ve serbest enerji yoğunluğunun da hasarın maddesel değişim hızına bağlı olmadığı görülmektedir. Buna göre serbest enerji yoğunluğunun bağlı olduğu argümanlar ve iç enerji aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma (C_{KL}, H_{KL}, \theta) \quad [38]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0} (\Sigma + \rho_0 \theta \eta) \quad [39]$$

[37]<sub>1</sub> ifadesini, [21]<sub>2</sub> ifadesine götürürsek, Cauchy gerilme tansörü için,

$$t_{k1} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} x_{1,K} \quad [40]$$

ifadesi elde edilir. Ortam sıkışmaz olduğu takdirde,  $j^2 = \det \mathbf{C} = 1$  veya  $\text{III} = 1$  şartı sağlanmalıdır (18,19). Buna göre [40] denkleminde  $\Sigma$  yerine kendisine eşdeğer olan ve fakat sözü edilen kısıtlamayı içeren aşağıdaki fonksiyon alınabilir.

$$\Sigma - p (\mathbf{x}, t) (j-1) \quad [41]$$

[41] ifadesindeki  $p$ , bir Lagrange çarpanıdır. Bu ifadedeki fonksiyonun  $x_{k,K}$  ya göre türevi alınıp [40] denkleminde yerine yazılırsa,

$$t_{k1} = -p \delta_{k1} + 2 x_{k,K} x_{1,L} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad [42]$$

denklemini elde edilir. Bu ifadenin maddesel koordinatlardaki formu,

$$T_{KL} = -p C_{KL}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad [43]$$

şeklinde elde edilir (25). Burada,  $C_{KL}^{-1} = X_{K,k} X_{L,k}$  Piola şekil değiştirme tansörü olarak bilinir. Gerinme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızı, bilindiği gibi daha önce  $Y_{KL} \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{KL}}$  şeklinde tanımlanmıştı. Bu ifadede  $\Sigma$ 'nın

deformasyon gradyanına göre türevi yer almadığı için

Lagrange çarpanı sıfır olur. Bu durumda elde etmemiz gereken bünye denklemleri, yapılan kabule bağlı olarak  $T_{KL}$  ve  $Y_{KL}$  dir ve bunların serbest enerji fonksiyonu  $\Sigma$  'ya bağlı olduğu [36] ve [43] denklemlerinden açıkça görülmektedir. O halde yapılacak ilk iş  $\Sigma$  'nın açık formunu ortaya koymak olacaktır.

## Hasarlı-Elastik-İzotrop Ortam İçin Bünye Modelinin Oluşturulması

Bu çalışmada, mekanik yüklemeye maruz mikro-boşluklu elastik ortamın izotrop olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda  $\Sigma$  'nın argümanlarının somut olarak tayini için, invariants teorisine ait bulgular kullanılmıştır. Ortamın anizotropisi sadece mikro-çatlaklar veya mikro-boşluklardan kaynaklanmaktadır. Buna göre  $\Sigma$  gerilme potansiyelinin formu maddesel koordinat sisteminin ful-ortogonal transformasyon grubu altında invariants kalmalıdır (26). Bunu matematiksel olarak ifade edersek  $\Sigma$  'nın aşağıdaki kısıtlamayı sağlaması gerekir.

$$\Sigma(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \theta) = \Sigma(\mathbf{MCM}^T, \mathbf{MHM}^T, \theta) \quad [44]$$

Burada  $\mathbf{M}$ , maddesel koordinat sistemlerinin ful-ortogonal transformasyonlarını gösterdiğinden ortogonal bir matris olup,  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$  şartını sağlamaktadır. İnvaryantlar teorisinden biliyoruz ki, bu argümanların skaler bir fonksiyonu olan  $\Sigma$  'nın, bu argümanlara müşterek invariantsları vasıtası ile bağlı olması gerekir. Buna göre,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{H}$  simetrik matrislerinin birbirinden bağımsız 8 adet müşterek invariantslarının olduğunu gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \text{tr} \mathbf{C}^2, \quad I_3 = \text{tr} \mathbf{C}^3, \quad I_4 = \text{tr} \mathbf{H}, \\ I_5 &= \text{tr} \mathbf{H}^2, \quad I_6 = \text{tr} \mathbf{H}^3, \quad I_7 = \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{H}, \\ I_8 &= \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{H}, \quad I_9 = \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{H}^2, \quad I_{10} = \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{H}^2 \end{aligned} \quad [45]$$

