

Enerji Metodu İle Sertlik Hesaplamaları Üzerine Matematiksel Bir Model

O. SAHİN¹, O. UZUN², U. KÖLEMEN², N. UÇAR¹

¹ Süleyman Demirel Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Isparta

² Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Tokat

Özet: Bu çalışmada, kuvvet-yerdeğiştirme grafiklerinin altındaki alandan hareketle sertlik hesaplamasını yapabilmek üzere, matematiksel bir model geliştirilmiştir. Bu metod, özellikle, yumuşak numunelerde kuvvet-yüzey etkileşmesinde ortaya çıkan ve hesaplamaları ciddi şekilde etkileyen yüzey eğilmeleri sıkıntısını ortadan kaldırmakta ve gerçeğe daha yakın sertlik değerleri vermektedir.

Anahtar Kelimeler: Sertlik, Enerji metodu, kuvvet -yerdeğiştirme.

A Mathematical Model on Hardness Calculations with Energy Method

Abstract: In this study a mathematical method is developed in order to do hardness calculation by using the area under the load-displacement graph. This method makes it vanish the problem of the changes on the surface on which appears on load-surface interaction of the soft materials and seriously effects the hardness calculation. The more realistic hardness values are obtained by using this method.

Keywords: Hardness, Energetic method, Load-displacement

Giriş

Malzemelerin esneklik, süneklik, mukavemet gibi önemli mekanik özelliklerinin yanında bir diğeri de sertliktir. Sertlik bir malzemenin yüzeyine batırılmak istenen sert bir cisme karşı gösterdiği direnç olarak tanımlanır. Sertlik bir anlamda malzemelerin plastik şekil değiştirmeye karşı gösterdiği direnç sayılır, dolayısıyla akma mukavemeti ile ilgili olması beklenir[1].

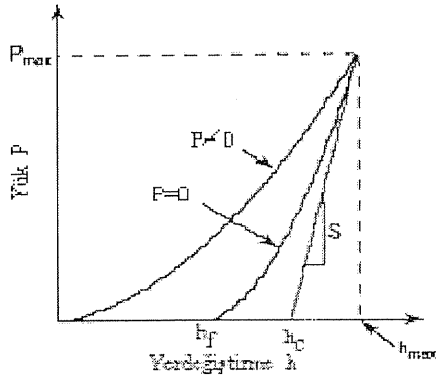
20. yüzyılın başlarında, sertlik hakkında ilk ciddi deneysel çalışmalar Brinell[4] tarafından sert bir kürenin uç olarak kullanılması ve bu kürenin numune üzerinde bıraktığı izin optik metod ile kaydedilmesi esasına göre yapıldı[2,3]. Öte yandan aynı yıllarda Rockwell ve Vickers[7] kullanılan uçların geometrilerini değiştirerek kendi adları ile anılan klasik sertlik ölçme metodlarını geliştirdiler. Rockwell de kullanılan uç bilye veya koni iken Vickers sertlik ölçme yönteminde kullanılan uç piramit şeklinde elmas idi.

Ancak bahsedilen bu klasik sertlik belirleme metodlarındaki ucun numune üzerinde bıraktığı izin optik yollar ile ölçülmesindeki zorluk nedeniyle son yıllarda uygulanan kuvvet (yük) ile ucun numune üzerinde bıraktığı izin derinliğinin ölçülmesi esasına dayanan ölçüm metodları geliştirilmiştir. Bu metodun en önemli avantajlarından biri uygulanan yük ile yerdeğiştirme analizlerinden hareketle kullanılan materyalin mekanik özellikleri, esneklik modülü, hesaplanabilmektedir[4]. Bununla ilgili olarak ilk ciddi çalışmalar Doerner ve Nix[5], Oliver ve Pharr[6] veya Cheng ve Cheng [7] tarafından önerilen metod ile elde edilmiştir[8]. Diğer yandan derinliğe duyarlı mikro sertlik deneyi klasik sertlik deneylerine göre oldukça büyük avantajlar sağlamaktadır. Bu metodların en

