

## Pareto Dağılımı Altında Bühlmann-Straub Kredibilite ve Karma Etki Modelinde Prim Tahmini Modellemesi

Meral EBEGİL<sup>\*1</sup>, Fikri GÖKPINAR<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü /ANKARA

**Özet:** Bu çalışmada, Bühlmann-Straub kredibilite modeli ile Karma etki modelinin özel bir hali olan tek faktör rassal etki modeli arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, Bühlmann-Straub kredibilite modeli ve tek faktör rassal etki modeli için sigortalı sayısı Poisson dağılımından, hasar tutarı ise Pareto dağılımından seçilerek hasar tutarı modellemesi yapılmış ve her iki modele ait prim tahminleri simülasyon yoluyla karşılaştırılmıştır. Bu iki modele ait uyum oranı dikkate alınan birçok durumda oldukça yüksek olmasına rağmen bazı durumlarda uyumun düştüğü gözlemlenmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Bayesci İstatistik, Kredibilite Modelleri, Karma Etki Modeli, Pareto Dağılımı, Poisson Dağılımı

### Modelling of Premium Estimations in the Bühlmann-Straub Credibility and Mixed Effects Models under Pareto Distribution

**Abstract:** In this study, it was examined the relations between the Bühlmann-Straub credibility model and the random effects model for the one-way classification which is a special form of the mixed effects model. Poisson and Pareto distributions are used to model insured numbers and the amount of claims, respectively. Premium estimations of the amount of claims modeling for Bühlmann-Straub credibility and the random effect models are compared by simulation study. Although the compliance rates of these two models are quite high in most of the considered situation, these compliance rates decrease in some of the situations.

**Key words:** Bayesian Statistics, Credibility Models, Mixed Effects Model, Pareto Distribution, Poisson Distribution

#### Giriş

Sigortacılık uygulamalarında temel amaç portföydeki bütün primlerden elde edilen toplam gelirin her bir sigorta sözleşmesine adil bir şekilde dağıtılmasıdır. Bu dağıtım işlemini, hem sigortalı hem de sigorta şirketi için daha adil bir şekilde yapmak amacıyla geliştirilen sistemlerden en yaygın kullanılanı, kredibilite teorisidir. Kredibilite teorisi, 1890'ların sonlarına doğru işverenlerin mesuliyet sigortalarının fiyatlandırma çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Kredibilite kavramı ile ilgili ilk makale Mowbray (1914) tarafından yazılmıştır. Kredibilite kuramının başlangıcı olan bu makale, verilere tam kredibilite verilebilmesi için gerekli kriteri ortaya koymuştur.

Bühlmann (1967), dağılımdan bağımsız, Bayes yönteminin en iyi doğrusal yaklaşımı şeklinde ifade edilebilecek, bir kredibilite formülü elde ederek Bühlmann kredibilite modelini oluşturmuştur. Bühlmann ve Straub (1970) çalışmalarında Bühlmann modelinin geliştirilmiş hali olan Bühlmann-Straub kredibilite modelini sunmuşlardır. Geçtiğimiz on yılda sigortacılıkta kullanılan verilerin modellenmesinde, Genelleştirilmiş Doğrusal Model (GDM) ler yaygın şekilde kullanılan istatistiksel bir araç olmuştur. Bu konuda başlangıç, McCullagh ve Nelder (1989)'in çalışmalarında sundukları örneklerle yapılmıştır. Frees vd. (1999, 2001) doğrusal Karma modellere giriş konusunda bir çalışma yayınlamışlardır. Bu modellerin, ödenecek prim miktarının belirlenmesinde nasıl kullanılabileceğini göstermişlerdir. Nelder ve Verrall (1997), hiyerarşik

genelleştirilmiş doğrusal model (HGDM)leri kullanarak, klasik kredibilite teorisinin GDM'ler çerçevesi içinde yorumlanmasına imkan veren bir yöntem tanımlamışlardır. Bu yöntemde, kredibilite teorisinin içinde yer alan Bühlmann modeli için kredibilite formülünü, HGDM'lerden yararlanarak üstel aileler için nasıl türetildiği gösterilmiştir. Diğer bir ifadeyle, Bühlmann kredibilite modelinin geliştirilmiş doğrusal Karma model (GDKM) ler içinde yer alan HGDM'lerle bağlantısı kurulmuştur. Ebeğil (2006), Nelder ve Verrall (1997)'in çalışmalarını, Bühlmann-Straub kredibilite modelinin HGDM'lerle bağlantısı kurarak genişletmiştir. Klasik kredibilite modellerini, istatistiksel modeller çatısı içine yerleştirmenin avantajları, aktüerlerin kredibilite modeli seçeneklerini zenginleştirmek ve aktüerlere model seçimi için kuralları olan disiplinli bir süreç sunmaktır. Bu çalışmanın ikinci bölümünde, kredibilite modellerinden Bühlmann-Straub kredibilite modeli ile Karma etki modeli içinde yer alan tek faktör rassal etki modeli arasındaki ilişki, teorik olarak incelenmeye çalışılmıştır. Üçüncü bölümde, MATLAB paket programından yararlanılarak Bühlmann-Straub kredibilite modeli ve tek faktör rassal etki modellerine ait prim tahminleri için, farklı grup ve dönem sayıları ile farklı dağılım ve dağılım parametrelerinin  $10^5$  tekrara dayalı bir simülasyon çalışması yapılmış ve elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak verilmiştir. Dördüncü bölümde her iki modele ait prim tahmin değerlerinin farklı durumlarda nasıl hareket ettikleri belirlenmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

\*mdemirel@gazi.edu.tr

## Bühlmann-Straub Kredibilite Modeli ve Karma Etki Modeli

Bu bölümde kredibilite modellerinden olan Bühlmann-Straub kredibilite modeli ve istatistiksel bir model olan Karma etki modeli tanıtılmıştır.

### Bühlmann-Straub kredibilite modeli

Bühlmann ve Straub (1970)'de Bühlmann modelinin genelleştirilmiş şeklini sunmuşlardır (Klugman vd., 1998). Her poliçe sahibi için, geçmiş kayıplar, hasarlar veya hasar tutarları  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$  ile gösterilsin. Sigortalılar için risk parametresi  $\theta$  olmak üzere  $\Theta = \theta$  iken  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$  aynı ortalama, fakat farklı varyansa sahip, bağımsız ve aynı dağılımlı rassal değişkenlerdir. Bu durumda Bühlmann-Straub kredibilite modeli,

$$E(Y_{n+1}) = C = Z\bar{Y} + (1-Z)\mu, \quad Z = m/(m+k), \quad 0 \leq Z \leq 1$$