$\mathbf{H}$  hasar tansörünü,  $\mathbf{A}$  vektörünün kendisi ile tansör çarpımı olacak şekilde seçtiğimizden [30]<sub>1</sub>,  $I_9 = I_4$ ,  $I_7$  ve  $I_{10} = I_4$ ,  $I_8$  olacağından  $I_9$  ile  $I_{10}$  invariantslarını, buna dayanarak invariantslar listesinden çıkarabiliriz. İnvaryantların kendisini teşkil eden birimlerin simetrik bir fonksiyonu olması gereğine dayanarak, yukarıda hasar tansörü için yaptığımız bu kabul genelliğe hanel getirmez. Bu durumda serbest enerji fonksiyonumuz yukarıda tanımlanan argümanların fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8) \quad [46]$$

İkinci dereceden bir tansör olan Green deformasyon tansörünün asal invariantslarının

$$I = I_1, \quad \Pi = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2), \quad \text{III} = \frac{1}{6}(I_1^3 - 3I_1 I_2 + 2I_3) \quad [47]$$

şeklinde olduğu dikkate alınarak [45] ifadesindeki ( $I_1, I_2, I_3$ ) invariantsları yerine, [47] denkleminde verilen asal invariantslar kullanılabilir. Ortam sıkışmaz kabul edildiğinden III=1 olur. Bu durumda  $\Sigma$  'nın bağlı olduğu invariantslar, [45] ve [47] ifadeleri yardımıyla aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\Sigma = \Sigma(I, \Pi, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8) \quad [48]$$

Ortam sıkışmaz olduğundan gerilmenin ve gerinme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızının bünye denklemleri aşağıdaki gibi ortaya konulmuştur.

$$T_{PQ} = -p C_{PQ}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PQ}} \quad [49]$$

$$Y_{PQ} = \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{PQ}} \quad [50]$$

[49] ve [50] ifadelerindeki kısmi türevler [48] ifadesinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PQ}} &= \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial C_{PQ}} \\ &+ \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \frac{\partial I_7}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \frac{\partial I_8}{\partial C_{PQ}} \end{aligned} \quad [51]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{PQ}} &= \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial H_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} \frac{\partial I_5}{\partial H_{PQ}} \\ &+ \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \frac{\partial I_6}{\partial H_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \frac{\partial I_7}{\partial H_{PQ}} \\ &+ \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \frac{\partial I_8}{\partial H_{PQ}} \end{aligned} \quad [52]$$

[45] ve [47] ifadeleriyle verilen invariantsların  $C_{PQ}$  ya göre sıfır olmayan türevleri [51] denkleminde yerine yazıldıktan sonra [49] denkleminde taşınırsa, bu invariantsların  $H_{PQ}$  ya göre sıfır olmayan türevleri de [52] denkleminde yerine yazıldıktan sonra [50] denkleminde taşınırsa; mekanik bir yüklemeye maruz, mikro-boşluklu ve sıkışmaz olarak kabul edilen, elastik bir ortamda gerilme bünye denklemleri ve gerinme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızının bünye denklemleri, maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} T_{PQ} &= -p C_{PQ}^{-1} + 2 \left[ \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \delta_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \Pi} (\delta_{PQ} C_{RR} - C_{PQ}) \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} H_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (C_{PR} H_{RQ} + H_{PR} C_{RQ}) \right] \end{aligned} \quad [53]$$

$$Y_{PQ} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \delta_{PQ} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} H_{PQ} + 3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} H_{PM} H_{MQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} C_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} C_{PL} C_{LQ} \quad [54]$$

[53] ve [54] ifadelerinin matris formdaki ifadeleri de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{C}^{-1} + 2 \left[ \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{I}} \mathbf{I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \Pi} (\text{tr} \mathbf{C} \mathbf{I} - \mathbf{C}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \mathbf{H} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (\mathbf{C} \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{C}) \right] \quad [55]$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \mathbf{I} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} \mathbf{H} + 3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \mathbf{H}^2 + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \mathbf{C} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \mathbf{C}^2 \quad [56]$$

[55] denkleminde gözükten Lagrange çarpanı  $p$ , hidrostatik basınç olarak bilinir ve alan denklemleri ve sınır şartları ile belirlenebilir. [55] ve [56] denklemlerinin daha somut şeklini elde etmek için bu denklemlerdeki  $\Sigma$ 'nin invariantslarına göre türevlerinin değerlendirilmesi gerekir.