büyük avantajlarından birisi de numune üzerinde oluşan izin ölçülmesine gerek kalmaması dahası kontak alanı ve materyalin özelliklerinin yük yerdeğiştirme analizlerinden belirlenebilmesidir[9]. Bu metod ile materyallerin sertlik ve esneklik modülleri gerçek değerlerine oldukça yakın bir biçimde hesaplanabilmektedir. Ancak numune üzerine ucun batırılması ve çıkarılması esnasında ortaya çıkan, yüzeyin batırılan ucun yanal yüzeyine gelen kısmın yanal çıkıntı (pile-up), yanal girinti (sink-in) hareketleri yüzünden bu metod gerçekçi bir şekilde kullanılamamaktadır[10]. Bu yüzden bu etkileri yok edecek yeni bir sertlik ve esneklik modülü ölçümü yapabilecek metoda ihtiyaç duyulmaktadır. Bu çalışmada böyle bir metodun geliştirilmesi sağlanmıştır.

Materyal ve Metod

Klasik sertlik ölçme yöntemlerinde batırılan ucun materyal üzerinde bıraktığı izden hareketle alan hesaplanır ve uygulanan kuvvet alana bölünerek materyalin sertliği hesaplanır[9]. Ancak materyal üzerinde elde edilen izin optik yollar ile ölçülmesi metodun hassasiyetini düşürmektedir. Bu yüzden uygulanan kuvvet-yerdeğiştirme verilerinden hareketle Oliver-Pharr oldukça gerçekçi bir sertlik ve esneklik modülü hesaplaması yapabilecek bir metod geliştirmiştir[6]. Bu metotta kuvvetin materyale uygulanması ve sıfırlanması ile elde edilen kapalı kuvvet-yerdeğiştirme (P-h) grafiklerinden yararlanılır (Şekil 1).



Şekil 1 Kuvvet-yerdeğiştirme grafiği

Bu işlem öncelikle Şekil 1 de verilen kuvvet-yerdeğiştirme grafiği üzerinde kuvvetin mevcut olduğu durumda elde edilen eğrinin fit edilmesi ile başlar[11].

$$P = \beta (h - h_f)^m \quad (1)$$

Burada P izin oluşturulması için gerekli kuvvet, h yerdeğiştirme, β ve m fit edilen eğrilerden deneysel olarak belirlenir ve h_f , numune üzerindeki kuvvet tamamen kaldırıldıktan sonra elde edilen yerdeğiştirme, Kuvvetin numune üzerinden kaldırılmaya başlanması ile elde edilen eğrinin eğiminden hareketle elde edilen sertlik değeri,

$$S = \frac{dP}{dh} (h = h_{\max}) = m\beta (h_{\max} - h_f)^{m-1} \quad (2)$$

olarak bulunur (Şekil 1). Kontak esnasında numune ve uç arasında oluşan kontak derinliği, h_c , ise

$$h_c = h_{\max} - \varepsilon \frac{P_{\max}}{S} \quad (3)$$

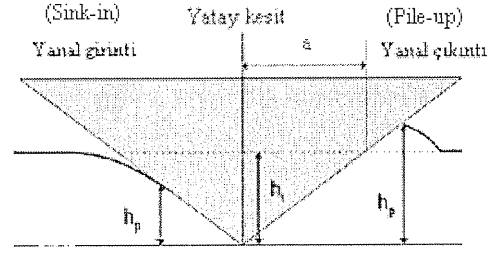
olup, P_{\max} maksimum yük ve ε ise ucun geometrisine bağlı bir sabittir. Kontak alanı,

