

Lifli Kalın Tüplerde Artık Gerilmenin Dalga Yalınına Etkisi

Hakan EROL

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü/Eskişehir
Alınış Tarihi:28.03.2011, Kabul Tarihi:07.07.2011

Özet: Bu çalışmada, içerisinde viskoz akışkan bulunan aksel germe ve iç basınca maruz lifli tüplerde harmonik dalga yayılımı incelenecektir. Akışkan sıkışmaz ve Newtonyan kabul edilecektir. Damar duvarı için sıkışmaz, anizotrop ve elastik yapısal model kullanılacaktır. Tüp statik iç basınca, aksel germeye ve açılma açısından dolayı oluşan çevresel artık gerilmeye maruzdur. Problemin diferansiyel denklemleri, silindirik koordinatlarda “Büyük statik ön deformasyonlara küçük deformasyonların süperpozisyonu” teoremi kullanılarak elde edilmiştir. Akışkan için hareket denklemlerinin analitik çözümü elde edilmiştir. Katı cisim için elde edilen denklemlerin değişken katsayılı olması nedeniyle sonlu farklar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Dispersiyon ilişkisi aksel germe, açılma açısı, iç basınç ve malzeme parametrelerinin fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Dalga hızları ve taşıma katsayıları sayısal olarak hesap edilmiş ve grafiklerle incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Açılma Açısı, Bünye Denklemleri, Dispersiyon İlişkisi, Kan Akışı

The Effect of a Residual Stress on Wave Propagation in a Fluid-Filled Fibered Tube

Abstract: In this study, the propagation of harmonic waves in an initially inflated and axially stretched, a fibered tubes filled with viscous fluid is studied. The fluid is assumed to be incompressible and Newtonian. An incompressible, anisotropic and elastic structural model is used for the compliant arterial wall. The tube is subjected to an initial static inner pressure, an axial stretch and residual circumferential stress caused by opening angle. The governing differential equations of the problem are obtained in cylindrical coordinates, utilizing the theory of “Superposing small deformations on large initial static deformations”. The analytical solutions of the equations of motion for the fluid have been obtained. Due to variability of the coefficients of the resulting equations for the solid body, they are solved by finite-difference method. The dispersion relation is obtained as a function of the axial stretch, opening angle, internal pressure and material parameters. The wave speeds and transmission coefficients are numerically calculated and the results are discussed on graphics.

Key words: Opening Angle, Constitutive Equations, Dispersion Relation, Blood Flow

Giriş

Silindirik tüplerde dalga yayılımı problemi ilk defa Young (1809), tarafından incelenmiştir. Bilindiği kadarıyla Young 1809’de insan atardamarlarında pals dalgalarının hızını hesaplayan ilk bilim adamı olup, bugün kendi adıyla anılan Young dalga modu vardır. Morgan ve Kiely (1954), lineerleştirilmiş tüp denklemlerini ve akışkan için de Navier-Stokes denklemlerini kullanarak kuadratik denklem elde etmiştir. Womersley (1955, 1957a), dispersiyon bağıntısını elde etmiştir. Daha sonra Womersley (1957b), kullandığı formülasyonu biraz daha geliştirerek damar ortamının içinde bulunduğu yatağın etkisini hesaba katmıştır. Demiray vd. (1987a,1987b, 1987c), arterlerde pulsatif kan akımına ön gerilmenin etkisini daha iyi anlayabilmek için, aksel uzama ve radyal şişmeye maruz kalın ve silindirik bir kabukta harmonik dalga yayılımı problemini incelemişler. “Büyük deformasyonlar üzerine küçük deformasyonların süperpozisyonu” teorisi kullanılarak, dalga hareketini yöneten diferansiyel denklem takımı silindirik koordinatlarda elde etmişlerdir. Diğer yandan Chaudhry vd. (1997), gerilme dağılımı üzerine artık gerilmenin etkisini incelemişlerdir.

Damarın mekanik yapısı incelenirken ortaya çıkan açılma açısı çevresel artık gerilmenin varlığını göstermektedir. Bu artık gerilmenin varlığını ilk gösteren Vaishnav ve

Vossoughi (1983) dir. Huang ve Yen (1998), deneysel olarak yaptıkları çalışmada açılma açısının 46° ile 82° arasında değiştiğini göstermişlerdir. Ancak bu artık gerilmenin içerisinde kan bulunan damarda basınç dalgalarının yayılımı üzerine etkisini inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Bu çalışmanın amacı damar içerisinde var olduğu bilinen artık gerilmenin dalga yayılımı üzerine etkisinin incelenmesidir. Bu amaçla, içinde viskoz akışkan bulunan, iç basınca, aksel germeye maruz lifli elastik tüplerde dalga yayılımını incelemektir. Damarın et kalınlığının çapa oranı $1/6$ ile $1/4$ arasında değiştiği için damar kalın tüp olarak kabul edilecektir. Damar vücut içerisinde ortalama 13 kPa ’lık bir içi basınç ve 1.1 ile 1.6 arasında değişen bir aksel germe etkisindedir. Bu fizyolojik koşullar damarda büyük ön şekil değiştirmelere neden olacaktır. Diğer bir yandan, kalp kanı $\pm 2.5 \text{ kPa}$ lık bir basınç farkıyla pompalamaktadır. Bu dinamik etki damarda var olduğu bilinen statik iç gerilmeler yanında küçük kalacaktır. Bu nedenle problemin yöneten diferansiyel denklemlerini elde ederken “Büyük statik ön deformasyonlara küçük deformasyonların süperpozisyonu” teoremi kullanılacaktır. Ayrıca bu basınç

yayılmasının genliği nispeten küçük olduğu için lineer olmayan terimler ihmal edilecektir.

Akışkan için elde edilen diferansiyel denklemlerin kapalı çözümü elde edilebilmiş, ancak karmaşık katsayıları nedeniyle damar malzemesi için diferansiyel denklemlerin kapalı çözümü bulunamamıştır. Bu denklemlerin çözümü için sonlu fark yaklaşımı kullanılmıştır. Problemi tarif eden dispersiyon ilişkisi iç basıncın, eksenel germenin ve açılma açısının fonksiyonu olarak bulunmuştur. Çalışmanın doğruluğu literatürdeki özel durumlar incelenerek gösterilmiştir.