[53] ve [54] denklemindeki  $\Sigma$ 'nin bağlı olduğu invariantslar daha önce [48] ifadesi ile verilmişti. Ancak bu invariantslara nasıl bağlı olduğunu henüz belirlememiştik.  $\Sigma$ , bu invariantsların analitik bir fonksiyonu ise bir kuvvet serisi ile temsil edilebilir. Ancak kuvvet serisinin kaçınıcı mertebeden olacağı ve kaç teriminin dikkate alınacağı, başka bir ifadeyle  $\Sigma$ 'nin kaçınıcı mertebeden bir polinomla temsil edileceği; deformasyon invariantsının büyüklüğüne, olaydaki etkileşim paylarına kısacası nonlineerlik mertebelerine bağlıdır.

Diğer taraftan iç enerjisi pozitif-tanımlı olduğundan bu polinomun pozitif-tanımlı olması gerekir. Ayrıca invariantsların çarpım sırasının  $\Sigma$ 'yi etkilememesi için bu polinomun simetrik katsayılı olması, yani kuadratik bir form şeklinde olması gerekir. Buna göre bir polinom yaklaşımının seçilmesi durumunda, serbest enerji fonksiyonu  $\Sigma$  için mevcut invariantslar cinsinden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\Sigma = \sum_{i,j} a_{ij} I_i I_j \quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8), a_{ij} = a_{ji} \quad [57]$$

Bu ifadedeki  $a_{ij}$  katsayılarının hepsi,  $\mathbf{X}$  parçacığına ve ortamın  $\theta$  sıcaklığına bağlıdır. [55] ve [56] ifadelerindeki  $\Sigma$ 'nin invariantslara göre türevleri [57] polinom açılımından faydalanılarak bulunabilir. [57] ifadesinin ihtiva ettiği invariantslara göre  $\Sigma$ 'nin kısmi türevleri alınarak [55] denkleminde yerine yazıldıktan sonra, deformasyon tansörü  $\mathbf{C}$  ve hasar tansörü  $\mathbf{H}$ 'in ikinci dereceye kadar terimleri dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} T_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + 2 \{ 2a_{11} C_{KK} \delta_{PQ} + a_{12} C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} - a_{12} C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} \\ & + 2a_{14} H_{KK} \delta_{PQ} + 2a_{15} H_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} + 2a_{17} C_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} + 2a_{18} C_{KL} C_{LM} H_{MK} \delta_{PQ} \\ & + 2a_{12} C_{KK} \delta_{PQ} C_{RR} - 2a_{12} C_{KK} C_{PQ} + 2a_{24} H_{KK} \delta_{PQ} C_{RR} - 2a_{24} H_{KK} C_{PQ} \\ & + 2a_{25} H_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} - 2a_{25} H_{KL} H_{LK} C_{PQ} + 2a_{27} C_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} - 2a_{27} C_{KL} H_{LK} C_{PQ} \\ & + 2a_{17} C_{KK} H_{PQ} + a_{27} C_{KK} C_{LL} H_{PQ} - a_{27} C_{KL} C_{LK} H_{PQ} + 2a_{47} H_{KK} H_{PQ} \\ & + 2a_{77} C_{KL} H_{LK} H_{PQ} + 2a_{78} C_{KL} C_{LM} H_{MK} H_{PQ} + 2a_{18} C_{KK} C_{PR} H_{RQ} \\ & + 2a_{18} C_{KK} H_{PR} C_{RQ} + 2a_{48} H_{KK} C_{PR} H_{RQ} + 2a_{48} H_{KK} H_{PR} C_{RQ} + 2a_{78} C_{KL} H_{LK} C_{PR} H_{RQ} \\ & + 2a_{78} C_{KL} H_{LK} H_{PR} C_{RQ} \} \end{aligned} \quad [58]$$