$$A_c = 26.43 h_c^2 \quad (4)$$

şeklinde alınırsa [8], materyalin esneklik sabiti,

$$E = \frac{\sqrt{\pi} S}{2 \sqrt{A}} \quad (5)$$

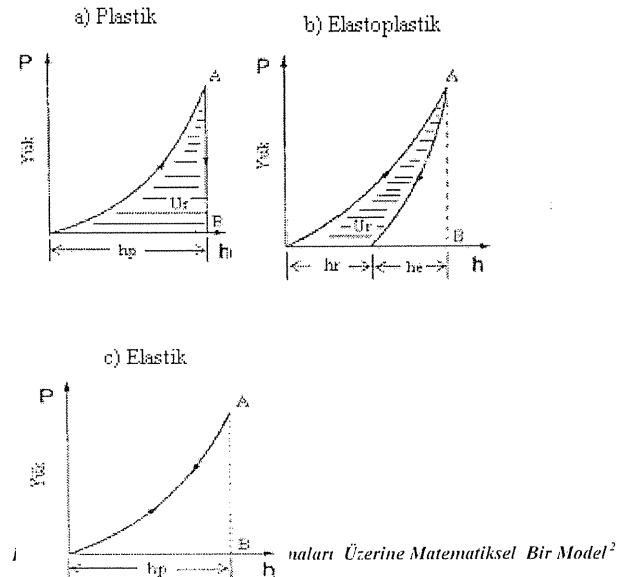
ifadesinden elde edilir. Sertlik ve esneklik sabiti hesaplamalarında kullanılan bu metod, özellikle yumuşak materyallerde gözlenen, ucun numuneye batırılması ile ucun kenarının yukarı doğru bükülmesi (pile-up) ve küçük iz derinliklerinde



Şekil 2 İdeal uç geometrisinden sapma ile meydana gelebilecek (pile-up) yanal çıkıntı ve (sink-in) yanal girinti .

ideal uç geometrisinden sapmanın muhtemel olması nedeniyle ortaya çıkan değişme pile-up etkisi nedeniyle (Şekil 2) daha az duyarlı gözükmetedir [10]. Bu yüzden yeni bir sertlik ve esneklik modülü hesaplamaları yapabilecek bir metoda ihtiyaç vardır.

İyi bilinir ki, bir cisimde belli miktarda şekil değiştirme oluşturmak için gerekli iş kuvveti şekil değiştirme grafiği altında kalan alana eşittir. Bu düşünceden hareketle materyal üzerinde oluşturulan izin derinliği, izin alanı ve hacmini dikkate almadan kuvvet-yerdeğiştirme grafiğinden hareketle hesaplanacak enerji vasıtasıyla sertlik ve esneklik modülü hesaplanabilir [12].



Şekil 3 Materyallerin tipik deformasyon davranışı.

Şekil 3' de şematik olarak üç farklı tipteki deformasyon için kuvvet-yerdeğiştirme eğrileri görülmektedir. Yanal girinti ve yanal çıkıntı etkilerinin göz önüne alınmadığı düz bir numune yüzeyi ve plastik bir malzeme için uygulanan kuvvet ile oluşan iz derinliği arasında,

$$P = A_p h_p^2 \quad (6)$$

şeklinde quadratik bir eşitlik mevcut olup ifadedeki A_p ,

$$A_p = H \frac{\alpha_0}{\gamma_p^2} \tan^2 \psi \quad (7)$$

dir[13]. Denklem (7)'de belirtilen α_0 geometrik sabit olup Vickers uç için 2 dir. ψ ucun tepe açısının değerinin yarısıdır. γ_p ve h_p ideal bir yüzey deformasyonu için sırasıyla geometrik faktör ve iz derinliği olup ideal plastik materyaller için elastik bileşeninin olmamasından dolayı γ_p bir olarak alınır. Materyalin saf elastik davranışı durumunda yukarıdaki ifadeler,

$$P = A_e h_e^2 \quad (8)$$

$$A_e = \frac{E'}{2} \frac{\alpha_0}{\gamma_e^2} \tan \psi \quad (9)$$

şeklinde olup $E' = \frac{E}{(1-\nu)^2}$ ifadesi ile verilir[13].