Materyal ve Metot

İncelenen problem akışkanın ve tüpün etkileşimini içermektedir. Dolayısıyla matematiksel model tüp malzemesi, akışkan ve bunların ara yüzeyinde ortaya konmuştur.

Akışkan İçin Alan Denklemleri

Kan sıkışmaz Newtonyen olmayan bir akışkan olarak kabul edilmektedir. Kan daha önceden bahsedildiği gibi büyük statik iç basınç ve kalbin hareketi ile küçük basınç ve hız değişimleri etkisindedir. Kan akışının eksenel simetrik olduğu, başlangıç hızının ve yerçekimi kuvvetlerinin ihmal edildiği durumda hareket denklemleri silindirik koordinatlarda;

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} - \frac{\hat{u}}{r^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} \right) - \hat{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) - \hat{\rho} \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

ve sıkışmazlık koşulu;

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\hat{u}}{r} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$\hat{\rho}$ akışkanın yoğunluğunu, $\hat{\mu}$ viskozitesini, \hat{p} hidrostatik basıncı \hat{u} , \hat{w} ise hız bileşenlerini göstermektedir. Sınır şartlarında kullanılacak sıfırdan farklı gerilme bileşenleri ise,

$$\hat{t}_{rr} = -\hat{p} + 2\hat{\mu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r}, \hat{t}_{rz} = \hat{\mu} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} \right). \quad (4)$$

olarak verilmiştir.

Elastik Malzeme İçin Alan Denklemleri

Problemin matematiksel analizi için damar malzemesi sıkışmaz, elastik ve anisotrop olarak kabul edilecektir. Ayrıca büyük statik iç basınca, eksenel germeye ve çevresel germeye maruz kabulü yapılacaktır. Bu başlangıç durumu şekil 1 de "Yüklü Durum" olarak gösterilmiştir. Bu durum büyük statik ön yükleri temsil etmektedir. Başlangıç yükleri ortadan kaldırıldığı hal yine şekil 1'de "Yüksüz Durum" olarak gösterilmiştir. Ancak bu yüksüz durumda damar duvarı içinde gerilmeler mevcuttur ki bu

gerilmelere artık gerilme denmektedir. Damardan kesilip çıkarılan halka şeklindeki bir parça eksenel doğrultusunda kesilirse, halka şeklindeki halinden açılarak yay şeklinde bir parçaya dönüşecektir. Bu durum da şekil 1'de "Gerilmersiz Durum" olarak gösterilmiştir.

Silindirik koordinatlarda damarın hareketi

$$r = r(R), \quad \theta = \Gamma \Theta, \quad z = \lambda Z, \quad (5)$$

şeklinde tarif edilebilir. Burada (R, Θ, Z) , (r, θ, z) sırasıyla "Gerilmersiz Durum" ve "Yüklü Durum" daki koordinatları temsil etmektedir. Burada $\Gamma = \pi / (\pi - \Theta_0 / 2)$, $\lambda_z = \lambda$ olarak tanımlanmıştır, Θ_0 ise artık gerilmelerden dolayı oluşan açılma açısını göstermektedir. Radyal, çevresel ve eksenel doğrultulardaki asal germeler

$$\lambda_r = \frac{\partial r}{\partial R}, \quad \lambda_\theta = \frac{\Gamma r}{R}, \quad \lambda_z = \frac{z}{Z} \quad (6)$$

olarak ifade edilebilir. Böylece deformasyon gradyanı tansörü $F_{kK} \equiv \partial x_k / \partial X_K$ aşağıdaki gibi yazılabilir;

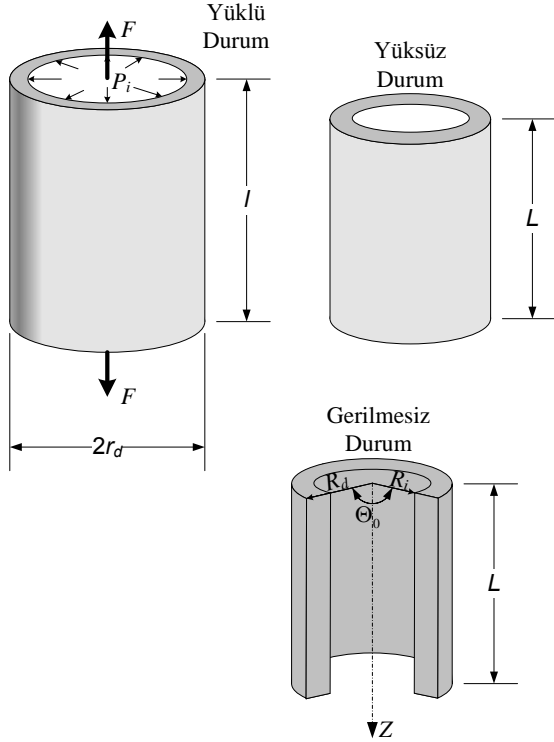
$$\mathbf{F} = \text{diag} \left[\frac{\partial r}{\partial R}, \frac{\Gamma r}{R}, \lambda_z \right] \quad (7)$$

Sıkışmazlık koşulu $\det \mathbf{F} = 1$ kullanılarak; şekil değiştirdikten sonraki yarıçap ile şekil değiştirmeden önceki yarıçap arasındaki ilişki,

$$r = \sqrt{r_i^2 + \frac{1}{\Gamma \lambda} (R^2 - R_i^2)} \quad (8)$$

ile tarif edilebilir. Bu durumda Finger deformasyon tansörü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$c_{kl}^{-1} = F_{kK} F_{lK} = \text{diag} \left[\frac{x^2}{\lambda^2}, \frac{\Gamma^2}{x^2}, \lambda^2 \right], \quad x \equiv \frac{R}{r} \quad (9)$$



