



Fonksiyonel Değişimli Malzemelerle Kaplı Seramik Silindirik Panelin Titreşim Analizi

Abdullah H. SOFİYEV¹¹, Zahit MECİTOĞLU², Polat ÖZYİĞİT¹, Melis TAŞKIN¹,
Murat PINARLIK^{1,3}, Ali Nadi KAPLAN¹

İstanbul Teknik Üniversitesi, Metalurji ve Malzeme Mühendisliği Bölümü, 34469, İstanbul, Türkiye

(Alınış Tarihi: 12.09.2014, Kabul Tarihi: 27.11.2014)

Anahtar Kelimeler

FDM Kaplama
Sandviç Silindirik Panel
Titreşim Frekansı

Özet: Bu çalışmada, içten ve dıştan zirkonyum oksit (ZrO_2) ve titanyum-alyo ($Ti6Al4V$)'dan oluşan FDM ile kaplı seramik (ZrO_2) silindirik panelin titreşim analizi ele alınmıştır. Temel bağıntı ve hareket denklemleri türetildikten sonra bu denklemlere Galerkin yöntemi uygulanmış ve FDM ile kaplı sandviç silindirik panelin boyutsuz frekans parametresi için bir ifade bulunmuştur. Bu ifade kullanılarak, FDM kaplamanın özellikleri ve kalınlık değişiminin ve panel boyutlarının boyutsuz frekans parametresine etkileri incelenmiştir.

Vibration Analysis of Ceramic Cylindrical Panels Coated with Functional Gradient Materials

Keywords

FDM coating
Ceramic Cylindrical panel
Vibration
Sandwich panel
Frequency

Abstract: In this study, the vibration of ceramic cylindrical panel covered by FGM coatings composed of zirconium oxide (ZrO_2) and titanium-ally ($Ti6Al4V$) is investigated. First, a sandwich cylindrical panel covered by FGM coatings is designed. After the derivation of basic equations are found expression for the frequency of ceramic cylindrical panels covered by FGM coatings. Discusses the influence of coatings profiles, sandwich shell characteristics, the radius-to-thickness ratio and the core-to-coating thickness ratio on the dimensionless frequencies for FG and homogeneous sandwich cylindrical shells.