E Young modülü, ν ise Poisson oranıdır. Denklem (7) ve (9)'daki A_e ve A_p katsayıları sırasıyla plastik ve elastik deformasyona karşı direnci göstermektedir. Elastoplastik yüzey deformasyonu için,

$$h = h_e + h_p \quad (10)$$

$$P = A_e h_e^2 = A_p h_p^2 \quad (11)$$

yazılabilir. Böylece elastoplastik materyallerin yüzey deformasyonu için kuvvet ile yerdeğiştirme arasında,

$$P = A_H h^2 \quad (12)$$

şeklinde bir ifade yazılabilir. İfadede

$$A_H = \hat{H} \frac{\alpha_0}{\gamma_H^2} \tan^2 \psi \quad (13)$$

eşitliği mevcut olup, görünen sertlik değeri,

$$\hat{H} = \frac{H}{\left(\gamma_H^{-1} + k \sqrt{\frac{H}{E'}} \right)^2} \quad (14)$$

ifadesi ile tanımlanır. İfadedeki k terimi ise,

$$k^2 = 2 \left(\frac{\gamma_e}{\gamma_H} \right)^2 \tan \psi \quad (15)$$

şeklinde verilir. Kuvvet-yerdeğiştirme grafiğinde izin derinliği maksimum yükteki derinliğe eşit olmalıdır. (10) ve (11) denklemlerinden hareketle,

$$A_H h^2 = A_e (h - h_p)^2 \quad (16)$$

ve kuvvetin kaldırılması sonucu elde edilen kuvvet-yerdeğiştirme grafiği ile ilgili olarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$P = A_e (h - h_r)^2 \quad (17)$$

ifade de $h > h_r$ dir. Şekil 3'deki elastoplastik yüzey deformasyonu için, plastik enerji U_r kuvvet-yerdeğiştirme eğrilerinin alansal farklarından bulunabilir.

$$U_r = \int_0^h A_H h^2 dh - \int_{h_r}^h A_e (h - h_r)^2 dh$$

$$U_r = A_H \frac{h^3}{3} - \frac{A_e}{3} (h - h_r)^3 \quad (18)$$

$$A_H = \hat{H} \frac{\alpha_0}{\gamma_H^2} \tan^2 \psi \quad (19)$$

$$\hat{H} = \frac{H}{\left(\frac{1}{\gamma_H} + k \sqrt{\frac{H}{E'}} \right)^2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + k \gamma_H \sqrt{\frac{H}{E'}}$$

şeklinde \hat{H} ifadesini ε cinsinden yazarsak;

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + k \gamma_H \sqrt{\frac{H}{E'}}} \text{ ve } \varepsilon^2 = \frac{1}{\left(1 + k \gamma_H \sqrt{\frac{H}{E'}} \right)^2}$$

olur. \hat{H} ifadesine tekrar dönersek,

$$\hat{H} = \frac{H}{\left(\frac{1}{\gamma_H} + k \sqrt{\frac{H}{E'}} \right)^2}$$

$$\hat{H} = \gamma_H^2 H \frac{1}{\left(1 + k \gamma_H \sqrt{\frac{H}{E'}} \right)^2}$$

$$\hat{H} = \frac{H}{\gamma_H^2 \left(1 + k \gamma_H \sqrt{\frac{H}{E'}} \right)^2} = \gamma_H^2 H \varepsilon^2$$

ifadesi bulunur. Bulunan bu son ifadeyi denklem (19) da yerine yazarsak,

$$A_H = \gamma_H^2 H \varepsilon^2 \frac{\alpha_0}{\gamma_H^2} \tan^2 \psi \Rightarrow A_H = H \varepsilon^2 \alpha_0 \tan^2 \psi$$