Şekil 1. Damarın farklı yük durumlarındaki gösterimi

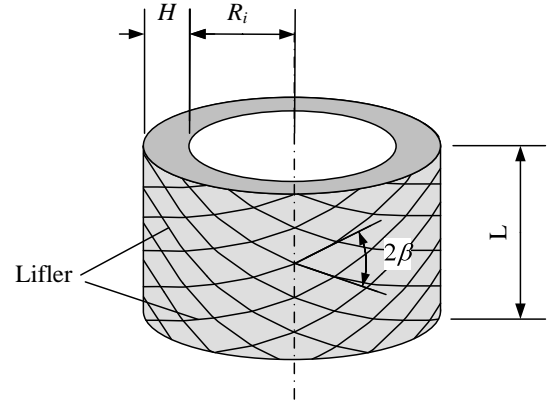
Bu şekil değiştirme etkisi altında damarda ortaya çıkan gerilmeleri yazabilmek için bir malzeme modeli ve buna bağlı bünye denklemi kullanmak gerekir. Bu nedenle şekil değiştirme enerji yoğunluğu Σ ifadesi kullanılacaktır. (Holzapfel vd., 2000) tarafından önerilen Finger deformasyon tansörünün invariantslarının fonksiyonu olan Σ kullanılacaktır. Bu fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\Sigma(I_1, I_4, I_6) = \frac{k_3}{2}(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \left(\exp[k_2(I_4 - 1)^2] + \exp[k_2(I_6 - 1)^2] - 2 \right) \quad (10)$$

burada

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr } \mathbf{c}^{-1} = \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{\Gamma^2}{x^2} + \lambda^2, \\ I_4 &= \mathbf{a}_{01} \cdot \mathbf{c}^{-1} \cdot \mathbf{a}_{01} = \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta + \lambda^2 \sin^2 \beta, \\ I_6 &= \mathbf{a}_{02} \cdot \mathbf{c}^{-1} \cdot \mathbf{a}_{02} = \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta + \lambda^2 \sin^2 \beta, \quad (11) \\ \mathbf{a}_{01} &= [0 \quad \cos \beta \quad \sin \beta]^T, \\ \mathbf{a}_{02} &= [0 \quad \cos \beta \quad -\sin \beta]^T \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. β şekil 2.'de gösterildiği gibi iki lif ailesi arasındaki açıyı temsil etmektedir. k_1 , k_2 ve k_3 malzeme sabitlerini göstermektedir.



Şekil 2. Damardaki liflerin dağılımı

Yumuşak dokular için (Erol, 2008)'un önerdiği bünye denklemi

$$t_{kl}^0 = P^0 \delta_{kl} + 2 \left(c_{kl}^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + d_{1kl} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} + d_{2kl} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \right) \quad (12)$$

gerilmelerin elde edilmesi için kullanılacaktır. Burada üstsimge (0) başlangıç durumunu temsil etmekte, $\mathbf{d1}$ ve $\mathbf{d2}$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{d1} = \mathbf{F}(\mathbf{a}_{01} \otimes \mathbf{a}_{01})\mathbf{F}^T, \mathbf{d2} = \mathbf{F}(\mathbf{a}_{02} \otimes \mathbf{a}_{02})\mathbf{F}^T \quad (13)$$

Denklem (10), (11) ve (13) tanımları kullanılarak denklem (12)'de yerine yazılırsa sıfırdan farklı gerilme bileşenlerini silindirik koordinatlarda

$$\begin{aligned} t_{rr}^0 &= P^0 + \frac{k_3 x^2}{\Gamma^2 \lambda^2}, \\ t_{\theta\theta}^0 &= P^0 + 2 \left(\frac{k_3 \Gamma^2}{2x^2} + \frac{2k_1 F(x)(\tilde{I} - 1) \cos^2 \beta \Gamma^2}{x^2} \right), \\ t_{zz}^0 &= P^0 + 2 \left(\frac{k_3 \lambda^2}{2} + 2k_1 F(x)(\tilde{I} - 1) \lambda^2 \sin^2 \beta \right), \quad (14) \\ t_{kl}^0 &= 0 (k \neq l), \\ F(x) &= \exp[k_2 (\tilde{I} - 1)^2], \end{aligned}$$

$$\tilde{I} = \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta + \lambda^2 \sin^2 \beta, \quad x \equiv \frac{R}{r}$$

yazılabilir. Bu gerilme bileşenleri

$$\frac{\partial t_{rr}^0}{\partial r} + \frac{1}{r}(t_{rr}^0 - t_{\theta\theta}^0) = 0, \frac{\partial t_{\theta\theta}^0}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial t_{zz}^0}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

denge denklemlerini sağlamak zorundadır. Eğer denklem (14) denklem (15)'de yerine yazılacak olursa,

$$t_{rr}^0 = \int_x^{x_2} \frac{k_3 \frac{\Gamma^4 \lambda^2 - \zeta^3}{\Gamma^2 \lambda^2 (\Gamma \lambda - \zeta^2)} + \frac{4k_1 F(\zeta)(\tilde{I}-1) \cos^2 \beta \Gamma^2}{(\Gamma \lambda - \zeta^2)} d\zeta, \quad (16)$$

$$t_{\theta\theta}^0 = k_3 \left(\frac{\Gamma^2}{x^2} - \frac{x^2}{\lambda^2 \Gamma^2} \right) + \frac{5k_1 F(x)(\tilde{I}-1) \cos^2 \beta \Gamma^2}{x^2} + t_{rr}^0,$$

$$t_{zz}^0 = k_3 \left(\lambda^2 - \frac{x^2}{\lambda^2 \Gamma^2} \right) + 4k_1 F(x)(\tilde{I}-1) \lambda^2 \sin^2 \beta,$$

$$P^0 = t_{rr}^0 - \frac{k_3 x^2}{\Gamma^2 \lambda^2},$$

elde edilir. Bu büyük statik gerilme alanına küçük deplasmanları süperpoze edebilmek için (Eringen Ve Şuhubi, 1974) nin önerdiği,

$$T_{kl,k} + \rho f_l = \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} \quad (17)$$

denklem kullanılabilir. Burada ρ tüp malzemesinin yoğunluğunu, f_l hacim kuvvetlerini, u_l artımsal deplasmanları, T_{kl} ise artımsal Piola-Kirchhoff gerilme tansörünü göstermektedir. Burada artımsal gerilme tansörü (Erol, 2008)'da tanımlandığı gibi kullanırsa,

$$T_{kl} = \bar{t}_{kl} + t_{kl}^0 u_{k,l} \quad (18)$$

burada

$$\bar{t}_{kl} = \bar{p} \delta_{kl} - 2P^0 e_{kl} + 4 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_1^2} c_{kl}^{-1} c_{mm}^{-1} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4^2} d1_{kl} d1_{mm} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_6^2} d2_{kl} d2_{mm} \right) e_{mn} \quad (19)$$

$$e_{mn} = \frac{1}{2} (u_{m,n} + u_{n,m})$$

olarak tanımlanarak yazılabilir. Bu artımsal alanı hesaplayabilmek için sağlaması gereken sınır şartları da;

$$T_{kl} n_k = \bar{t}_l - e_{(n)} t_l^0 S \text{ üzerinde, } e_{(n)} = e_{ij} n_i n_j \quad (20)$$