¹İlgili yazar: abduallahavey@sdu.edu.tr

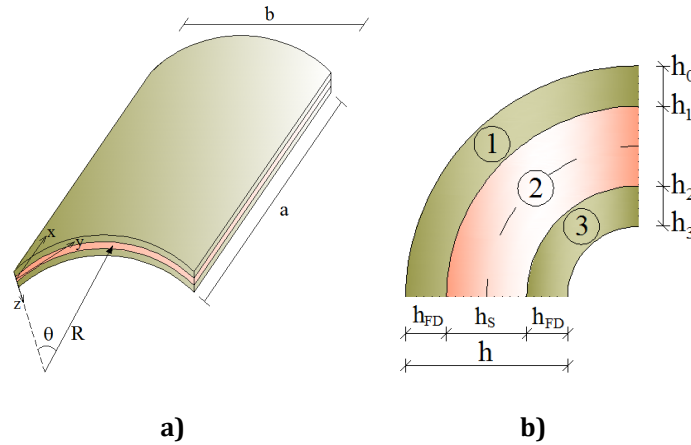
1. Giriş

Günümüzde, malzeme biliminin en önemli görevlerinden biri tıpta uygulanabilen yeni biyo-malzemelerin geliştirilmesidir. Çeşitli dokuların karmaşık işlevleri, bir yapı veya bileşimin başka birine sürekli geçişini içermektedir. Örneğin, yoğun ve sert bir kemiğin dış yüzeyinden (kortikal kemik) gözenekli bir iç yüzeye (süngerimsi kemiği) geçişte kemiğin sağlıklı tasarımı için fonksiyonel değişimli malzemeler (FDM'ler) kullanılmaktadır. Kemik cerrahisinde ve dişçilikte başarılı uygulamaları (suni kemik, eklem, implant vs) ve güvenilir mekanik özelliklere sahip cihazlarda kullanıla bilmesi, aşınmaya ve korozyona dayanıklı olması, biyolojik uyum ve bütünlük sağlayabilmesi ve zararsız olmasından dolayı FDM'ler biyomedikal alanda kullanılmaktadır (Pompe vd., 2003). FDM'ler, toz metalurji yöntemleri kullanılarak iki veya daha fazla değişik malzemenin birleştirilmesinden elde edilir (Koizumi, 1993). FDM'lerin özellikleri kalınlık doğrultusunda hacim kesitinde süreklilik kuralı dağılımına göre derecelenir (Reddy ve Chin, 1998) FDM'ler yüksek performanslı malzeme gruplarından oluşan yeni ve çağdaş bir sınıfı temsil etmekte olup birçok yönden geleneksel malzemelere kıyasla avantajlara sahiptir. Örneğin; istenilen mekanik özelliklerin yapım aşamasında sağlanabilmesi, birbirine yapışmış iki malzemenin ara yüzeyindeki mekanik özelliklerin uyumsuzluğunu gidererek yapısal bütünlüğünü koruyabilmesi ve yüksek sıcaklıkta işlevini sürdürebilme avantajlarına sahiptirler. Bu avantajlardan dolayı FDM'ler gelişmiş yapısal malzemeler arasında daha fazla ilgi görmektedir (Kieback vd., 2003). Ayrıca, FDM'ler makine mühendisliğinde; motorun sıcak bölümlerinde bulunan metalik elemanlarını soğutma gereksinimlerini azaltmak ve eleman ömrünü uzatmak için kaplama olarak, karbit/çelik bağlantılı

FDM plastik üretimle delme, dökme, kalıplama kalemlerde ve seramik zırh ve termo-nükleer kıyafetler gibi savunma mekanizmalarında kullanılmaktadır (Müller vd., 2003). Pür FDM'den oluşan yapı elemanlarının statik ve dinamik davranışları ile ilgili en kapsamlı kitap Shen (2009) çalışmasıdır. Bu kitapta, 1993-2009 yılları arasında, FDM yapı elemanlarının titreşim ve burkulma davranışı ile ilgili yapılmış olan kayda değer çalışmalar ve kaynaklar yer almaktadır. Son yıllarda FDM kaplamalı yapı elemanlarının davranışları ile ilgili çalışmalar önem kazanmaktadır. Literatürde, FDM kaplamaların geliştirilmesi (Baluragi vd., 2012) ve FDM'lerle kaplı bazı yapı elemanlarının statik ve dinamik tepkileri ile ilgili birkaç çalışma bulunmaktadır (Zenkour, 2005; Shodja vd., 2007; Schnack vd., 2013; Sobhy, 2013; Sofiyev, 2014). Sunulan çalışmada, zirkonyum oksit (ZrO_2) ve titanyum-aloy ($Ti6Al4V$)'dan oluşan FDM ile kaplı seramik (ZrO_2) silindirik panel dizayn edildikten sonra titreşim analizi ele alınmaktadır.

2. Materyal ve Yöntem

FDM kaplamalı seramik silindirik panel Şekil 1a'da sunulmaktadır. Üç tabakalı silindirik panelin çekirdeği zenginleştirilmiş zirkonyum oksit (ZrO_2), kaplamalar ise ZrO_2 ve titanyum-aloy ($Ti6Al4V$)'dan oluşan FDM'den oluşmaktadır. FDM kaplamalı panelin eğrilik yarı yarıçapı R , uzunluğu a , yay uzunluğu b , genel kalınlığı $h = 2h_{FD} + h_s$ dir. Burada h_s seramik tabakanın kalınlığı ve h_{FD} FDM kaplamaların her birinin kalınlığıdır (Şekil 1b). Koordinat sistemi üç tabakalı panelin sol kenarında ve çekirdeğin referans yüzeyinde dikkate alınmaktadır. Şekil 1a'da x eksenini ana doğrultuda, y eksenini çevresel doğrultuda, z eksenini ise söz konusu iki eksene dik olarak yönelmektedir.