biçiminde özetlenebilir. Burada  $k = \nu/a$  ve

$\bar{Y} = \sum_{i=1}^n (m_i/m)Y_i$  olmak üzere,  $m_i$ , bireylerin  $i$ 'inci poliçe döneminde bilinen bir riske maruz kalma değeri,  $\nu$ ; süreç varyansının beklenen değeri,  $a$ ; hipotetik ortalamaların varyansı ve  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  olmak üzere,  $m$  bütün poliçe dönemleri için toplam riske maruz kalma (total exposure) değeridir. Bühlmann-Straub modelinin özelliğinden dolayı kredibilite faktörü  $Z$  her sınıf için ayrı hesaplanmalıdır. Bühlmann-Straub kredibilite prim tahmin edicisi,  $\hat{Z}_i = m_i / (m_i + \hat{k})$  ve  $\hat{k} = \hat{\nu} / \hat{a}$  olmak üzere,

$$\hat{C}_i = \hat{Z}_i \bar{Y}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu} \quad (1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Kısacası, Bühlmann-Straub kredibilite modelleri ile belirli bir sigorta şirketine ait eski bilgiler ve yeni bilgiler kredibilite faktörü ile ağırlıklandırılarak bir sonraki sigorta dönemi için prim tahmini elde edilebileceği gibi, sınıflar arası prim saptamasında da kullanılabilir. Aslında, kredibilite teorisi bir prim saptama yöntemidir. Bu amaç doğrultusunda, prim değeri Eş (1)'de verilen kredibilite prim tahmin edicisi  $\hat{C}_i$  ile hesap edilmektedir. Bühlmann-Straub modeli için,  $\mu$ 'nün sapmasız bir tahmin edicisi  $\bar{Y}$ ,

$$\hat{\mu}_K = \left[ \sum \hat{Z}_i \bar{Y}_i \right] / \sum \hat{Z}_i$$

şekilde ifade edilebilir.  $\nu$  için sapmasız bir tahmin edici, grup içi hatalar için ağırlıkların ( $m_{ij}$ 'lerin) dahil edilmesiyle aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\hat{\nu} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i} m_{ij} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \right) / \left( \sum_{i=1}^n (t_i - 1) \right) \quad (2)$$

Son olarak,  $a$  için çok kullanılan bir tahmin edici,

$$\hat{a} = \frac{\left( \sum_{i=1}^n m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - \hat{\nu}(n-1) \right)}{\left( m - (1/m) \sum_{i=1}^n m_i^2 \right)} \quad (3)$$

dır. Kullanılacak olan tek yönlü varyans analizi tablosu, Çizelge 1'deki gibidir.

Çizelge 1: Tek yönlü varyans analizi tablosu

DK	s.d	KT	KO	BKO
GA $\alpha_i$	$n-1$	$\sum_{i=1}^n t (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$	$\frac{\sum_{i=1}^n t (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{n-1}$	$\sigma_\varepsilon^2 + t\sigma_\alpha^2$
Hata $\varepsilon_{ij}$	$N-n$	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$	$\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{N-n}$	$\sigma_\varepsilon^2$

Burada  $N = n \times t$  dir (Searle, 1971). Tek-yönlü ANOVA için rassal etkilere ilişkin ortalama kare (GKO) lerin beklenen değeri

$$E[GKO] = (1/(n-1)) E \left[ \sum_{i=1}^n m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right] \\ = (1/(n-1)) \left[ a \left( m - (1/m) \sum m_i^2 \right) + \nu(n-1) \right]$$

şeklinde dir.  $E(GKO)$  için yukarıdaki eşitliği ve  $\nu$  için tahmin ediciyi kullanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,  $a$  için tahmin edici,

$$\sum_i m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{a} \left( m - (1/m) \sum m_i^2 \right) + \hat{\nu}(n-1) \\ \Rightarrow \hat{a} = \frac{\left[ \sum_i m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - \hat{\nu}(n-1) \right]}{\left( m - (1/m) \sum m_i^2 \right)}$$

biçiminde elde edilir (Klugman vd., 1998). Bu da Eş (3) ile uyumludur.

### Karma Etki Modeli

Burada  $n$ ; risk grubu sayısı,  $t$ ; her risk grubundaki gözlem sayısı ve  $N = n \times t$  olmak üzere,  $Y$ ; riskler için gözlemlenen  $N$  tane bireyin özelliklerinden ölçülen değerleri içeren  $(N \times 1)$  boyutlu deneyim vektörü olsun.

$X$ ; riske maruz kalan birimlerin sayısını içeren  $(N \times t)$

boyutlu  $t$  adet sabit etki için,  $H$ ; riske maruz kalan birimlerin  $(N \times n)$  boyutlu  $n$  adet rassal etki için ilişki matrisleri,  $\beta$ ;  $(t \times 1)$  boyutlu sabit etki vektörü,  $\alpha$ ;  $(n \times 1)$  boyutlu rassal etki vektörü olmak üzere Karma etki modeli,  

$$Y = X\beta + H\alpha + \varepsilon \quad (4)$$

ile ifade edilebilir. Burada ,

$$\alpha \sim (0, \sigma_\alpha^2 I_n), \varepsilon \sim (0, \sigma_\varepsilon^2 I_N), \text{Kov}(\alpha, \varepsilon) = 0$$

şeklindedir.

$Y$  'nin varyansı,

$$\text{Var}(Y) = V = \sigma_\varepsilon^2 (k\text{şg} \cdot (I_N)) + H\sigma_\alpha^2 H' \quad (5)$$

biçimindedir. Eş (5)'de verilen  $\text{Var}(Y)$ , kredibilite teorisinde  $k$  değerini belirlemede kullanılan,

$$\text{Toplam Varyans} = \begin{pmatrix} \text{Süreç Varyansının} \\ \text{Beklenen Değeri} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Hipotetik Ortalamaların} \\ \text{Varyansı} \end{pmatrix}$$

yapısına karşılık gelmektedir. Bu yapı,  $X$  ve  $Y$  rassal değişkenler olmak üzere,

$$\text{Var}(Y) = E_X [\text{Var}_Y (Y / X)] + \text{Var}_X (E_Y [Y / X])$$

şeklinde de ifade edilebilmektedir.  $\sigma_\varepsilon^2 (k\text{şg} \cdot (I_N))$  terimi, süreç varyansının beklenen değerine (SVBD) ve  $H\sigma_\alpha^2 H'$  terimi, hipotetik ortalamaların varyansına (HOV) karşılık gelmektedir (Klugman vd., 1998; Herzog, 1994).  $E(\alpha) = E(\varepsilon) = 0$  olduğundan  $E(Y) = X\beta$  'dir.