şeklinde verilebilir. t_l^0 başlangıç statik gerilmeleri ve \bar{t} artımsal gerilmeleri n_i S yüzeyinde tanımlana birim dış vektörü göstermektedir. Eksenel germe etkisi altında simetrik artımsal davranış incelendiğinden silindirik koordinatlarda bu hareket,

$$u_1 = u(r, z, t), u_2 = 0, u_3 = w(r, z, t) \quad (21)$$

olarak yazılabilir. Denklem (21) denklem (19) ve denklem (16) sıkışmazlık koşulu da $u_{k,k} = 0$ göz önünde bulundurularak denklem (18)'de yerine yazılırsa sıfırdan farklı artımsal gerilme bileşenleri,

$$T_{rr} = \bar{p} + (t_{rr}^0 - 2P^0) \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$T_{\theta\theta} = \bar{p} + (2\alpha_1 + t_{\theta\theta}^0) \frac{u}{r} + 2\alpha_2 \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$T_{zz} = \bar{p} + 2\alpha_2 \frac{u}{r} + (2\alpha_3 + t_{zz}^0) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (22)$$

$$T_{rz} = -P^0 \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + t_{rr}^0 \frac{\partial w}{\partial r},$$

$$T_{rz} = -P^0 \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + t_{zz}^0 \frac{\partial u}{\partial z},$$

şeklinde elde edilebilir. Burada

$$\alpha_1 = 4k_1 F(x) (1 + 2k_2 (\tilde{I}-1)^2) \frac{\Gamma^4 \cos^4 \beta}{x^4} - P^0,$$

$$\alpha_2 = 4k_1 F(x) (1 + 2k_2 (\tilde{I}-1)^2) \frac{\Gamma^2 \cos^2 \beta}{x^2} \lambda^2 \sin^2 \beta, \quad (23)$$

$$\alpha_3 = 4k_1 F(x) (1 + 2k_2 (\tilde{I}-1)^2) \lambda^4 \sin^4 \beta - P^0$$

tanımları kullanılmıştır. Denklem (22)'de verilen artımsal Piola-Kirchhoff gerilme bileşenleri denklem (18)'de verilen yöneten diferansiyel denklemde ve sıkışmazlık koşulunda yerine yazılırsa

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_3 \frac{u}{r^2} + \beta_4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \beta_5 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_6 \frac{\partial w}{\partial r} + \beta_7 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \beta_8 \frac{\partial u}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Burada

$$\beta_1 = t_{rr}^0 - P^0, \quad \beta_2 = P^0 + 2\alpha_2 t_{\theta\theta}^0 - 2 \frac{\partial}{\partial r} (rP^0),$$

$$\beta_3 = 2\alpha_2 - 2\alpha_1 - t_{\theta\theta}^0 - P^0, \quad \beta_4 = t_{zz}^0 - P^0,$$

$$\beta_5 = \beta_1, \quad \beta_6 = t_{\theta\theta}^0 - \frac{\partial}{\partial r} (rP^0), \quad (25)$$

$$\beta_7 = 2\alpha_3 + t_{zz}^0 + P^0, \quad \beta_8 = 2\alpha_3 - \frac{\partial}{\partial r} (rP^0)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu diferansiyel denklemler denklem (20)'de verilen ve aşağıdaki gibi yazılabilen sınır koşullarını sağlamalıdır.

$$T_{rr} \Big|_{r=r_i} = \left(\hat{t}_u - t_{rr}^0 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_i}, \quad T_{rz} \Big|_{r=r_i} = \hat{t}_u \Big|_{r=r_i},$$

$$T_{rr} \Big|_{r=r_e} = 0, \quad T_{rz} \Big|_{r=r_e} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{r=r_i} = \hat{u} \Big|_{r=r_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{r=r_i} = \hat{w} \Big|_{r=r_i},$$

Bulgular

Bu bölümde, kalbin kanı pompalarken yaptığı hareket göz önünde bulundurulduğunda, alan denklemlerinin harmonik tipteki çözümü aranacaktır. Bu amaçla denklem (1)-(3) ile (24) de verilen alan denklemlerinin

$$\begin{aligned} (\hat{u}, \hat{w}, \hat{p}) &= [\hat{U}(r), \hat{W}(r), \hat{P}(r)] \exp[i(\omega t - kz)], \\ (u, w, \bar{p}) &= [\bar{U}(r), \bar{W}(r), \bar{P}(r)] \exp[i(\omega t - kz)], \end{aligned} \quad (27)$$

tipinde çözümü aranacaktır. Burada ω açısal frekansı, k dalga sayısını ve $\hat{U}(r) \dots \bar{P}(r)$ dalga genliklerini göstermektedir. Denklem (27.1) denklem (1)-(3)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \hat{P}(r) &= AI_0(kr), \hat{U}(r) = \frac{AkI_1(kr)}{\mu(k^2 + s^2)} + \frac{iBk}{s} J_1(rs) \\ \hat{W}(r) &= -\frac{iAkI_0(kr)}{\mu(k^2 + s^2)} + BJ_0(rs), \quad s^2 = -\frac{i\rho\omega}{\mu} - k^2 \end{aligned} \quad (28)$$