Şekil 1. FDM Kaplı Seramik Panelde a) Koordinat Sistem ve b) En Kesiti

Kaplamalardaki FDM'lerin hacim oranı, kalınlık koordinatının fonksiyonları olup aşağıdaki bağıntı ile

tanımlanır (Koizumi, 1993; Kieback vd., 2003; Shen, 2009):

$$F = F_s V_s + F_m V_m \quad (1)$$

$$V_s + V_m = 1 \quad (2)$$

Burada F_s ve F_m , FDM'nin seramik ve metal yüzeylerinin özellikleri, V_s ve V_m , FDM'nin seramik ve metal hacim bileşenleri olup şu bağıntı geçerlidir:

$$E_{FD}^{(1)} = E_m + (E_s - E_m)V_m^{(1)}, \quad \nu_{FD}^{(1)} = \nu_m + (\nu_s - \nu_m)V_m^{(1)}, \quad \rho_{FD}^{(1)} = \rho_m + (\rho_s - \rho_m)V_m^{(1)} \quad (3)$$

$$E_{FD}^{(3)} = E_m + (E_s - E_m)V_m^{(3)}, \quad \nu_{FD}^{(3)} = \nu_m + (\nu_s - \nu_m)V_m^{(3)}, \quad \rho_{FD}^{(3)} = \rho_m + (\rho_s - \rho_m)V_m^{(3)} \quad (4)$$

Burada E_m, ν_m, ρ_m ve E_s, ν_s, ρ_s sırasıyla, seramik silindirik panelin dış ve iç yüzeylerindeki FD malzemenin metal ve seramik yüzeylerinin Young modülleri, Poisson oranları ve yoğunluklarıdır.

Seramik silindirik panelin dış ve iç yüzeylerindeki FD kaplamaların hacim kesirleri $V_m^{(1)}$ ve $V_m^{(3)}$ olup doğrusal fonksiyon şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilir (Shodya vd., 2007; Sobhy, 2013; Sofiyev, 2014):

$$V_m^{(1)} = \frac{Z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{ve} \quad V_m^{(3)} = \frac{z_3 - Z}{z_3 - z_2} \quad (5)$$

Burada

$Z = z/h$, $z_0 = -0.5$, $z_1 = h_1/h$, $z_2 = h_2/h$, $z_3 = 0.5$ boyutsuz koordinatlarıdır. FDM kaplamalı seramik çekirdekli silindirik panelin Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluğu için aşağıdaki bağıntılar geçerli olur (Zenkour, 2005; Sobhy, 2013; Sofiyev, 2014):

$$[E(Z), \nu(Z), \rho(Z)] = \begin{cases} E_{FD}^{(1)}, \nu_{FD}^{(1)}, \rho_{FD}^{(1)} & -0.5 \leq Z < z_1 \\ E_s^{(2)}, \nu_s^{(2)}, \rho_s^{(2)} & z_1 \leq Z \leq z_2 \\ E_{FD}^{(3)}, \nu_{FD}^{(3)}, \rho_{FD}^{(3)} & z_2 < Z \leq 0.5 \end{cases} \quad (6)$$

3. Temel Denklemler ve Çözümü

FDM kaplı sandviç silindirik panel ve kabuğun tabakaları için bünye denklemleri şu şekildedir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \sigma_{xy}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & 0 \\ Q_{12}^{(k)} & Q_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Burada $\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}$ ($k=1,2,3$) tabakalardaki gerilmeler, k tabaka sayısı, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ sandviç silindirik kabuğun deformasyonları ve $Q_{ij}^{(k)}$ ($i, j=1,2,6$) tabakalardaki malzeme özellikleridir (Sofiyev, 2014).

Kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki ifadelerden bulunur:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}] dz, \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_{k-1}}^{h_k} z [\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}] dz \end{aligned} \quad (8)$$

Kuvvet bileşenleri ile Airy gerilme fonksiyonu (Φ) arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = h \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) \quad (9)$$

(7)-(9) bağıntıları, silindirik panelin değiştirilmiş Donnell tipi doğrusal hareket ve deformasyon uygunluk denklemlerinde yerine yazıldığında FDM kaplamalı seramik çekirdekli silindirik panelin Airy gerilme fonksiyonu (Φ) ve yer değiştirme fonksiyonuna (w) bağlı temel denklemleri aşağıdaki şekli almaktadır:

$$\begin{aligned} C_2 \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial x^4} + 2(C_1 - C_5) \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial x^2 \partial y^2} + C_2 \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} \\ - C_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2(C_4 + C_6) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - C_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \rho_i \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_1 \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial x^4} + (2B_2 + B_5) \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial x^2 \partial y^2} + B_1 \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial y^4} - B_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ - (2B_3 - B_6) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - B_4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Burada $\bar{\Phi} = \Phi/h$ olup C_i ve B_i ($i=1,2,\dots,6$) katsayıları sandviç panelin FD malzeme özelliklerine

ve panel karakteristiklerine bağlı katsayılarıdır ve şu tanım geçerlidir (Sofiyev, 2014):

$$\rho_t = \int_{-h/2}^{-h_1} \rho_{FD}^{(1)} dz + \rho_s^{(2)}(h_2 + h_1) + \int_{h_2}^{h/2} \rho_{FD}^{(3)} dz \quad (12)$$