denklemini elde edilir. [58] denklemindeki katsayılar,  $\alpha_i$  ( $i=1,2,3,\dots,13$ ) gibi katsayılarla yeniden tanımlanacak olursa aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \alpha_1 & \equiv 4 a_{11}, \quad \alpha_2 \equiv 2 a_{12}, \quad \alpha_3 \equiv 4 a_{14}, \\ \alpha_4 & \equiv 4 a_{15}, \quad \alpha_5 \equiv 4 a_{17}, \quad \alpha_6 \equiv 4 a_{18}, \\ \alpha_7 & \equiv 4 a_{24}, \quad \alpha_8 \equiv 4 a_{25}, \quad \alpha_9 \equiv 2 a_{27}, \\ \alpha_{10} & \equiv 4 a_{47}, \quad \alpha_{11} \equiv 4 a_{77}, \\ \alpha_{12} & \equiv 4 a_{78}, \quad \alpha_{13} \equiv 4 a_{48} \end{aligned} \quad [59]$$

Bu katsayılar kullanılarak gerilmenin bünye denklemini yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} T_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + \alpha_1 C_{KK} \delta_{PQ} + \alpha_2 C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} - \alpha_2 C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} + \alpha_3 H_{KK} \delta_{PQ} \\ & + \alpha_4 H_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} + \alpha_5 C_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} + \alpha_6 C_{KL} C_{LM} H_{MK} \delta_{PQ} + 2\alpha_2 C_{KK} \delta_{PQ} C_{RR} \\ & - 2\alpha_2 C_{KK} C_{PQ} + \alpha_7 H_{KK} \delta_{PQ} C_{RR} - \alpha_7 H_{KK} C_{PQ} + \alpha_8 H_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} \\ & - \alpha_8 H_{KL} H_{LK} C_{PQ} + 2\alpha_9 C_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} - 2\alpha_9 C_{KL} H_{LK} C_{PQ} + \alpha_5 C_{KK} H_{PQ} \\ & + \alpha_9 C_{KK} C_{LL} H_{PQ} - \alpha_9 C_{KL} C_{LK} H_{PQ} + \alpha_{10} H_{KK} H_{PQ} + \alpha_{11} C_{KL} H_{LK} H_{PQ} \\ & + \alpha_{12} C_{KL} C_{LM} H_{MK} H_{PQ} + \alpha_6 C_{KK} C_{PR} H_{RQ} + \alpha_6 C_{KK} H_{PR} C_{RQ} + \alpha_{13} H_{KK} C_{PR} H_{RQ} \\ & + \alpha_{13} H_{KK} H_{PR} C_{RQ} + \alpha_{12} C_{KL} H_{LK} C_{PR} H_{RQ} + \alpha_{12} C_{KL} H_{LK} H_{PR} C_{RQ} \end{aligned} \quad [60]$$



[57] ifadesinin ihtiva ettiği invaryantlara göre  $\Sigma$ 'nın kısmi türevleri alınarak [56] denkleminde yerine yazdıktan sonra deformasyon tansörü  $\mathbf{C}$  ve hasar tansörü  $\mathbf{H}$ 'in ikinci dereceye kadar terimlerini dikkate alacak olursak aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$\begin{aligned}
 Y_{PQ} = & 2 a_{14} C_{KK} \delta_{PQ} + a_{24} C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} \\
 & - a_{24} C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} + 2 a_{44} H_{KK} \delta_{PQ} \\
 & + 2 a_{45} H_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} + 2 a_{47} C_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} \\
 & + 2 a_{48} C_{KL} C_{LM} H_{MK} \delta_{PQ} + 4 a_{15} C_{KK} H_{PQ} \\
 & + 2 a_{25} C_{KK} C_{LL} H_{PQ} - 2 a_{25} C_{KL} C_{LK} H_{PQ} \\
 & + 4 a_{45} H_{KK} H_{PQ} + 4 a_{57} C_{KL} H_{LK} H_{PQ} \\
 & + 4 a_{58} C_{KL} C_{LM} H_{MK} H_{PQ} \\
 & + 6 a_{16} C_{KK} H_{PM} H_{MQ} \\
 & + 3 a_{26} C_{KK} C_{LL} H_{PM} H_{MQ} \\
 & - 3 a_{26} C_{KL} C_{LK} H_{PM} H_{MQ} + 2 a_{17} C_{KK} C_{PQ} \\
 & + 2 a_{47} H_{KK} C_{PQ} + 2 a_{57} H_{KL} H_{LK} C_{PQ} \\
 & + 2 a_{77} C_{KL} H_{LK} C_{PQ} + 2 a_{48} H_{KK} C_{PL} C_{LQ} \\
 & + 2 a_{58} H_{KN} H_{NK} C_{PL} C_{LQ}
 \end{aligned} \tag{61}$$