Eş (4) ile verilen Karma etki modeli, tek faktör rassal etki modeli olarak

$$\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2),$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ ve } \text{Kov}(\alpha_i, \varepsilon_{ij}) = 0 \text{ varsayımı altında,}$$

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, t_i \quad (6)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda Eş (5) ile verilen varyans eşitliği açık olarak, iki varyans bileşeni şeklinde,

$$\text{Var}(y_{ij}) = \text{Var}(\alpha_i) + \text{Var}(\varepsilon_{ij})$$

$$= \sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2 = \text{HOV} + \text{SVBD}$$

parçalanabilir. Eş (6) ile verilen model için en iyi doğrusal sapmasız tahmin edici (ENDOST)'nin bilinen ifadesi  $h_i = [\text{Var}(\bar{y}_i)]^{-1} = [\sigma_\alpha^2 + (\sigma_\varepsilon^2 / t_i)]^{-1}$  ve  $Y$  geçmiş deneyimi ifade etmek üzere,

$$\hat{\mu} = E[\mu + \alpha_i / Y] = (\sum h_i \bar{Y}_i) / \sum h_i \quad (7)$$

şeklinde yazılacaktır.  $\forall i$  için  $t_i = t$  iken  $h_i = 1$  ve  $\hat{\mu} = \bar{Y}$  olacaktır. Bilindiği gibi,  $\alpha_i$  parametresinin ENDOST'i,

$$\hat{\alpha}_i = E[\alpha_i / \bar{Y}_i] = \left( \sigma_\alpha^2 / \left( \sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{t_i} \right) \right) (\bar{Y}_i - \hat{\mu}) \quad (8)$$

gibi ifade edilebilir (Searle vd., 1992). Bühlmann-Straub kredibilite modelinin ENDOST'i ile yukarıda verilen tahmin ediciler aynıdır. Bunlar aşağıda gösterilmiştir. ENDOST formülü için Eş (7)'yi kullanarak,

$$\hat{\mu} = \left( \sum_{i=1}^n h_i \bar{Y}_i \right) / \sum_{i=1}^n h_i = \left( \sum_{i=1}^n \hat{Z}_i \bar{Y}_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n \hat{Z}_i \right)$$

yazılabilir. Bu ise  $\mu$  'nün kredibilite ağırlıklı tahminidir. Modelin ENDOST'ları da kredibilite tahminine uymaktadır. Eş (8)'den,

$$\hat{\alpha}_i = E[\alpha_i | \bar{Y}_i] = \left( \sigma_\alpha^2 / \left( \sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{t_i} \right) \right) (\bar{Y}_i - \hat{\mu})$$

$$= \frac{t_i \sigma_\alpha^2}{t_i \sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2} (\bar{Y}_i - \hat{\mu}) = \left( t_i / \left( t_i + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\alpha^2} \right) \right) (\bar{Y}_i - \hat{\mu})$$

elde edilir.  $\sigma_\alpha^2$  terimi  $a$  'ya,  $\sigma_\varepsilon^2$  terimi de  $v$  'ye eşit olduğu için  $t_i / \left( t_i + \left( \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\alpha^2 \right) \right)$  terimi de  $\hat{Z}_i$  'dir. Böylece,

$$\hat{\alpha}_i = \hat{Z}_i (\bar{Y}_i - \hat{\mu}) = \hat{Z}_i \bar{Y}_i - \hat{Z}_i \hat{\mu} = \hat{Z}_i \bar{Y}_i - \hat{Z}_i \hat{\mu} + \hat{\mu} - \hat{\mu}$$

$$= \hat{Z}_i \bar{Y}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu} - \hat{\mu} = \hat{C}_i - \hat{\mu}$$

sonucu elde edilir. Eş (1)'den,  $\hat{\alpha}_i = \hat{C}_i - \hat{\mu}$  'dir, bu ise Bühlmann-Straub modeli için ENDOST olarak kabul edilebilir.

Yani, yeni primin  $\hat{\mu}$  'den fazla olan bölümü  $i$  'nci sınıf için prime eklenmiş olan rassal etkiyi temsil etmektedir. Sonuç olarak, Bühlmann-Straub kredibilite modelleri ile Karma etki modeli arasındaki ilişkiyi gösteren en önemli özellik, kredibilite modelleri  $\theta$  gibi belli bir parametreye bağlı iken, Karma etki modelinde  $\theta$  parametresinin yerini rassal etkiler almaktadır.

## Prim Tahminlerini Elde Etmek Üzere Monte Carlo Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, Bühlmann-Straub kredibilite modeli ve Karma etki modeli için hasar tutarı modellemeleri yapılarak, her iki modele ait prim tahminlerini karşılaştırmalı olarak incelemek amacıyla simülasyon çalışması yapılmıştır. İlk olarak, bir sigorta şirketine ait olduğu varsayılan portföydeki risk grubu sayıları  $n = 3, 4, 5$  ve bunlara karşılık dönem sayıları  $t = 5, 15, 25$  olacak şekilde 9 durum tasarlanmıştır. Sigortalı sayıları Poisson dağılımından, hasar tutarları ise Pareto dağılımından, farklı dağılım parametreleri kullanılarak seçilmiştir. Her duruma ait dağılım parametreleri,  $i = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere, Poisson dağılımı için  $\lambda_i = 1500 + 1i$ ,  $\lambda_i = 1500 + 10i$ ,  $\lambda_i = 1500 + 100i$ ,  $\lambda_i = 1500 + 1000i$  olmak üzere 4 farklı parametre kombinasyonu ve Pareto dağılımı için parametreleri şekil parametresi  $a=11$  ve konum parametresi  $b_i = 150 + 10i$ ,  $b_i = 150 + 50i$  (pareto dağılımının beklenen değeri  $E(X) = ba/(a-1) = 11a/10 = 1.1b$ ) olacak şekilde 2 farklı parametre kombinasyonu alınarak, 72 farklı durum için homojen ve heterojen portföyler oluşturulmuştur. Bu durumların her biri için örneğe ait hasar primleri hesaplanarak 50000 tekrar sonunda sonuçların ortalamaları alınmıştır. Çizelge 2-9'da, oluşturulan homojen ve heterojen portföylere ait simülasyon sonuçlarını yer almaktadır.

Simülasyon çalışmasının her tekrarında, Bühlmann-Straub kredibilite modeli (BSM)ne ait tahmin değerleri için aşağıdaki tahmin ediciler kullanılmıştır.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_i \sum_j m_{ij} Y_{ij}, \quad \hat{\mu}_K = \sum_{i=1}^n \hat{Z}_i \bar{Y}_i / \sum_{i=1}^n \hat{Z}_i,$$

$$\hat{\nu} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i} m_{ij} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \right) / \left( \sum_{i=1}^n (t_i - 1) \right),$$

$$\hat{a} = \frac{\left( \sum_{i=1}^n m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - \hat{\nu}(n-1) \right)}{\left( m - (1/m) \sum_{i=1}^n m_i^2 \right)}, \quad \hat{k} = \hat{\nu} / \hat{a}$$

ve  $\hat{Z}_i = m_i / (m_i + \hat{k})$ .