bulunur. Yerine yazılırsa,

$$U_r = A_H \frac{h^3}{3} - \frac{A_e}{3} (h-h_r)^3 \Rightarrow I = A_H \frac{h^3}{3} \quad II = \frac{A_e}{3} (h-h_r)^3$$

$$\varepsilon = \frac{h_r}{h} \Rightarrow h_r = \varepsilon h \text{ olur.}$$

$$II = \frac{A_e}{3} (h - \varepsilon h)^3 = \frac{A_e}{3} h^3 (1 - \varepsilon)^3 \text{ olur.}$$

$$A_e = \frac{E' \alpha_0}{2 \gamma_e^2} \tan \psi \quad \text{ve} \quad \varepsilon = \frac{1}{1 + k \gamma_H \sqrt{\frac{H}{E'}}$$

ε ifadesinden E' ifadesini çekip A_e denkleminde yerine yazarsak;

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + k \gamma_H \sqrt{\frac{H}{E'}}} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\varepsilon} = 1 + k \gamma_H \sqrt{\frac{H}{E'}} \text{ olur}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{k^2 \gamma_H^2} \frac{1}{H} = \frac{1}{E'} \Rightarrow E' = \frac{\varepsilon^2 k^2 \gamma_H^2 H}{(1 - \varepsilon)^2}$$

şeklinde elde edilir. E' ifadesini A_e denkleminde yerine yazarsak;

$$A_e = \frac{\varepsilon^2 k^2 \gamma_H^2 H}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{1}{2 \gamma_e^2} \tan \psi$$

ve

$$U_r = A_H \frac{h^3}{3} - \frac{A_e}{3} (h - h_r)^3$$

$$U_r = A_H \frac{h^3}{3} - \frac{A_e}{3} h^3 (1 - \varepsilon)^3$$

$$U_r = \frac{h^3}{3} (A_H - A_e (1 - \varepsilon)^3)$$

$$U_r = \frac{h^3}{3} \left[H \varepsilon^2 \alpha_0 \tan^2 \psi - \frac{\varepsilon^2 k^2 \gamma_H^2 H}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{1}{2 \gamma_e^2} \tan \psi (1 - \varepsilon)^3 \right]$$

$$U_r = \frac{h^3}{3} A_H \left[1 - \frac{k^2 \gamma_H^2}{2 \gamma_e^2} \frac{1}{\tan \psi} (1 - \varepsilon) \right]$$

elde edilir.

$$P = A_H h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{P}{A_H}} \Rightarrow h^3 = \left(\frac{P}{A_H} \right)^{\frac{3}{2}}$$

ifadesini

kullanarak, U_r ifadesinde yerine yazarsak,

$$U_r = \frac{P^{\frac{3}{2}}}{3} \frac{A_H}{A_H^{\frac{3}{2}}} \left[1 - \frac{k^2 \gamma_H^2}{2 \gamma_e^2} \frac{1}{\tan \psi} (1 - \varepsilon) \right]$$

$$U_r = \frac{P^{\frac{3}{2}}}{3} \frac{1}{\sqrt{H \varepsilon^2 \alpha_0 \tan^2 \psi}} \left[1 - \frac{k^2 \gamma_H^2}{2 \gamma_e^2} \frac{1}{\tan \psi} (1 - \varepsilon) \right]$$

$$= \frac{P^{\frac{3}{2}}}{3} \frac{1}{\sqrt{H}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0 \tan^2 \psi}} \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{k^2 \gamma_H^2}{2 \gamma_e^2} \frac{1}{\tan \psi} (1 - \varepsilon) \right]$$

ifadesi elde edilir. Diğer yandan,

$$k^2 = 2 \left(\frac{\gamma_e}{\gamma_H} \right)^2 \tan \psi \quad \text{ifadesini de } U_r$$