[61] denklemindeki katsayıları  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 14$ ) gibi katsayılarla yeniden tanımlayacak olursak aşağıdaki ifadeleri yazılabiliriz.

$$\begin{aligned}
 \beta_1 & \equiv 2 a_{14}, \beta_2 \equiv a_{24}, \beta_3 \equiv 2 a_{44}, \beta_4 \equiv 2 a_{45}, \\
 \beta_5 & \equiv 2 a_{47}, \beta_6 \equiv 2 a_{48}, \beta_7 \equiv 4 a_{15}, \\
 \beta_8 & \equiv 2 a_{25}, \beta_9 \equiv 2 a_{57}, \beta_{10} \equiv 2 a_{58}, \\
 \beta_{11} & \equiv 6 a_{16}, \beta_{12} \equiv 3 a_{26}, \beta_{13} \equiv 2 a_{17}, \beta_{14} \equiv 2 a_{77}
 \end{aligned} \tag{62}$$

Bu katsayıları kullanarak gerinme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızının bünye denklemini, maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden yeniden aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
 Y_{PQ} = & \beta_1 C_{KK} \delta_{PQ} + \beta_2 C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} \\
 & - \beta_2 C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} + \beta_3 H_{KK} \delta_{PQ} \\
 & + \beta_4 H_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} + \beta_5 C_{KL} H_{LK} \delta_{PQ} \\
 & + \beta_6 C_{KL} C_{LM} H_{MK} \delta_{PQ} + \beta_7 C_{KK} H_{PQ} \\
 & + \beta_8 C_{KK} C_{LL} H_{PQ} - \beta_8 C_{KL} C_{LK} H_{PQ} \\
 & + 2 \beta_4 H_{KK} H_{PQ} + 2 \beta_9 C_{KL} H_{LK} H_{PQ} \\
 & + 2 \beta_{10} C_{KL} C_{LM} H_{MK} H_{PQ} \\
 & + \beta_{11} C_{KK} H_{PM} H_{MQ} \\
 & + \beta_{12} C_{KK} C_{LL} H_{PM} H_{MQ} \\
 & - \beta_{12} C_{KL} C_{LK} H_{PM} H_{MQ} \\
 & + \beta_{13} C_{KK} C_{PQ} + \beta_5 H_{KK} C_{PQ} \\
 & + \beta_9 H_{KL} H_{LK} C_{PQ} + \beta_{14} C_{KL} H_{LK} C_{PQ} \\
 & + \beta_6 H_{KK} C_{PL} C_{LQ} + \beta_{10} H_{KN} H_{NK} C_{PL} C_{LQ}
 \end{aligned} \tag{63}$$

[63] denklemini, bu çalışmada ortaya koymaya çalıştığımız gerinme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızı için söz konusu kabuller altında elde edilen bir bünye denklemdir ve  $\bar{Y}_{PQ} \dot{H}_{PQ} \geq 0$  eşitsizliğini sağlayacak şekilde kısıtlanmalıdır.

## Sonuçlar

Mekanik yüklemeye maruz, mikro-boşluklu elastik bir ortamın nonlinear davranışını modellemeye imkan oluşturacağı beklentisine dayanarak modern Sürekli-Ortamlar Mekaniği kapsamında bir yol izlenmiştir. Bu modellemeyi gerçekleştirirken, Termodinamiğin birinci kanunu ve ikinci kanunu (Clausius-Duhem eşitsizliği), bünye teorisi aksiyomlarından özellikle objektivite ve maddesel simetri aksiyomları ile malzemenin simetri grubuna ilişkin kavramlar, bünye fonksiyonelinin bulunması ve argümanlarının somut olarak tayini için invaryantlar teorisine ait bulgular, ele alınan malzemenin nonlinear davranışının modellenmesinin teorik temellerini oluşturmuştur.