FDM kaplamalı silindirik panelin kenarları basit mesnetli sınır koşullarına tabi olduğundan (10) ve (11) kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü aşağıdaki gibi aranır (Volmir, 1967):

$$\omega_1 = \frac{a^2 \pi^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_s^{(2)}}{E_s^{(2)} \rho_t}} \sqrt{C_3 a^{-4} + 2(C_4 + C_6) a^{-2} b^{-2} + C_3 b^{-4} + (a^{-2} R^{-1} - C_2 a^{-4} - C_2 b^{-4} - 2(C_1 - C_5) a^{-2} b^{-2})} \times \frac{a^{-2} R^{-1} + B_4 a^{-4} + (2B_3 - b_6) a^{-2} b^{-2} + B_4 b^{-4}}{B_1 a^{-4} + (2B_2 + B_5) a^{-2} b^{-2} + B_1 b^{-4}} \quad (14)$$

(14) ifadesinden metal kaplamalı silindirik panel (M-S-M) ve pür seramik silindirik panel (S-S-S) için boyutsuz frekans parametresinin ifadeleri özel olarak elde edilebilir.

4. Sayısal Analizler

$$w = f_1(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \bar{\Phi} = f_2(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (13)$$

Burada $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ zamana bağlı değişen fonksiyonlardır.

(13) ifadeleri (10) ve (11) denklemlerinde yerine yazılarak, Galerkin yöntemi uygulandığında ve bazı matematiksel işlemlerden sonra FDM kaplamalı silindirik panelin boyutsuz frekans parametresi için aşağıdaki ifade elde edilir:

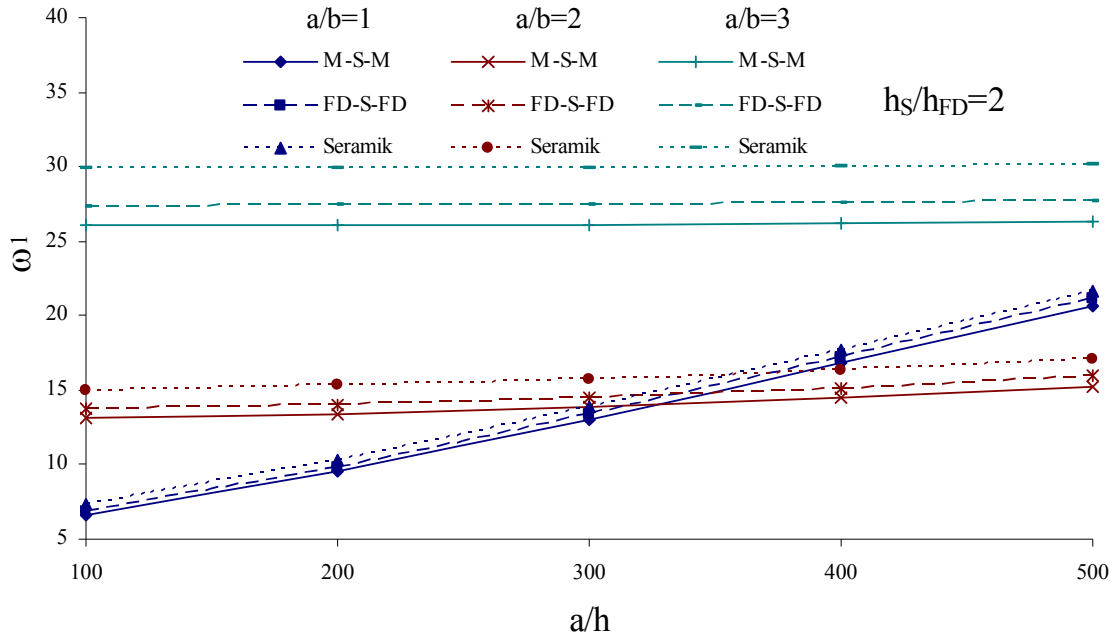
Sayısal analizlerde, FDM kaplamalı silindirik panel (FD-S-FD), metal kaplamalı silindirik panel (M-S-M) ve pür seramik (S-S-S) silindirik panel kullanılmıştır. FDM kaplama, ZrO₂ ve Ti-6Al-4V'den oluşmaktadır. Sandviç silindirik panelin çekirdeği ZrO₂'den oluşur. ZrO₂ ve Ti-6Al-4V özelliklerinin sıcaklığa bağlı katsayıları Tablo 1'de sunulmaktadır.