Buradan sırasıyla Bühlmann-Straub kredibilite primi ve kredibilite ağırlıklı Bühlmann-Straub kredibilite primi sırasıyla,

$$\hat{C}_{i(BS)M} = \hat{Z}_i \bar{Y}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu}$$

ve

$$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}} = \hat{Z}_i \bar{Y}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu}_{Kred}$$

formülleri ile elde edilmiştir. Karma etki modeli (KEM) ne ait tahmin ediciler,

$$GKO = \left( \sum_{i=1}^n t (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right) / (n-1),$$

$$HKO = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \right) / (N-n),$$

$$\sigma_\alpha^2 = (GKO - HKO) / t, \quad \sigma_\varepsilon^2 = HKO$$

$$\hat{\alpha}_i = \left( t / \left( t + (\sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\alpha^2) \right) \right) (\bar{Y}_i - \hat{\mu})$$

biçiminde olup, prim değerleri,

$$\hat{C}_{i(KEM)} = \hat{\alpha}_i + \hat{\mu} \quad \text{ve} \quad \hat{C}_{i(KEM)_{Kred}} = \hat{\alpha}_i + \hat{\mu}_{Kred}$$

formülleri kullanılarak elde edilmiştir.

Aşağıdaki çizelgelerde yorumlamada kolaylık sağlaması açısından uygunluk oranı kullanılmıştır. Uygunluk oranları,

$$UO_i (\%) = 100 - \frac{\left| \hat{C}_{i(BS)M} - \hat{C}_{i(KEM)} \right|}{\hat{C}_{i(BS)M}} \times 100$$

$$UOK_i (\%) = 100 - \frac{\left| \hat{C}_{i(BS)M_{Kred}} - \hat{C}_{i(KEM)_{Kred}} \right|}{\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}} \times 100$$

şeklinde hesaplanabilir.

**Çizelge 2:** Pareto dağılımının parametreleri  $a=11$  ve  $b_i=150+10i$ , Poisson dağılım parametresi  $\lambda_i = 1500+1i$ ,  $i = 1,2,\dots,n$ , alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM'lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

$n$	$t$	Bühlmann-Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı	Bühlmann-Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$UO(\%)$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$	$UO(\%)$	
3	5	168,9219	168,8243	99,9423	169,0404	168,8237	99,8718	
		176,4005	176,3566	99,9751	176,5373	176,3560	99,8973	
		182,6661	182,7547	99,9515	182,3947	182,7541	99,8029	
	15	166,8464	166,8357	99,9936	166,8376	166,8316	99,9964	
		176,0390	176,0494	99,9941	176,0403	176,0454	99,9971	
		185,1164	185,1175	99,9994	185,1177	185,1135	99,9977	
	25	166,1238	166,1229	99,9995	166,1230	166,1181	99,9971	
		175,9839	175,9840	100,0000	175,9832	175,9792	99,9977	
		185,8609	185,8603	99,9997	185,8603	185,8555	99,9975	
	4	5	169,2279	169,2464	99,9890	169,3140	169,2391	99,9557
			177,5258	177,5139	99,9933	177,5135	177,5066	99,9961
			185,4394	185,6847	99,8677	185,6307	185,6774	99,9748
193,6415			193,6367	99,9975	193,6358	193,6293	99,9967	
15		166,7023	166,7004	99,9988	166,7014	166,6918	99,9942	
		176,5749	176,5747	99,9999	176,5740	176,5661	99,9955	
		186,4103	186,4102	99,9999	186,4094	186,4016	99,9958	
		196,2688	196,2676	99,9993	196,2680	196,2590	99,9954	
25		166,0503	166,0492	99,9993	166,0497	166,0407	99,9945	
		176,3523	176,3522	99,9999	176,3517	176,3437	99,9954	
		186,6333	186,6332	99,9999	186,6328	186,6248	99,9957	
		196,9681	196,9672	99,9995	196,9676	196,9587	99,9955	
5		5	169,2909	169,2857	99,9969	169,2889	169,2743	99,9913
			178,1885	178,1871	99,9992	178,1866	178,1757	99,9939
			187,0155	187,0155	100,0000	187,0136	187,0040	99,9949
	195,8831		195,8824	99,9997	195,8812	195,8709	99,9948	
	204,7106		204,7077	99,9986	204,7088	204,6963	99,9939	
	15	166,6216	166,6192	99,9986	166,6206	166,6057	99,9911	
		176,8121	176,8114	99,9996	176,8111	176,7979	99,9925	
		186,9543	186,9544	100,0000	186,9533	186,9408	99,9933	
		197,1774	197,1771	99,9998	197,1764	197,1636	99,9935	
		207,3785	207,3768	99,9992	207,3775	207,3632	99,9931	
	25	165,9919	165,9905	99,9991	165,9913	165,9764	99,9910	
		176,4880	176,4876	99,9998	176,4874	176,4736	99,9922	
		186,9946	186,9946	100,0000	186,9939	186,9805	99,9928	
		197,4703	197,4701	99,9999	197,4697	197,4560	99,9931	
			207,9912	207,9901	99,9995	207,9906	207,9761	99,9930

**Çizelge 3:** Pareto dağılımının parametreleri  $a=11$  ve  $b_i=150+50i$ , Poisson dağılım parametresi  $\lambda_i = 1500+li$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM'lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

$n$	$t$	Bühlmann- Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı	Bühlmann- Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$UO(\%)$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$	$UO(\%)$
3	5	166,7754	166,7734	99,9988	166,7744	166,7473	99,9837
		220,1047	220,1046	100,0000	220,1038	220,0785	99,9885
		273,2177	273,2173	99,9998	273,2169	273,1911	99,9906
	15	165,6033	165,6028	99,9997	165,6031	165,5784	99,9851
		219,9964	219,9964	100,0000	219,9962	219,9720	99,9890
		274,4356	274,4354	99,9999	274,4354	274,4110	99,9911
	25	165,3514	165,3510	99,9998	165,3512	165,3268	99,9852
		220,0099	220,0099	100,0000	220,0098	219,9857	99,9891
		274,6478	274,6477	99,9999	274,6477	274,6234	99,9912
4	5	167,0978	167,0948	99,9982	167,0967	167,0498	99,9720
		220,6751	220,6745	99,9997	220,6740	220,6296	99,9799
		274,2635	274,2635	100,0000	274,2624	274,2185	99,9840
		327,9547	327,9537	99,9997	327,9536	327,9087	99,9863
	15	165,7098	165,7088	99,9994	165,7094	165,6637	99,9724
		220,2116	220,2115	99,9999	220,2112	220,1664	99,9796
		274,8121	274,8121	100,0000	274,8117	274,7670	99,9837
		329,2660	329,2656	99,9999	329,2656	329,2205	99,9863
	25	165,4369	165,4363	99,9996	165,4366	165,3908	99,9723
		220,1422	220,1421	99,9999	220,1419	220,0966	99,9794
		274,8951	274,8951	100,0000	274,8949	274,8496	99,9835
		329,5847	329,5844	99,9999	329,5844	329,5389	99,9862
5	5	167,3196	167,3150	99,9973	167,3180	167,2422	99,9547
		221,1425	221,1411	99,9994	221,1409	221,0682	99,9672
		275,0323	275,0323	100,0000	275,0308	274,9594	99,9741
		328,8707	328,8706	100,0000	328,8692	328,7978	99,9783
		382,7890	382,7872	99,9995	382,7875	382,7143	99,9809
	15	165,7503	165,7488	99,9991	165,7497	165,6751	99,9550
		220,3966	220,3961	99,9998	220,3961	220,3225	99,9666
		274,9654	274,9654	100,0000	274,9648	274,8917	99,9734
		329,5624	329,5623	100,0000	329,5619	329,4887	99,9778
		384,1436	384,1430	99,9998	384,1430	384,0693	99,9808
	25	165,4854	165,4845	99,9994	165,4851	165,4113	99,9555
		220,2366	220,2363	99,9999	220,2363	220,1632	99,9668
		274,9991	274,9991	100,0000	274,9987	274,9259	99,9735
		329,7635	329,7635	100,0000	329,7632	329,6903	99,9779
		384,5303	384,5299	99,9999	384,5300	384,4568	99,9810