Ele alınan malzemenin bünye denklemini, argümanları Green deformasyon tansörü ve hasar tansörü olarak ortaya çıkan gerilme potansiyeli olarak belirlenmiştir. Bu bünye fonksiyoneli vasıtasıyla malzemede mekanik yüklemeye ile oluşan gerilme ve gerinme-enerjisi-yoğunluğunun değişim hızına ait bünye denklemleri maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden elde edilmiştir. İncelenen malzeme esas yapısı itibarı ile izotrop olup, mikro-boşlukların varlığı nedeniyle yani hasardan dolayı malzemenin anizotrop bir özellik kazandığı düşünülmüştür. Bu nedenle matris malzeme izotrop alınarak, gerilmenin ve gerinme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızının bünye denklemleri, invaryantlar teorisine ait bulgular kullanılarak [53] ve [54] denklemleriyle nonlinear bir formda ortaya konulmuştur. Bu bünye denklemlerinin daha somut bir şekilde elde edilmesi için,  $\Sigma$ 'nın bağlı olduğu invaryantlarına göre türevlerinin bilinmesi gerektiğinden gerilme potansiyeli  $\Sigma$ , ikinci dereceden bir polinomla temsil edilerek invaryantlarına göre türevleri hesaplanmıştır. Bu işlemler yapılırken nonlinear davranışın derecesini tespit etmek açısından, deformasyon tansörü  $\mathbf{C}$  ve hasar tansörü  $\mathbf{H}$ 'in ikinci dereceye kadar olan etkileri ile dikkate alınmıştır. Bu durumda gerilmenin ve gerinme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızının bünye denklemleri, maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden [60] ve [63] ifadeleriyle verilmiştir. Bu denklemlerden gerilme bünye denklemini veren [60] ifadesi, deformasyon tansörünün etkisinin lineer olan katkılarının ve hasar tansörünün lineer yada ikinci mertebeye kadar olan terimlerinin dikkate alınması durumunda daha basit formlara indirgenebilir.

[60] denklemini mekanik bir yüklemeye maruz, sıkışmaz ve mikro-boşluklu elastik bir ortamda, mekanik etkileşimlerin nonlinear kabul edildiği durumda gerilme için bünye denklemini veren ifadedir. Bu ifadede ilk terim sıkışmazlık kabulünden kaynaklanmaktadır. İkinci terim



deformasyon tansörünün lineer etkisinden, 5. terim hasar tansörünün lineer etkisinden, 3, 4, 9 ve 10. terimler deformasyon tansörünün nonlineer etkisinden, 6 ve 20. terimler hasar tansörünün nonlineer etkisinden, 7, 11, 12 ve 17. terimler deformasyon tansörü ile hasar tansörünün lineer etkileşimlerinden, 8, 15, 16, 18, 19, 23 ve 24. terimler deformasyon tansörünün nonlineer ve hasar tansörünün lineer etkileşimlerinden, 13, 14, 21, 25 ve 26. terimler deformasyon tansörünün lineer hasar tansörünün nonlineer etkileşiminden, 22, 27 ve 28. terimler de deformasyon tansörü ile hasar tansörünün nonlineer etkileşimlerinden kaynaklanmaktadır.

[63] denklemler mekanik bir yüklemeye maruz, sıkışmaz ve mikro-boşluklu elastik bir ortamda, mekanik