Tablo 1. ZrO₂ ve Ti-6Al-4V Özelliklerinin Sıcaklığa Bağlı Katsayıları (Reddy ve Chin, 1998; Shen 2009)

Young Modülü	E_0	E_{-1}	E_1	E_2	E_3	E_f
ZrO ₂	2.4427×10 ¹¹	0	-1.371×10 ⁻³	1.214×10 ⁻⁶	-3.681×10 ⁻¹⁰	1.68063×10 ¹¹
Ti-6Al-4V	1.2256×10 ¹¹	0	-4.586×10 ⁻⁴	0	0	1.05698×10 ¹¹
Poisson oranı	ν_0	ν_{-1}	ν_1	ν_2	ν_3	ν_f
ZrO ₂	0.2882	0	1.133×10 ⁻⁴	0	0	0.297996
Ti-6Al-4V	0.2884	0	1.121×10 ⁻⁴	0	0	0.298099
Yoğunluk	ρ_0	ρ_{-1}	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_f
ZrO ₂	5680	0	0	0	0	5680
Ti-6Al-4V	4420	0	0	0	0	4420

Şekil 2' de, FD-S-FD ve M-S-M sandviç silindirik panellerin ve (S-S-S) veya pür seramik silindirik panelin boyutsuz frekans parametresi değerlerinin değişik a/b oranı için a/h oranına bağlı değişimi sunulmaktadır. Hesaplarda kullanılan silindirik panel parametrelerinin bazıları şekil üzerinde sunulmaktadır ve diğer geometrik veriler şu şekildedir: $h_s/h_{FD} = h_s/h_m = 2$ ve $R/a = 12$. Şekil 2'den görüldüğü gibi a/h oranı arttığında, boyutsuz frekans parametresinin değerleri sürekli artmaktadır. a/h oranı 100'den 500'e kadar arttığında boyutsuz frekans parametresinin değerlerine kompozisyonel profilin etkisi a/b oranına bağlı olarak değişmektedir. Örneğin, $a/b = 1$ için a/h oranı

100'den 500'e kadar arttığında, FD-S-FD sandviç panelin boyutsuz frekans parametresi değerleri M-S-M sandviç silindirik panelin uygun değerleri ile kıyaslandığında kompozisyonel profilin etkisi %9.96 dan %4.91 ve $a/b = 2$ için söz konusu etki %12.73 dan %10.74 azaldığı halde, $a/b = 3$ için söz konusu etki yaklaşık değişmemektedir (%12.8). FD-S-FD sandviç silindirik panelin boyutsuz frekans parametresi değerleri S-S-S kabuğun uygun değerleri ile kıyaslandığında kompozisyonel profilin etkisi bir az daha düşük olmaktadır. Ayrıca, a/b oranı arttığında, boyutsuz frekans parametresinin değerleri a/h oranına bağlı olarak yavaş artmaktadır.



Şekil 2. Kaplamalı ve Pür Panellerin Boyutsuz Frekans Parametresinin Değişik a/b Oranı için a/h Oranına Bağlı Değişimi

Tablo 2' de FD-S-FD ve M-S-M sandviç silindirik panellerin boyutsuz frekans parametresi değerlerinin h_s/h_{kap} oranına bağlı değişimi sunulmaktadır. Burada $h_{kap} = h_{FD} = h_m$, $a/h = 200$, $R/a = 12$ ve $a/b = 2$ olarak dikkate alınmıştır. Ayrıca, h_s/h_{kap} oranı arttığında FD-S-FD ve M-S-M sandviç silindirik panellerin boyutsuz frekans parametresinin değerleri artar. FD-S-FD ve M-S-M sandviç silindirik panellerin

boyutsuz frekans parametresinin değerleri kıyaslandığında birincinin değerlerinin daha büyük olduğu saptanmıştır. h_s/h_{kap} oranı 2 den 8 kadar arttığında FD-S-FD ve M-S-M sandviç panellerinin boyutsuz frekans parametresinin değerlerine kompozisyonel profilin etkisi sırasıyla %8.09 dan %4.07' ye ve %12.42' den %7.14' e kadar azalmaktadır.