bulunur. Burada $J_n(sr)$ ve $I_n(kr)$ birinci tip n . dereceden Bessel ve modifiye Bessel fonksiyonu, A ve B sınır koşullarından bulunacak olan integral sabitlerdir. Denklem (4)'de verilen gerilme bileşenleri ise

$$\begin{aligned} \hat{i}_{rr} &= \left\{ A \left[\frac{-I_0(kr) + 2k}{r(k^2 + s^2)} \left(krI_0(kr) - I_1(kr) \right) \right] + \frac{2Bik\mu}{rs} [rsJ_0(rs) - J_1(rs)] \right\} \exp[i(\omega t - kz)], \\ \hat{i}_{\theta\theta} &= \left\{ -\frac{2Aik^2}{k^2 + s^2} I_1(kr) + \left(\frac{k^2 - s^2}{s} \right) B\mu J_1(rs) \right\} \exp[i(\omega t - kz)], \end{aligned} \quad (29)$$

olarak hesaplanabilir. Bu gerilme bileşenleri damar için çıkartılan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılacaktır.

Elastik Ortama Ait Alan Denklemlerinin Çözümü

Denklem (27.2) denklem (24)'de yerine yazılırsa aşağıdaki adi diferansiyel denklemler elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}}{d\xi} + \bar{\beta}_1 \frac{d^2\bar{U}}{d\xi^2} + \frac{\bar{\beta}_2}{\xi} \frac{d\bar{U}}{d\xi} + \left(\Omega^2 - \bar{\beta}_4\eta^2 - \frac{\bar{\beta}_3}{\xi^2} \right) \bar{U} &= 0, \\ -i\eta\bar{P} + \bar{\beta}_5 \frac{d^2\bar{W}}{d\xi^2} + \frac{\bar{\beta}_6}{\xi} \frac{d\bar{W}}{d\xi} + \left(\Omega^2 - \bar{\beta}_7\eta^2 \right) \bar{W} - \\ i\eta\bar{\beta}_8 \bar{U} &= 0, \\ \frac{d\bar{U}}{d\xi} + \frac{\bar{U}}{\xi} - i\eta\bar{W} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

Bu denklemlerde aşağıdaki boyutsuz büyüklükler kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} r &= \bar{r}\xi, \quad \bar{r} = \frac{r_i + r_o}{2}, \eta = \bar{r}k, \\ \bar{\beta}_j &= k_3\beta_j(\xi), \quad (j = 1, \dots, 8) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\bar{P} = k_3P, \quad \bar{U} = \bar{r}U, \quad \bar{W} = \bar{r}W, \quad \Omega^2 = \frac{\bar{r}^2\rho\omega^2}{k_3}$$

Benzer şekilde sınır koşulları da

$$\begin{aligned} \left[P + \frac{\alpha_2}{\xi} U + (\beta_1 + \beta_5) \frac{dU}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i} &+ \\ \left(\frac{f(\gamma^2 - \eta^2)}{\eta(\gamma^2 + \eta^2)} + \frac{2\eta}{\xi(\gamma^2 + \eta^2)} \right) \bar{A} &+ \\ \left(\frac{2i\eta}{\gamma\xi} (1 - g\xi) \right) \bar{B} &= 0, \\ \left[i\eta P^0 U + \beta_5 \frac{dW}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i} &+ \frac{2i\eta^2}{\gamma^2 + \eta^2} \bar{A} + \\ \frac{\gamma^2 - \eta^2}{\gamma} \bar{B} &= 0, \\ \left[P + (\beta_5 - P^0) \frac{dU}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_o} &= 0, \\ \left[iP^0 \eta U + \beta_5 \frac{dW}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_o} &= 0, \\ \left[i\Omega^2 U \right]_{\xi=\xi_i} - \frac{\bar{\alpha}^2 q \eta}{\gamma^2 + \eta^2} \bar{A} - \frac{iq\bar{\alpha}^2 \eta}{\gamma} \bar{B} &= 0, \\ i\Omega^2 W + \frac{ifq\bar{\alpha}^2}{\gamma^2 + \eta^2} \bar{A} - \frac{gq\bar{\alpha}^2}{\gamma} \bar{B} &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

şekilde elde edilebilir. Burada aşağıdaki büyüklükler kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} \gamma &= \bar{r}s, \quad q = \frac{\rho}{\rho_o}, \quad \bar{P}^0 = k_3P^0, \\ \bar{\alpha}^2 &= \frac{\omega\bar{r}^2}{v}, \quad \xi_i = \frac{r_i}{\bar{r}}, \\ \xi_o &= \frac{r_o}{\bar{r}}, \quad \bar{\alpha}_1 = k_3\alpha_1, \quad \bar{\alpha}_2 = k_3\alpha_2, \\ f &= \frac{\eta I_0(\eta\xi)}{I_1(\eta\xi)}, \quad g = \frac{\gamma J_0(\gamma\xi)}{J_1(\gamma\xi)}, \\ \bar{A} &= \frac{I_1(\eta\xi)}{k_3} A, \quad \bar{B} = \frac{J_1(\gamma\xi)}{\bar{r}k_3} B, \end{aligned} \quad (33)$$

$\bar{\alpha}$ literatürde pulsatile akım problemlerinde viskoz etkileri temsil eden Womersley sayısı olarak bilinmektedir. Denklem (30)'un, (32)'de verilen sınır koşulları altında kapalı çözümünün bulunması neredeyse mümkün değildir. Bu nedenle çözüm sonlu farklar

metodu kullanılarak aranacaktır. Bu amaçla, damar kalınlığı $h = r_d - r_i$ n eşit parçaya bölünür ve aşağıdaki büyüklükler tanımlanır.

$$\xi_j = \xi_0 + j \frac{h}{nr}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (34)$$

$$\xi_0 = \xi_{i\varphi} = 1 - \frac{h}{2r}, \quad \xi_n = \xi_d.$$

Denklem (34)'de verilen ifadeler denklem (30) ve (32)'de kullanılarak fark denklemleri elde edilir. Dispersiyon ilişkisinin elde edilebilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Genel durum çözümlerini elde etmeden önce çözümün geçerliliğini göstermek için literatürde sunulmuş özel durumlar, genel hal için çıkartılmış denklemler kullanılarak elde edilecektir.