**Çizelge 4:** Pareto dağılımının parametreleri  $a=11$  ve  $b_i=150+10i$ , Poisson dağılım parametresi  $\lambda_i = 1500+10i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM'lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

$n$	$t$	Bühlmann-Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı	Bühlmann-Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$UO(\%)$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$	$UO(\%)$
3	5	168,6793	168,8698	99,8870	168,7073	168,8354	99,9241
		176,4040	176,4140	99,9943	176,3037	176,3795	99,9570
		182,9290	182,7496	99,9019	182,9830	182,7151	99,8536
	15	166,8347	166,8272	99,9955	166,8297	166,7862	99,9739
		176,0461	176,0466	99,9997	176,0410	176,0056	99,9799
		185,1844	185,1736	99,9942	185,1750	185,1326	99,9771
	25	166,1414	166,1343	99,9957	166,1360	166,0907	99,9728
		176,0110	176,0116	99,9997	176,0019	175,9680	99,9807
		185,8632	185,8618	99,9992	185,8693	185,8182	99,9725
4	5	169,3057	169,2793	99,9844	169,2874	169,2119	99,9554
		177,5442	177,5428	99,9992	177,5286	177,4754	99,9700
		185,6603	185,6702	99,9946	185,6853	185,6029	99,9556
		193,2689	193,5842	99,8369	193,5735	193,5168	99,9707
	15	166,7248	166,7082	99,9900	166,7167	166,6270	99,9462
		176,5572	176,5557	99,9991	176,5491	176,4745	99,9577
		186,4170	186,4164	99,9997	186,4090	186,3352	99,9604
		196,3442	196,3307	99,9931	196,3362	196,2495	99,9559
	25	166,1248	166,1139	99,9934	166,1194	166,0293	99,9458
		176,3520	176,3508	99,9993	176,3466	176,2662	99,9544
		186,6617	186,6611	99,9997	186,6563	186,5765	99,9572
		196,9481	196,9392	99,9955	196,9428	196,8547	99,9553
5	5	169,3307	169,2832	99,9719	169,3113	169,1671	99,9148
		178,1659	178,1561	99,9945	178,1466	178,0400	99,9402
		187,0080	187,0115	99,9982	186,9888	186,8954	99,9500
		195,9609	195,9539	99,9964	195,9417	195,8378	99,9470
		204,7631	204,7285	99,9831	204,7442	204,6124	99,9357
	15	166,6711	166,6483	99,9863	166,6612	166,5144	99,9120
		176,8140	176,8080	99,9966	176,8042	176,6742	99,9264
		187,0240	187,0244	99,9998	187,0143	186,8905	99,9338
		197,2039	197,2004	99,9982	197,1942	197,0665	99,9353
		207,4420	207,4249	99,9918	207,4323	207,2910	99,9319
	25	166,0167	166,0023	99,9913	166,0104	165,8644	99,9121
		176,5130	176,5091	99,9978	176,5067	176,3712	99,9232
		187,0115	187,0116	99,9999	187,0052	186,8736	99,9296
		197,4769	197,4747	99,9989	197,4707	197,3367	99,9321
		208,0212	208,0103	99,9948	208,0150	207,8723	99,9314

**Çizelge 5:** Pareto dağılımının parametreleri  $a=11$  ve  $b_i=150+50i$ , Poisson dağılım parametresi  $\lambda_i=1500+10i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM'lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

$n$	$t$	Bühlmann- Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı	Bühlmann- Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$UO(\%)$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$	$UO(\%)$
3	5	166,7182	166,7033	99,9911	166,7106	166,4662	99,8534
		219,9942	219,9943	100,0000	219,9867	219,7571	99,8956
		273,2966	273,2890	99,9972	273,2892	273,0518	99,9131
	15	165,5956	165,5904	99,9968	165,5930	165,3520	99,8545
		219,9882	219,9882	100,0000	219,9856	219,7499	99,8928
		274,3594	274,3567	99,9990	274,3568	274,1184	99,9131
	25	165,3822	165,3790	99,9981	165,3806	165,1377	99,8531
		220,0063	220,0063	100,0000	220,0047	219,7650	99,8911
		274,6430	274,6413	99,9994	274,6414	274,4000	99,9121
4	5	167,0701	167,0428	99,9837	167,0589	166,5963	99,7231
		220,8042	220,7995	99,9978	220,7932	220,3529	99,8006
		274,3845	274,3846	100,0000	274,3736	273,9380	99,8413
		327,9768	327,9644	99,9962	327,9660	327,5178	99,8634
	15	165,7342	165,7247	99,9943	165,7303	165,2747	99,7251
		220,2369	220,2353	99,9993	220,2331	219,7853	99,7967
		274,7364	274,7364	100,0000	274,7325	274,2864	99,8376
		329,3630	329,3586	99,9987	329,3592	328,9086	99,8632
	25	165,4441	165,4383	99,9965	165,4417	164,9869	99,7251
		220,1485	220,1475	99,9996	220,1461	219,6961	99,7956
		274,8540	274,8540	100,0000	274,8517	274,4026	99,8366
		329,5657	329,5631	99,9992	329,5634	329,1117	99,8629
5	5	167,3354	167,2942	99,9754	167,3203	166,5844	99,5602
		221,1766	221,1632	99,9939	221,1617	220,4534	99,6797
		274,9254	274,9251	99,9999	274,9106	274,2153	99,7471
		328,8033	328,8014	99,9994	328,7886	328,0916	99,7880
		382,8032	382,7854	99,9954	382,7886	382,0756	99,8137
	15	165,7901	165,7758	99,9913	165,7849	165,0583	99,5617
		220,3834	220,3788	99,9979	220,3782	219,6614	99,6747
		274,9985	274,9984	100,0000	274,9933	274,2810	99,7410
		329,6656	329,6650	99,9998	329,6605	328,9475	99,7837
		384,3121	384,3058	99,9984	384,3071	383,5884	99,8130
	25	165,4666	165,4578	99,9947	165,4634	164,7364	99,5606
		220,2501	220,2472	99,9987	220,2469	219,5259	99,6726
		275,0078	275,0078	100,0000	275,0047	274,2864	99,7388
		329,7013	329,7009	99,9999	329,6982	328,9796	99,7820
		384,5358	384,5321	99,9990	384,5327	383,8107	99,8122