ifadesinde yerine yazarsak,

$$U_r = \frac{P^{\frac{3}{2}}}{3} \frac{1}{\sqrt{H}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0 \tan^2 \psi}} \frac{1}{\varepsilon}$$

ya da daha düzenli bir şekilde,

$$U_r = \left(\frac{1}{3 \sqrt{\alpha_0 \tan^2 \psi}} \right) \frac{1}{\sqrt{H}} P^{\frac{3}{2}} \varepsilon \quad \text{Enerji Miktarı (ile Sertlik Hesap)ları } P^{\frac{3}{2}} \text{lerine Matematiksel Bir Model (20)}$$

ifadesi elde edilir. Denklem (20)'den faydalanılarak, $U_r (P^{\frac{3}{2}})$ grafiği çizdirilerek sertlik hesaplanabilir.

Sonuç ve Tartışma

Numune yüzeyine uygulanan kuvvet, özellikle yumuşak numune yüzeylerinde yanal çıkıntı ve yanal girinti doğurur. Oliver Pharr'ın geliştirdiği ve kuvvet-yerdeğiştirme grafiklerinden hesaplanan sertlik değerlerinin yeterli hassaslıkta olmadığı bilinmektedir. Bu çalışmada, elastoplastik özellikli numunenin P-h karakteristik özelliği dikkate alınmıştır. Elde edilen P-h grafiğinde, eğri altında kalan alanın hesabını esas alan enerji yöntemi ile sertlik hesabı yapılmıştır. Bu metod özellikle yumuşak numunelerde kuvvet-yüzey etkileşmesinde ortaya çıkan ve hesaplamaları ciddi şekilde etkileyen yüzey eğilmeleri sıkıntısını da ortadan kaldırmakta ve gerçeğe daha yakın sertlik değerleri vermektedir.

Kaynaklar

- [1] Onaran.K, "Malzemelerin mekanik özellikleri" , Bilim teknik yayınevi 1995, İstanbul.
- [2]Tabor D., The Hardness of Metals. Oxford:Oxford Univ. Pres, 1951.
- [3] Bhushan. B.. Handbook of micro/nanotribology. 2 nd Boca Raton (FL): CRC Pres, 1999.
- [4] Xizodong. L., Bhushan. B., "A review of nanoindentation continuous stiffness measurement technique and its applications" Materials Characterization. **48** (2002) 11-36
- [5] Doerner M.F. and Nix. W.D., j. Mater. Res. j. **1**, (1986) 601
- [6] Oliver W.C. and Pharr. G.M., j.Mater.Res. **7**, (1992) 1564
- [7]Y-T Cheng and C-M Cheng., appl. Phys. Lett. **73**, (1998) 614
- [8]Yang-Tse Cheng., Che-Min Cheng., "Can stres-strain relationships be obtained from indentation curves using conical and pyramidal indenters?" Journal of materials research.vol.14 **9** (1999) 3493-3496
- [9] Uzun. O, Kölemen. U, Çelebi. S, Güçlü. N. "Modulus and hardness evaluation of polycrystalline superconductors by dynamic microindentation technique" Journal of the European Ceramic Society. In Pres.Correctet Proof (2004)
- [10] Jonathan. R.T., Korsunsky. M., Bull. A., J. Steve., I. Davidson. Rob.. "On the application of the work-of-indentation approach to depth-sensing indentation experiments in coated systems" Surface Coating Technology. **137** (2001) 217-224
- [11] Bolshakov. A., and Pharr. G.M., "Influences of pileup on the measurement of mechanical properties by load and depth sensing indentation techniques" Journal of materials research.. Vol 13, No **4** (1998). 1049-1058
- [12] Stiwell. N.A., Tabor. D., Proc. Phys. Soc. **78**, (1961) 169
- [13]Sakai. M., "Energy principle of the indentation-induced inelastic surface deformation and hardness of brittle materials" Acta Metal. Mater. Vol **41**, No:6 (1992) 1751-1758