Uzun Dalga, İnce Tüp, Viskoz Olmayan Akışkan Durumu

Büyük damarlarda bile dalga boyu damar ortalama çapıyla karşılaştırıldığında oldukça büyük kalmaktadır (Atabek ve Lew, 1966). Bu nedenle incelediğimiz bu özel durumda k oldukça küçüktür ve $\eta \ll 1$ olacaktır. Ayrıca denklem (33)'de tanımlanan f değeri de limit durumda 2'ye yakınsayacaktır. Benzer şekilde denklem (28) kullanılırsa $\gamma^2 \approx -\bar{\alpha}^2$ olacaktır. Literatürde benzer konuda yapılmış çalışmalarla sonuçların karşılaştırılabilmesi için ince tüp kabulü yapılacak ($n=1$) ve viskozite ihmal edilecektir. Viskoz etkilerin ihmal edildiği bu durumda $\gamma \rightarrow \infty$ ve $g \rightarrow \infty$ olacaktır. Bu durumda denklem (30) sınır şartları olan denklem (32) ile birlikte 10 bilinmeyenli 10 denklem verecektir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşitlenerek elde edilebilecek dispersiyon ilişkisi $c = \Omega/\eta$ kompleks faz hızının kuvvetleri şeklinde aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$B_1 c^4 + B_2 c^2 + B_3 = 0 \quad (35)$$

Buradaki B_1, B_2, B_3 katsayıları başlangıç ve malzemenin fiziksel ve mekanik özelliklerine bağlı büyüklüklerdir. Problemin çözümü için öngördüğümüz büyük statik gerilmelerin olmadığı durumda

$$\lambda = 1, \quad \Gamma = 1, \quad P^0 = 1, \quad x = 1 \quad (36)$$

B_1, B_2, B_3 katsayıları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$B_1 = -2hqi$$

$$B_2 = 8hqi + 4ih^2 q^2$$

$$B_3 = -12ih^2 q^2 \quad (37)$$

(37)'de verilen katsayılar kullanıldığında denklem (35)'ün kökleri, h çok küçük olması nedeniyle seriye açılarak

$$c_1^2 = 4 + O(h), \quad c_2^2 = \frac{3qh}{2} + O(h^2) \quad (38)$$

şeklinde elde edilebilir. Sayısal inceleme için (Atabek ve Lew, 1966) tarafından önerilen boyutsuz kompleks faz hızı,

$$c = X + iY \quad (39)$$

olarak tanımlanırsa, dalga hızları (v) ve taşıma katsayıları (χ)

$$v = \frac{X^2 + Y^2}{X}, \quad \chi = \exp\left(-\frac{2\pi Y}{X}\right) \quad (40)$$

şeklinde yazılabilir. Bu tanımlara göre, gerçek fiziksel büyüklükleri kullanarak, E malzemeye ait elastisite modülünü göstermek üzere, $q = \hat{\rho}/\rho$, $k_3 = E/3$ olduğu hatırlanırsa, dalga hızları,

$$v_1^2 = \frac{4E}{3\rho}, \quad v_2^2 = \frac{Eh}{2\hat{\rho}r} \quad (41)$$

şeklinde bulunur. Bu hız bileşenleri Lamb ve Young (Moens-Korteweg) modlarına karşı gelmektedir. Bulunan bu sonuçlar Demiray vd. (1987a,b,c), Demiray ve Ercengiz (1991) ve Demiray ve Akgün (1997) ile uyumludur.

Uzun Dalga, Kalın Tüp, Viskoz Akışkan Durumu

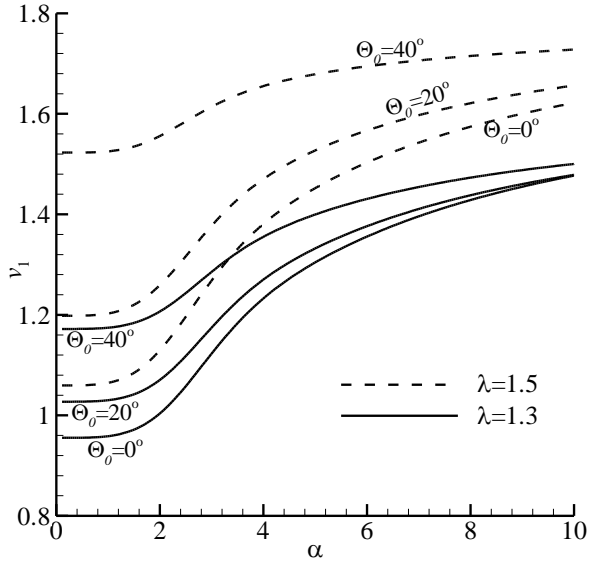
Bu genel halin dispersiyon ilişkisi çizelge 1'de verilen Holzapfel vd. (2000) tarafından önerilen ve bu çalışmada kullanılan şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu için hesaplanmış fiziksel büyüklükler ve beraberinde başlangıç koşulları da kullanılarak elde edilecektir. Ayrıca damarın ve kanın yoğunluğunun birbirlerine çok yakın olması nedeniyle $q=1$ alınacaktır. Dispersiyon ilişkisi P_i iç basıncın, λ aksel germinin, Θ_0 açılma açısının fonksiyonu olarak elde edilecektir ve bu büyüklüklerin dalga hızlarını nasıl etkilediği grafikler ile gösterilecektir. Sayısal hesap yapılırken damar kalınlığı $n=4$ olacak şekilde alt tabakalara ayrılacaktır. Bu durumda denklem (30) sınır şartları olan denklem (32) 14 bilinmeyenli 14 cebrik denklem verecektir. Bu denklemlerin çözümünden (Atabek ve Lew, 1966) önerildiği gibi dalga hızları ve taşıma katsayıları elde edilecektir.