**Çizelge 6:** Pareto dağılımının parametreleri  $\alpha=11$  ve  $b_i=150+10i$ , Poisson dağılım parametresi  $\lambda_i = 1500+100i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM'lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

$n$	$t$	Bühlmann-Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı	Bühlmann-Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$UO(\%)$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$	$UO(\%)$
3	5	169,1301	169,0937	99,9785	169,0955	168,8008	99,8257
		174,9831	176,5337	99,1139	176,2585	176,2408	99,9899
		181,8194	182,9471	99,3798	183,1846	182,6543	99,7105
	15	166,9994	166,9075	99,9450	166,9531	166,5269	99,7447
		176,0776	176,0924	99,9916	176,0279	175,7118	99,8204
		185,3169	185,2128	99,9438	185,2353	184,8322	99,7824
	25	166,2127	166,1381	99,9552	166,1712	165,7268	99,7326
		176,0381	176,0434	99,9970	175,9990	175,6321	99,7915
		185,9715	185,9218	99,9733	185,9346	185,5105	99,7719
4	5	169,6491	169,3314	99,8128	169,5413	168,7149	99,5126
		177,6704	177,6871	99,9906	177,5763	177,0705	99,7152
		185,8765	185,8485	99,9850	185,7469	185,2320	99,7228
		193,6994	193,9263	99,8829	193,9462	193,3098	99,6719
	15	166,9486	166,7653	99,8902	166,8679	166,0201	99,4919
		176,7086	176,6892	99,9890	176,6324	175,9440	99,6103
		186,5175	186,5170	99,9997	186,4458	185,7718	99,6385
		196,4481	196,3501	99,9501	196,3824	195,6049	99,6041
	25	166,2255	166,1048	99,9273	166,1713	165,3258	99,4912
		176,4125	176,3969	99,9912	176,3614	175,6180	99,5785
		186,7199	186,7177	99,9988	186,6716	185,9388	99,6074
		197,0601	196,9946	99,9668	197,0143	196,2157	99,5947
5	5	169,9765	169,4510	99,6909	169,7889	168,4128	99,1895
		178,4329	178,3090	99,9306	178,2556	177,2708	99,4475
		187,2233	187,2489	99,9863	187,0582	186,2106	99,5469
		196,1426	196,1133	99,9851	195,9941	195,0751	99,5311
		205,2627	204,9981	99,8711	205,0608	203,9598	99,4631
	15	166,9326	166,6803	99,8488	166,8340	165,4846	99,1912
		176,9371	176,8666	99,9601	176,8441	175,6709	99,3366
		187,0892	187,0908	99,9991	187,0012	185,8952	99,4086
		197,2691	197,2500	99,9903	197,1856	196,0544	99,4263
		207,5612	207,4429	99,9430	207,4817	206,2472	99,4050
	25	166,2097	166,0475	99,9024	166,1459	164,8127	99,1976
		176,6085	176,5622	99,9738	176,5485	175,3274	99,3084
		187,0344	187,0341	99,9999	186,9777	185,7993	99,3698
		197,5877	197,5752	99,9937	197,5340	196,3404	99,3958
		208,1828	208,1083	99,9642	208,1317	206,8735	99,3955

**Çizelge 7:** Pareto dağılımının parametreleri  $a=11$  ve  $b_i=150+50i$ , Poisson dağılım parametresi  $\lambda_i = 1500+100i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM'lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

$n$	$t$	Bühlmann- Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı	Bühlmann- Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$UO(\%)$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$	$UO(\%)$
3	5	167,0302	166,8752	99,9072	166,9558	164,6585	98,6240
		220,0699	220,0709	99,9996	219,9999	217,8541	99,0246
		273,4265	273,3645	99,9773	273,3605	271,1477	99,1905
	15	165,6755	165,6186	99,9657	165,6484	163,3523	98,6139
		220,0431	220,0425	99,9997	220,0177	217,7763	98,9812
		274,4438	274,4227	99,9923	274,4199	272,1564	99,1752
	25	165,4159	165,3812	99,9790	165,3994	163,1049	98,6128
		219,9898	219,9894	99,9998	219,9743	217,7131	98,9721
		274,6517	274,6389	99,9953	274,6371	272,3626	99,1718
4	5	167,4444	167,1541	99,8266	167,3321	163,0945	97,4675
		220,8377	220,7843	99,9758	220,7321	216,7248	98,1845
		274,4479	274,4522	99,9984	274,3484	270,3926	98,5581
		328,2351	328,1448	99,9725	328,1409	324,0852	98,7640
	15	165,8515	165,7472	99,9371	165,8114	161,6150	97,4692
		220,2633	220,2440	99,9912	220,2257	216,1119	98,1320
		274,8151	274,8166	99,9994	274,7796	270,6845	98,5097
		329,4471	329,4157	99,9905	329,4136	325,2836	98,7463
	25	165,5152	165,4519	99,9617	165,4909	161,3077	97,4723
		220,2066	220,1950	99,9947	220,1838	216,0508	98,1229
		274,8795	274,8805	99,9996	274,8580	270,7363	98,5004
		329,6365	329,6175	99,9942	329,6162	325,4734	98,7431
5	5	167,8375	167,3845	99,7301	167,6835	161,0562	96,0477
		221,4559	221,3065	99,9325	221,3112	214,9781	97,1384
		275,1267	275,1184	99,9970	274,9902	268,7901	97,7453
		328,9693	328,9654	99,9988	328,8402	322,6371	98,1136
		382,9938	382,8776	99,9697	382,8713	376,5492	98,3488
	15	166,0128	165,8522	99,9033	165,9583	159,4327	96,0679
		220,4572	220,4045	99,9761	220,4061	213,9850	97,0867
		275,0176	275,0148	99,9990	274,9695	268,5953	97,6819
		329,6745	329,6734	99,9996	329,6291	323,2538	98,0659
		384,1909	384,1503	99,9895	384,1478	377,7308	98,3296
	25	165,5961	165,4981	99,9408	165,5630	159,0584	96,0712
		220,2972	220,2650	99,9854	220,2661	213,8252	97,0759
		275,0553	275,0536	99,9994	275,0260	268,6139	97,6685
		329,8259	329,8253	99,9998	329,7983	323,3856	98,0556
		384,5820	384,5576	99,9936	384,5558	378,1178	98,3259

**Çizelge 8:** Pareto dağılımının parametreleri  $a=11$  ve  $b_i=150+10i$ , Poisson dağılım parametresi  $\lambda_i = 1500+1000i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM'lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