## Kaynaklar

- [1] Chaboche, J.L., 1981. Continuous Damage Mechanics – A Tool to Describe Phenomena before Crack Initiation, Nuclear Engineering and Design, 64, 233-247.
- [2] Murakami, S., 1988. Mechanical Modeling of Material Damage, Journal of Applied Mechanics, 55, 280-286.
- [3] Kachanov, L.M., Introduction to Continuum Damage Mechanics. Martinus Nijhoff Publishers, 135 p, Dordrecht, 1986.
- [4] Lemaitre, J., A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [5] Krajcinovic, D., 1983. Constitutive Equations for Damaging Materials, Journal of Applied Mechanics, 50, 355-360.
- [6] Krajcinovic, D., 1984. Continuum Damage Mechanics, Applied Mechanics Reviews, 37, 1-6.
- [7] Krajcinovic, D., 1985. Continuous Damage Mechanics Revisited: Basic Concepts and Definitions, Journal of Applied Mechanics, 52, 829-833.
- [8] Krajcinovic, D., 2000. Damage Mechanics: Accomplishments, trends and Needs, International Journal of Solid and Structures, 37, 267-277.
- [9] Krajcinovic, D., Mier, J.V., 2000. Damage and Fracture of Disordered Materials, Springer Wien, New York.
- [10] Krajcinovic, D., 2003. Damage Mechanics, North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Volume 41, Amsterdam, Elsevier.
- [11] Woo, C.W., ve Li, D.L., 1993. A Universal Physically Consistent Definition of Material Damage, International Journal of Solid and Structures, 30, 15, 2097-2108.
- [12] Kattan, P.I., ve Voyiadjis, G.Z., 2002. Damage Mechanics with Finite Elements, Springer-Verlag.
- [13] Song, T.X., Ping, J.C., ve Long, Z.J., 2001. General Expressions of Constitutive Equations for Isotropic Elastic Damaged Materials, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 22, 12, 1468-1475, Shanghai University, China.
- [14] Bassiouny, E., 2005. Damage Mechanics in Ferroelectric Ceramics- Model and Application, Journal of Applied Sciences, 5,2, 257-266.
- [15] Ibjola, E.A., 2002. On Some Fundamental Concepts of Continuum Damage Mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191, 1505-1520.
- [16] Weitsman, Y., 1988. Damage Coupled With Heat Conduction in Uniaxially Reinforced Composites, Journal of Applied Mechanics, 55, 641-647.
- [17] Weitsman, Y., 1988. A Continuum Damage Model for Viscoelastic Materials. Journal of Applied Mechanics, 55, 773-780.
- [18] Eringen, A.C., Mechanics of Continua, John Wiley and Sons, New York, 1967.
- [19] Şuhubi, E.S., Sürekli Ortamlar Mekaniği: Giriş, İ.T.Ü., İstanbul, 1993.
- [20] Spencer, A.J.M., Deformations of Fibre-reinforced Materials, Clarendon Press, Oxford, 1972
- [21] Usal, M.R., Fiber Takviyeli Elastik Dielektrik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışlarına Ait Matematiksel Bir Model, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1994.
- [22] Korkmaz, E., Sürekli Ortam Hasar Mekaniği Yardımıyla Mekanik Davranışın Belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001.
- [23] Lemaitre, J., ve Chaboche, J.L., Mechanics of Solid Materials. Cambridge University Press, 556 p, Cambridge, 2000.
- [24] Simo, J.C., ve Ju, J.W., 1987. Strain and Stress Based Continuum Damage Model-Formulation, International Journal of Solid and Structures, 23 (7), 821-840.
- [25] Usal, M., Biyolojik Bir Konstrüksiyon Elemanı İçin Matematiksel Modelleme, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001.
- [26] Spencer, A.J.M., Theory of Invariants in Continuum Physics, Vol.1, Ed. A.C. Eringen, Academic Press, New York, 115 p, 1971.

## Simgeler

$\mathbf{A}$	: Yüzey alan vektörü
$\mathbf{C}, C_{KL}$	: Green deformasyon tansörü ve bileşenleri
$\mathbf{D}, D_{KL}$	: İkinci dereceden anizotropik hasar tansörü ve bileşenleri
$L_K$	: Maddesel tasvir vektörleri
$\mathbf{F}$	: Deformasyon gradyanı matrisi
$j$	: Deformasyon jakobiyeni (Deformasyon gradyanı matrisinin determinanı)
$p$	: Hidrostatik basınç
$Q_K$	: Maddesel koordinat sisteminde ısı vektörü
$t_{kl}$	: Cauchy gerilme tansörü
$T_{KL}$	: Maddesel koordinatlarda gerilme tansörü
$X_K, x_k$	: Maddesel ve uzaysal koordinatlar
$Y_{KL}$	: Gerilme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızı
$\varepsilon$	: Birim kütle başına iç enerji
$\gamma$	: Birim kütle başına entropi üretimi
$\eta$	: Birim kütle başına entropi yoğunluğu
$\theta$	: $t$ anında $\mathbf{X}$ maddesel noktasının mutlak sıcaklığı
$\rho_0, \rho$	: Deformasyondan önceki ve sonraki kütle yoğunluğu
$\Sigma \equiv \rho_0 \Psi$	: Gerilme potansiyeli
$\psi$	: Birim kütle başına serbest enerji
$\Sigma \equiv \rho_0 \Psi$	: Gerilme potansiyeli
$\psi$	: Birim kütle başına serbest enerji