Çizelge 1. Malzeme ve geometrik büyüklükler

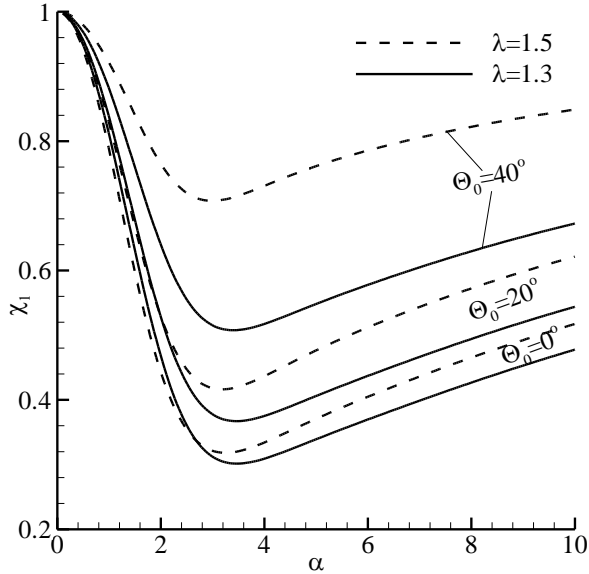
Malzeme	Geometri
$k_1 = 2.3632$ [kPa]	$H = 0.07$ [cm]
$k_2 = 0.8393$ [-]	$\beta = 29.0$ [°]
$k_3 = 3.0000$ [kPa]	$R_i = 0.31$ [cm]

Şekil 3'de birincil dalga hızı v_1 aksel germe, Womersley sayısı α ve açılma açısı arttıkça arttığı gözlenmiştir. Açılma açısının Womersley sayısının küçük değerlerinde ve λ 'nın büyük değerlerinde daha etkin olduğu, α büyüdükçe Θ_0 'ın etkisinin azaldığı gözlenmiştir. Şekil 4'de birincil dalgaya ait taşıma

katsayısı $\alpha < 3$ için hızlı bir azalma gösterdikten sonra λ arttıkça, Θ_0 arttıkça, arttığı görülmektedir. Açılma açısı λ 'nın büyük değerlerinde daha büyük etkiye sahiptir. λ 'nın etkisi Demiray ve Ercengiz (1991) ve Demiray ve Akgün (1997) ile uyum içerisindedir. Birincil dalga katı ortamda yayılan dalga olduğu göz önünde bulundurulursa açılma açısının etkisinin daha fazla olması beklenen bir durumdur.



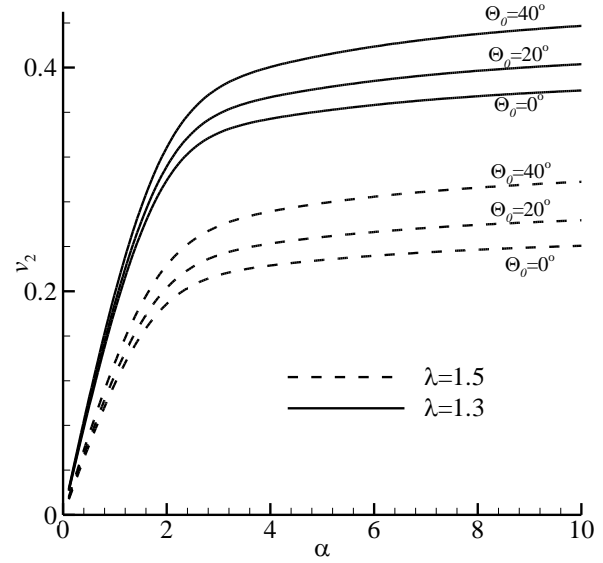
Şekil 3. Birincil dalga hızının α ya göre değişimi



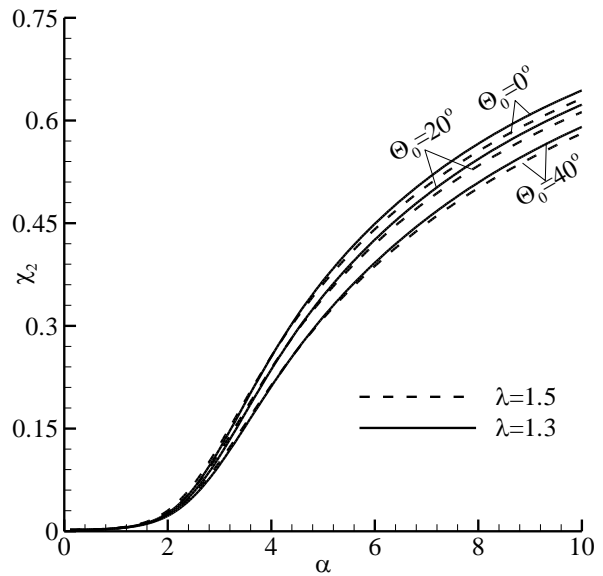
Şekil 4. Birincil dalgaya ait taşıma katsayısının α ya göre değişimi

Şekil 5 ikincil dalga hızının α ile değişimini göstermektedir. $\alpha < 3$ için hızlı bir yükseliş ardından neredeyse sabit devam etmektedir. İkincil dalga hızı aksel germe λ arttıkça ve açılma açısı Θ_0 azaldıkça, azaldığı görülmektedir. Θ_0 birincil dalga hızında olduğu gibi ikincil dalga hızının da artmasına neden olmaktadır. Şekil 6 ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı aksel germe ve açılma açısından fazla etkilenmediğini, α 'ya bağlı hızlı

bir artışa maruz kaldığını göstermektedir. İkincil dalga sıvı ortamda yayılan dalga olduğu göz önünde bulundurulursa açılma açısının etkisinin daha az olması beklenen bir durumdur.



Şekil 5. İkincil dalga hızının α ya göre değişimi



Şekil 6. İkincil dalgaya ait taşıma katsayısının α ya göre değişimi

Burada elde edilen sonuçlardaki dalga hızlarının ve taşıma katsayılarının λ 'ya göre değişimleri literatürdeki sonuçlar ile uyum içerisindedir (Demiray ve Ercengiz, 1991; Demiray ve Akgün, 1997). Bu da çalışmanın doğruluğu hakkında bir fikir vermektedir.