$n$	$t$	Bühlmann-Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı	Bühlmann-Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$UO(\%)$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$	$UO(\%)$
3	5	171,5103	169,4974	98,8264	171,4385	167,9649	97,9738
		176,8305	177,3937	99,6815	177,7996	175,8612	98,9098
		181,8166	184,1090	98,7392	182,9610	182,5765	99,7898
	15	168,5802	167,1184	99,1329	168,0674	164,7771	98,0423
		176,4405	176,4650	99,9861	176,0883	174,1237	98,8843
		186,0504	185,7601	99,8440	185,6232	183,4188	98,8124
	25	167,3331	166,2574	99,3571	166,9254	163,6958	98,0652
		176,3207	176,3084	99,9930	176,0539	173,7468	98,6895
		186,3389	186,2433	99,9487	186,1389	183,6817	98,6799
4	5	174,0161	169,8873	97,6273	173,0491	166,8712	96,4300
		179,0657	178,4703	99,6675	178,4387	175,4543	98,3275
		186,6430	186,8837	99,8710	186,3449	183,8677	98,6706
		195,2856	195,1632	99,9373	194,5487	192,1472	98,7656
	15	169,4438	166,9512	98,5290	168,6675	163,0440	96,6659
		177,3470	176,9222	99,7605	176,8316	173,0150	97,8417
		186,8748	186,9184	99,9766	186,4887	183,0113	98,1353
		197,0214	196,8931	99,9349	196,7057	192,9860	98,1090
	25	167,9119	166,2035	98,9826	167,3546	162,0496	96,8301
		176,8690	176,5747	99,8336	176,5124	172,4207	97,6819
		186,9425	186,9616	99,9898	186,6801	182,8077	97,9256
		197,4026	197,3252	99,9608	197,1951	193,1713	97,9595
5	5	176,0248	169,8027	96,4652	174,4361	165,2387	94,7274
		180,8141	178,9599	98,9745	179,6412	174,3959	97,0801
		188,3026	188,1193	99,9027	187,3271	183,5553	97,9865
		197,0006	197,2030	99,8973	195,9945	192,6389	98,2879
		206,3866	206,2825	99,9496	206,2044	201,7185	97,8245
	15	170,2613	166,8446	97,9932	169,2694	161,3099	95,2977
		178,0696	177,1164	99,4647	177,4203	171,5817	96,7091
		187,5627	187,4299	99,9292	187,0797	181,8952	97,2288
		197,6770	197,7204	99,9780	197,2922	192,1857	97,4117
		208,0836	207,9901	99,9550	207,7639	202,4554	97,4449
	25	168,3629	166,0909	98,6505	167,6783	160,2729	95,5836
		177,2877	176,6690	99,6510	176,8541	170,8510	96,6056
		187,3215	187,2308	99,9516	187,0042	181,4128	97,0100
		197,7626	197,7865	99,9879	197,5123	191,9684	97,1931
		208,4647	208,4066	99,9721	208,2581	202,5886	97,2776

**Çizelge 9:** Pareto dağılımının parametreleri  $a=11$  ve  $b_i=150+50i$ , Poisson dağılım parametresi  $\lambda_i = 1500+1000i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM'lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

$n$	$t$	Bühlmann- Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı	Bühlmann- Straub Modeli	Karma Etki Modeli	Uygunluk Oranı
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$UO(\%)$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$	$UO(\%)$
3	5	169,1935	167,0259	98,7189	168,3859	153,0145	90,8713
		220,5095	220,4027	99,9516	220,0048	206,3913	93,8122
		273,8475	273,7787	99,9749	273,4802	259,7673	94,9858
	15	166,4312	165,6237	99,5148	166,1222	151,1746	91,0021
		220,1452	220,0999	99,9794	219,9577	205,6508	93,4956
		274,6258	274,6033	99,9918	274,4912	260,1542	94,7769
	25	165,9079	165,4122	99,7012	165,7176	150,8849	91,0494
		220,1217	220,0937	99,9873	220,0067	205,5664	93,4364
		274,7547	274,7411	99,9950	274,6724	260,2137	94,7360
4	5	171,3824	167,3058	97,6213	170,0863	145,3217	85,4400
		221,9502	221,1486	99,6388	221,1424	199,1645	90,0616
		274,9413	274,9731	99,9885	274,3543	252,9889	92,2125
		328,6786	328,6593	99,9941	328,2175	306,6751	93,4366
	15	167,2988	165,7987	99,1034	166,8098	143,2169	85,8564
		220,6785	220,3910	99,8697	220,3818	197,8092	89,7575
		274,9007	274,9095	99,9968	274,6877	252,3277	91,8598
		329,5244	329,5178	99,9980	329,3584	306,9360	93,1921
	25	166,3818	165,4648	99,4488	166,0819	142,7505	85,9518
		220,3506	220,1755	99,9206	220,1695	197,4612	89,6860
		274,9381	274,9435	99,9980	274,8084	252,2292	91,7837
		329,6791	329,6754	99,9989	329,5781	306,9611	93,1376
5	5	173,8646	167,5312	96,3573	172,0086	137,3273	79,8375
		223,4037	221,5632	99,1761	222,2470	191,3593	86,1021
		275,9210	275,5875	99,8791	275,0805	245,3836	89,2043
		329,5081	329,6154	99,9674	328,8479	299,4115	91,0486
		383,5311	383,5684	99,9903	382,9875	353,3645	92,2653
	15	168,2237	165,8759	98,6044	167,5191	134,8670	80,5084
		221,1894	220,5269	99,7005	220,7618	189,5180	85,8473
		275,3263	275,2079	99,9570	275,0194	244,1990	88,7934
		329,8789	329,9156	99,9889	329,6396	298,9067	90,6768
		384,5972	384,6101	99,9966	384,4010	353,6012	91,9876
	25	166,9503	165,5238	99,1455	166,5206	134,3592	80,6863
		220,6789	220,2787	99,8187	220,4194	189,1141	85,7974
		275,1093	275,0378	99,9740	274,9234	243,8732	88,7059
		329,9057	329,9278	99,9933	329,7610	298,7633	90,6000
		384,6584	384,6662	99,9980	384,5398	353,5017	91,9285

Çizelge 2 ve Çizelge 3 incelendiğinde gruplardaki birey sayıları arasındaki farklılık çok az iken, hem BS ile KEM hem de kredibilite ağırlıklı BS ile kredibilite ağırlıklı KEM arasındaki uyum oldukça yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Konum parametreleri arasındaki farklılık arttıkça da bu uyum oldukça yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Bu uyum oranlarının en düşüğü %99.85'in üzerindedir. Bu da prim değerleri arasındaki uyumun oldukça yüksek olduğunu gösterir. Çizelge 4 ve Çizelge 5 incelendiğinde gruplardaki birey sayıları

arasındaki farklılık 10'a çıktığında yine hem BS ile KEM hem de kredibilite ağırlıklı BS ile kredibilite ağırlıklı KEM arasındaki uyumun yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Konum parametreleri arasındaki farklılık arttıkça bu uyum yine oldukça yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Bu uyum oranlarının en düşüğü %99.50'in üzerindedir. Bu da her iki durum için modeller arasındaki uyumun iyi olduğu sonucuna varılır. Çizelge 6 ve Çizelge 7 incelendiğinde gruplardaki birey sayıları arasındaki farklılık 100'e çıktığında BS ile KEM arasındaki uyum %99.10'un