Tablo 2. FD-S-FD ve M-S-M Sandviç Silindirik Panellerin Boyutsuz Frekans Parametresi Değerlerinin h_s/h_{kap} Oranına Bağlı Değişimi

h_s/h_{kap}	ω_1		
	M-S-M panel	FD-S-FD panel	Seramik panel
2	13.392	14.054	
4	13.719	14.349	15.291
6	13.996	14.540	
8	14.199	14.668	

5. Sonuçlar

Bu çalışmada, ZrO_2 ve $Ti6Al4V$ 'dan oluşan FDM ile kaplı ZrO_2 silindirik panelin serbest titreşim probleminin çözümü sunulmuştur. FDM ile kaplı ZrO_2 silindirik panelin temel bağıntı ve hareket denklemleri türetildikten sonra bu denklemlere Galerkin yöntemi uygulanarak boyutsuz frekans parametresi için ifade türetilmiştir. Bu ifade kullanılarak FDM kaplamanın özelliklerinin, kalınlık değişiminin ve panel boyutlarının boyutsuz frekans parametresi değerlerine etkileri incelenmiştir.

Teşekkür

Yazarlar 113M399 Nolu TUBİTAK Projesine desteğinden dolayı teşekkür eder.

Kaynaklar

Baluragi, H., Gupta, R.K., Sinha, P.P., Ramesh, B.N. 2012. Development of Functionally Graded Coating Material for Metallic Thermal Protection System of Reusable Launch Vehicle. Transactions of the Indian Institute of Metals, 64, 471-481.

Koizumi, M. 1993. The Concept of FGM. *Ceramic Transactions Functionally Graded Materials*, 34, 3-10.

Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H. 2003. Processing Techniques for Functionally Graded Materials. *Materials Science and Engineering A*, 362, 81-106.

Müller, E., Drašar, C., Schilz, J., Kaysser, W.A. 2003. Functionally Graded Materials for Sensor and Energy Applications. *Materials Science and Engineering A*, 362, 17-39.

Pompe, W., Worchorch, H., Epple, M. Friess, W., Gelinsky, M., Greil, P., Hempel, U., Scharnweber, D., Schulte, K. 2003. Functionally Graded Materials for Biomedical Applications. *Materials Science and Engineering*, 362, 40-60.

Reddy, J.N., Chin, C.D. 1998. Thermo-mechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates. *Journal of Thermal Stresses*, 21, 593-602.

Schnack, E., Sofiyev, A.H., Zerlin, Z. 2013. On the Buckling of the Layered Cylindrical Shell with FGM Face Sheets Subjected to the Axial Load. *Acta Physica Polonica A*, 123, 731-733.

Shen, H.S. 2009. *Functionally graded materials, nonlinear analysis of plates and shells*. CRC Press, Florida.

Shodja, H. M., Haftbaradaran, H., Asghari, M. 2007. A Thermoelasticity Solution of Sandwich Structures with Functionally Graded Coating. *Composites Science and Technology*, 67, 1073-1080.

Sobhy, M. 2013. Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates Resting on Elastic Foundations under Various Boundary Conditions. *Composite Structures*, 99, 76-87.

Sofiyev, A.H. 2014. On the Dynamic Buckling of Truncated Conical Shells with Functionally Graded Coatings Subject to a Time Dependent Axial Load in the Large Deformation. *Composites Part B: Engineering*, 58, 524-533.

Volmir, A.S. 1967. *Stability of Elastic Systems*. English Translation: Foreign Tech. Division, Air Force Systems Command, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AD628508, Nauka, Moscow.

Zenkour, A.M. 2005. A Comprehensive Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates: Part 2-Buckling and Free Vibration. *International Journal of Solids and Structures*, 42, 5243-5258.