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada içerisinde viskoz akışkan bulunan büyük statik deformasyonlar etkisi altındaki lifli, elastik tüplerde harmonik basınç dalgalarının yayılması üzerine açılma açısının etkisi incelenmiştir. Problemi yöneten diferansiyel denklemler "Büyük statik ön

deformasyonlara küçük deformasyonların süperpozisyonu” teoremi kullanılarak elde edilmiş, akışkan için kapalı çözüm bulunabilmişken katı ortam için çözüm sonlu farklar metodu ile bulunmuştur. En genel hal için elde edilen diferansiyel denklemler literatürde bazı özel durumlarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapabilmek için sadeleştirilmiştir. Bu durumda elde edilen sonuçlar daha önceden yapılmış çalışmalarda sunulan sonuçlarla bire bir aynıdır (Demiray vd. 1987a,b,c; Demiray ve Ercengiz, 1991; Demiray ve Akgün, 1997). Bu da bize ortaya konan çözümün doğruluğu hakkında bir fikir vermektedir.

Genel hal için bulunan sonuçlar da (Demiray ve Ercengiz, 1991; Demiray ve Akgün, 1997) ile uyum içerisindedir. Eksenel germe dalga hızları üzerinde büyük etkiye sahiptir. Bu konu üzerinde yapılacak araştırmalarda eksenel germenin mutlaka göz önünde bulundurulması gerekmektedir.

Açılma açısının içerisinde viskoz akışkan bulunan tüplerde basınç dalgasının yayılması üzerine yapılmış herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Ancak son zamanlarda yapılan deneysel çalışmalar artık gerilmeler nedeniyle ortaya çıkan açılma açısının önemini ortaya koymaktadır (Bustamante ve Holzapfel, 2010). Elde edilen sonuçlardan da görüleceği gibi problem üzerinde büyük etkiye sahip böyle bir durumun mutlaka göz önünde bulundurulması gereklidir. Açılma açısı her iki dalga hızının önemli ölçüde artmasına neden olduğu Şekil 3-6’den anlaşılmaktadır.

Damarın mekanik davranışına yönelik deneysel ve teorik çalışmalar yoğun bir şekilde devam etmektedir. Deneysel çalışmalarda ortaya çıkan sonuçlar teorik çalışmalarla destelenerek açıklanması zor olan biyolojik dokuların mekanik davranışının daha iyi anlaşılmasına neden olacaktır. Yakın zamanda ortaya atılan açılma açısının içerisinde viskoz akışkan bulunan tüplerde basınç dalgasının yayılması üzerine ihmal edilemeyecek etkilere sahip olduğu yapılan bu çalışmada gösterilmiştir.

Damarın gerçekte İntima, Media ve Adventitia olmak üzere üç tabakadan oluştuğu bilinmektedir. Ancak İntima tabakasının kalınlığı ve yük aşımı kapasitesi oldukça azdır. Bu nedenle damarın, mekanik davranışı göz önünde bulundurulduğunda birbirinden farklı mekanik özellikleri olan Media ve Adventitia tabakalarından oluştuğu kabul edilebilir. Bundan sonra yapılacak çalışmalarda denklem 10’da verilen şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu ve denklem 20’de verilen sınır şartları değiştirilerek burada sunulandan farklı bir çözüm elde edilebilir. Ancak bu çözüm bu çalışmaya ilave edilemeyecek, farklı bir çalışmada ele alınabilecek kadar karmaşık bir çözüm olacaktır.

Kaynaklar

- Bustamante, R., Holzapfel, G.A. 2010. Methods to compute 3D residual stress distributions in hyperelastic tubes with application to arterial walls. *International Journal of Engineering Science*, 48, 1066–1082.
- Chaudhry, H.R., Bukiet, B., Davis, A., Ritterj, A.B., Findley, T.J. 1997. Residual stresses in oscillating thoracic arteries reduce circumferential stress gradients. *J. Biomech.*, 30, 57-62.
- Demiray, H., Erbay, H.A., Erbay, S. 1987a. Pulse waves in prestressed arteries. *Bulletin of Mathematical Biology*, 49, 289-305.
- Demiray, H., Erbay, H.A., Erbay, S. 1987b. Effect of Prestress on Pulse Waves in Arteries. *ZAMM*, 67, 473-485.
- Demiray, H., Erbay, H.A., Erbay, S., 1987c. Arterilerde harmonik dalga yayılımı. V. Ulusal Mekanik Kongresi, Kirazlıyayla, 389-399.
- Demiray, H., Ercengiz, A. 1991. Wave propagation in a prestressed elastic tube filled with a viscous fluid, *Int. J. Engng. Sci.*, 29, 575-585.
- Demiray, H., Akgün, G. 1997. Wave propagation in a viscous fluid contained in a prestressed viscoelastic thin tube. *Int. J. Engng Sci.*, 35, 1065-1079.
- Eringen, A.C., Suhubi, E.S. 1974. *Elastodynamics*. Vol. I, Pergamon Press, New York, 44 pp. 246–259.
- Erol, H. 2008. İçerisinde Parçacıklı Akışkan Bulunan Öngerilmeli, Lifli, Tabakalı, Elastik Kalın Tüplerde Harmonik Dalga Yayılımı, Doctoral Dissertation, Eskişehir.
- Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., Ogden, R.W. 2000. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *J. Elasticity*, 61, 1–48.
- Huang, W., Yen, R.T. 1998. Zero-stress states of human pulmonary arteries and veins. *J Appl Physiol*, 85, 867-873.
- Morgan, G.W., Kiely, J.P. 1954. Wave propagation in a viscous liquid contained in a flexible tube. *Journal of the Acoustical Society of America*, 26, 326-338.
- Vaishnav, R.N., Vossoughi, J. 1983. Estimation of residual strains in aortic segments. In: *Biomedical Engineering. II. Recent Developments*, edited by C. W. Hall. New York: Pergamon, 2, 330–333.

Womersley, J.R. 1955. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin walled elastic tube-I The linear approximation for long waves, *Philosophical Magazine*, 46, 199-219.

Womersley, J.R. 1957a. The mathematical analysis of the arterial circulation in a state of oscillatory motion. Wright Air Development Centre, Technical Report WADC-TR, 56-614.

Womersley, J.R. 1957b. Oscillatory flow in arteries: The constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission. *Physics in Medicine and Biology*, 2, 178-187.

Young, T. 1809. On the functions of the heart and arteries the croonian lecture. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 99, 1-31.