üzerindedir. Bu uyum oranı oldukça yüksektir. Fakat kredibilite ağırlıklı BS ile kredibilite ağırlıklı KEM arasındaki uyumun %96'a kadar düştüğü gözlemlenmiştir. Bu da kredibilite ağırlıklı BS ile kredibilite ağırlıklı KEM'in uyumunun, gruplardaki birey sayıları arasındaki farklılıktan, daha fazla etkilendiğini gösterir. Çizelge 8 ve Çizelge 9 bakıldığında gruplardaki birey sayıları arasındaki farklılık çok büyük (1000' e çıktığında) iken BS ile KEM arasındaki uyum %97.60' un üzerindedir. Bu uyum oranı oldukça yüksektir. Fakat kredibilite ağırlıklı BS ile kredibilite ağırlıklı KEM arasındaki uyumun %80'e kadar düştüğü gözlemlenmiştir. Bu da kredibilite ağırlıklı BS ile kredibilite ağırlıklı KEM'in uyumunun özellikle hasar tutarları arasındaki farklılık arttıkça gruplar arasındaki birey sayıları arasındaki farklılık artışından daha fazla etkilendiği söylenebilir. İncelenen durumların ışığı altında hasar tutarları arasındaki fark az iken, bu durumda BS yerine KEM veya kredibilite ağırlıklı BS yerine kredibilite ağırlıklı KEM modeli ile yapılan prim tahminleri kullanılabilir. Hatta grup ve dönem sayılarının çok küçük olduğu durumlarda bile (n=3, t=5 iken) birbirleriyle çok uyumlu sonuçlar vermektedir. Ama gruplar arasındaki hasar tutarları farklılaştıkça kredibilite ağırlıklı BS ile kredibilite ağırlıklı KEM modellerinin uyumluluğu oldukça düşmektedir. Bu gibi durumlarda BS yerine KEM kullanılabilir. Ama kredibilite ağırlıklı BS yerine kredibilite ağırlıklı KEM modeli kullanılarak prim tahminleri yapılması tercih edilmemelidir.

Sonuç olarak, bu tür çalışmalarda olduğu gibi sigorta verilerini modellerken Karma etki modeli kullanılıyorsa ve çalışılan sigorta verileri homojen ve gruplar arasındaki birim sayıları birbirinden çok farklı değil ise prim tahminleri yapılırken hem grup sayıları hem de dönem sayıları küçük alınabilir. Ama genellikle sigorta verileri heterojendir. Eğer hem heterojen hem de gruplar arasındaki birim sayıları birbirinden çok farklı olan portföyle çalışılıyorsa, kredibilite ağırlıklı BS modeli yerine kredibilite ağırlıklı KEM kullanılması tavsiye edilmez. Bu durumda grup sayısı az iken dönem sayısı az olarak alınabilir. Grup sayısı büyük iken ise dönem sayısı da büyük olacak şekilde BS modeli yerine KEM kullanılabilir.

## Sonuç ve Öneriler

Her bir sigorta sözleşmesi için benzer risk karakteristiklerinin yanı sıra, bazı risk karakteristiklerinin gözlenememesinden dolayı genellikle sigorta portföyündeki veriler heterojen olarak oluşur. Aynı zamanda, her sigorta döneminde sigorta hasarları rassal olarak oluşur. Yani bir sonraki sigorta döneminde oluşacak risklerin ne zaman ve ne kadar olacağı hakkında bilgi yoktur. Bu ise sigorta portföyündeki verilerin rassallığını gösterir. Bu gibi durumlarda bir prim saptama yöntemi olarak kullanılan kredibilite modelleri, verilerin rassal olarak oluşma ve heterojenlik sorunlarına bir çözüm getirerek, güvenilir tahmin yapmayı sağlar.

Özet olarak, Bu çalışmada, kredibilite kavramının, kredibilite modellemesinden daha geniş kullanım alanı olan karma etki modellemesinin özel bir yorumu ve uygulaması olduğu gösterilmeye çalışılmıştır. Bu tür

çalışmaların yapılması, kredibilite kavramının sadece sigorta risklerini tespit etmekle sınırlı olmadığını göstererek, aynı zamanda aktüerya biliminin gelişmesine katkıda bulunacaktır. Böylece kredibilite modellerinden elde edilen tahmin değerlerinin yorumu, daha sağlam, anlaşılır ve güvenilir olacaktır. Kredibilite modellerinin istatistiksel modellerle ilişkisini kurmakla, sigortacılıkta prim miktarını belirlemede kullanılan kredibilite teorisine istatistiksel bir bakış açısı kazandırılarak, kredibilite teorisindeki modeller için de istatistiksel işlemler uygulanabilir hale gelmektedir.

## Kaynaklar

- Bühlmann H. 1967. Experience Rating and Credibility, *ASTIN Bulletin*, 4: 199–207.
- Bühlmann H. and Straub E. 1970. Glaubwürdigkeit für Schadensätze, *Mitt. Ver. Schweiz. Ver.*, 70(1): 111-133.
- Ebegil M. 2006. A Study to Examine Bühlmann-Straub Credibility Model in Generalized Linear Models. *Ankara University Communications Series A1: Mathematics and Statistics*, 55(2):9-16.
- Frees E.W., Young V.R. and Luo Y. 1999. A Longitudinal Data Analysis Interpretation of Credibility Models, *Insurance: Mathematics and Economics*, 24(3): 229–247.
- Frees E.W., Young V.R. and Luo Y. 2001. Case Studies using Panel Data Models, *North American Actuarial Journal*, 5(4): 24–42.
- Herzog T.N. 1994. Introduction to Credibility Theory, 3<sup>rd</sup> ed., *ACTEX Publications*, Winsted, 11–145.
- Klugman S.A., Panjer H. H. and Willmot G. E. 1998. *Loss Models From Data to Decisions*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, New York, 515–600.
- McCulloch P. and Nelder J.A. 1989. *Generalized Linear Models*, Monographs on Statistics and Applied Probability 2<sup>nd</sup> ed., Chapman and Hall, New York, 423–431.
- Mowbray A.H. 1914. How Extensive a Payroll is Necessary to Give a Dependable Pure Premium?, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 1: 24–30.
- Nelder J.A. and Verrall R.J. 1997. Credibility Theory and Generalized Linear Models, *ASTIN Bulletin*, 27(1): 71–82.
- Searle S. R. 1971. *Linear Models*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 404–405.
- Searle S.R., Casella G. and McCulloch C.E. 1992. *Variance Components*, John Wiley & Sons, New York, 9–21.